

50639

N. 49.

MATHEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESÍTŐ.

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

FRÖHLICH IZIDOR

OSZTÁLYTITKÁR.

HARMINCZNEGYEDIK KÖTET

1916.

TIZENNEGY TÁBLÁVAL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1916.



FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

TARTALOM.

	<i>Lap</i>
BAUER MIHÁLY: Az algebrai számtestek elméletéhez	90
BEKE MANÓ: Vizsgálatok az analitikai függvények elmélete köréből	1
DIENES PÁL: Kísérlet a functionálszámítás rendszeres megalapozására	154
Első rész: Functionál előállítás integrállal	
DIENES PÁL: Kísérlet a functionálszámítás rendszeres megalapozására.	
Második rész: Functionális derivált	656
FEJÉR LIPÓT: Interpolatióról. Első közlemény	209
FEKETE MIHÁLY: Vizsgálatok a Fourier-sorokról	759
FRÖHLICH IZIDOR: Különböző törésű átlátszó két közeg válaszfelülete	
közelségében lévő fénylő pontok elméletéhez	453
GEÖCZE ZOÁRD: A rectifabilis felületről	337
GEÖCZE ZOÁRD: «A zérus területű felületről» című értekezés utólagó-	
san észrevett sajtóhibái	587
GROSSCHMID LAJOS: A négyzet-maradékok eloszlásáról	236
KONKOLY-THEGE MIKLÓS: Az ógyallai astrophysikai observatoriumon	
végzett astrophotometriai megfigyelésekről	589
KORDA DEZSŐ: A statikai frequentia-átalakítók elméletéhez	266
KÖNIG DÉNES: Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halma-	
zok elméletére	104
KROMPECHER ÖDÖN: Az emlő tömlős megbetegedéseinek és rákjának	
kóroktanához	230
LENDL ADOLF: A pókok harántesikolt izomrostjainak szövettani szer-	
kezete	258
LENHOSSÉK MIHÁLY: Varratsontosodások a gyermekkorban	607
MAUTHNER NÁNDOR: Adatok a trimethylgallusaldehyd és a syringa-	
aldehyd ismeretéhez	120
SZ. NAGY GYULA: Másodfajú normálgörbékéről	71
SZ. NAGY GYULA: Hurkolt és lánczolt algebrai térgörbék algebrai elő-	
állításáról. (Második közlemény.)	787
ÓNODI ADOLF: A gégebeidegzés problémái	195
PÁLFY MÓRICZ: Az arany előfordulási viszonyairól az erdélyrészi	
Érczhegységben és Nagybánya környékén	518
POGÁNY BÉLA: Igen vékony fémrétegek elektromos vezetőképessége és	
optikai állandói	355

	<i>Lap</i>
POGÁNY BÉLA: Vékony fémrétegek dispersiójáról és absorptiójáról	431
PÓLYA GYÖRGY: Eisenstein tételéről	754
RADOS GUSZTÁV: Wilson tételének analogonja	62
RADOS GUSZTÁV: A binom congruentiák elméletének új tárgyalása	641
REJTŐ SÁNDOR: Elméleti mechanikai technologia	253
RICHTER ALADÁR: A Marcgraviaceae néhány új alakjáról, a származás- és az összehasonlító alkattan alapján. I—III. rész (I—XIV. tábla.)	551, 801, 821
RIEGL SÁNDOR S. J.: Lélegektromos megfigyelések Kalocsán	726
SCHLESINGER LAJOS: A lineáris integro-differentiál-egyenletek elméle- téhez. (Első közlemény.)	129
SCHLESINGER LAJOS: A linearis integro differentiál-egyenletek elméleté- hez. (Második közlemény.)	316
SIGMOND ELEK: A talajvizsgálat szempontjából fontos mesterséges zeolithok előállítása, összetétele, sajátosságai és jelentősége	279
SUTÁK JÓZSEF: Merev rendszerek kinematikája	693
SZENT-GYÖRGYI ALBERT: Vizsgálatok az üvegtest szerkezetéről	623
TUZSON JÁNOS: Az Arabis hirsuta (L.) Scop. alakjai	412

VIZSGÁLATOK AZ ANALYTIKAI FÜGGVÉNYEK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

BEKE MANÓ 1. tagtól.

(Székkfoglaló értekezés.)

Tartalom.

	Lap
Bevezetés	2
 <i>I. Az Hadamard-féle compositio.</i>	
1. Hadamard-tétele a singularitások összetételére vonatkozólag	5
2. Az Hadamard-féle compositio distributív volta	7
3. Az Hadamard-compositio PINCHERLE-féle alakja	8
4. Egyetlen lényeges singuláris hely kriteriuma	11
5. A LE ROY-féle feltétel átalakítása.	12
6. Az Hadamard-tétel bizonyítása egyetlen singuláris hely esetében	16
7. Egyetlen elágazási hely kriteriuma	17
8. Az Hadamard-tétel egyetlen elágazási hely esetében	19
 <i>II. Az Hadamard-tétel néhány alkalmazása.</i>	
1. Az állandó együtthatójú homogen lineáris differenciálegyenlet megoldásának jellemzése	20
2. Az Hadamard-tétel alkalmazása a hypergeometrikus sorra	25
3. Egy elégséges kriterium a singularitás meghatározására	26
4. Az Hadamard-féle függvények	29
5. Az Hadamard-függvények integrálalakja	36
 <i>III. A Hurwitz-tétel és alkalmazásai.</i>	
1. A Hurwitz-tétel	46
2. A Hurwitz-compositio PINCHERLE-féle alakja	48
3. A Hurwitz-tétel alkalmazása a singularitás meghatározására	51
4. A Hurwitz-tétel általánosabb alakja	52
5. A Hurwitz-függvények	54
6. A Hurwitz-függvények alkalmazása a convergentia-körön levő singularitások meghatározására	58

Bevezetés.

Az újabb függvénytani kutatás egyik főfeladata, mely különösen a múlt század végén és a jelen század elején foglalkoztatta a matematikusokat: a hatványsorokkal megadott analitikai függvények tulajdonságainak, főként singularitásaiknak és a singuláris helyen való viselkedésüknek vizsgálata. E tárgyalásoknak új irányt szabott HADAMARD¹ 1892-ben megjelent alapvető fontosságú Thèse-jében, melyhez azóta a vizsgálatok egész sora fűződött.² Később ugyancsak HADAMARD³ egy igen jelentékeny felfedezéssel gazdagította a függvénytani kutatás ez ágát, midőn két, hatványsorok által megadott függvényből egyszerű módon olyan compositiót készített, melynek nem lehetnek más singularitásai, mint az adott függvények singularitásainak szorzatai. E gondolattól vezérelve azután HURWITZ-nak sikerült két, LAURENT-soraik által megadott függvényhez olyan compositiót készíteni, melynek nem lehetnek más singularitásai, mint az adott függvények singularitásainak összegei.⁴

E megjegyzések után röviden jellemzem értekezésem tárgyát. Az első részben először is röviden ismertetem az HADAMARD-féle compositiót az eredeti HADAMARD-féle gondolatmenettől csak éppen methodikai tekintetben eltérő módon, hogy a compositio distributiv voltára utalhassak. Azután e distributiv tulajdonság felhasználásával az HADAMARD-féle tételt bebizonyítom két lépésben: midőn a függvény egyetlen singuláris helye polus vagy lényeges singuláris hely és midőn ez az egyetlen singuláris hely elágazási hely. Ehhez előzőleg szükséges volt annak a kriteriumnak a felállítása, hogy hatványsor által adott függvénynek egyetlen singuláris helye van. Abban az esetben, midőn az

¹ HADAMARD: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journal de Mathématiques, 1892.

² Feleslegesnek tartom az idevonatkozó irodalom részletes felsorolását, mert HADAMARD összefoglaló munkájában, a La Série de Taylor című műben (Scientia N° 12.) 1900-ig majdnem a teljes irodalom fel van sorolva.

³ HADAMARD: Théorème sur les séries entières. Acta Math. 22. 1898.

⁴ HURWITZ: Sur un théorème de M. Hadamard. Comptes Rendus, 1899.

egyik függvénynek polusa van, kimutatom, hogy a singuláris helyek szorzata az HADAMARD-féle compositiónak valóban singuláris helye.

A második részben az HADAMARD-féle compositiót alkalmazom különféle esetekben, és pedig: először ennek segítségével az állandó együtthatójú homogen lineáris differentiálegyenlet általános megoldásának új tárgyalása adódik, mert a megoldás nem más, mint egy rationalis függvény BOREL-féle associált függvénye, vagyis a rationalis függvény és az e^x függvény HADAMARD-féle compositója. Ennek segítségével az együtthatókból egyszerű kriteriumot állítok fel arra, hogy egy megadott hatványsor állandó együtthatójú homogen lineáris differentiálegyenlet megoldása-e? A második alkalmazásban az HADAMARD-tétel segítségével kimutatom, hogy a hypergeometrikus függvénynek nem lehet más singularitása, mint a 0, 1, és ∞ . A harmadik alkalmazásnak eredménye az a tétel, hogy valós együtthatójú, egységsugarú convergentiakörrel bíró hatványsor által értelmezett függvénynek az 1 hely singuláris helye, ha a jelváltási helyek indexeinek reciprok értékeiből alkotott sor convergens. A legfontosabb a következő alkalmazás: olyan sorok vizsgálata, a melyek együtthatói az adott $\sum a_n x^n$ hatványsor együtthatóiból készített HANKEL-féle determinánsok, tehát ilyen soroké: $\sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$, a hol:

$$D_p^{(n)} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+p-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & \dots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}.$$

E sorok által értelmezett függvényekről kimutatom az HADAMARD-tétel alkalmazásával, hogy nem lehet más singularitásuk, mint a $\sum a_n x^n$ értelmezte függvény singularitásainak p tényezősszorzatai; továbbá, hogy e szorzatokban az egyes polusok csakis a rendszámuknál alacsonyabb kitevővel szerepelhetnek és azután: ha az a_1 polus rendszáma k_1 , a_2 -é k_2, \dots , a_m -é k_m , akkor $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ okvetlenül elsőrendű polusa e függvénynek, ha $p = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.

Ezeket a tételeket a soralak alapján mutatom meg. Azután pedig az új függvényt előállítom többszörös integrál alakjában és közvetlenül az integrálokon ismét megmutatom az említett tulajdonságokat.

A következő — utolsó — részben a HURWITZ-féle compositióval és annak alkalmazásaival foglalkozom. A HURWITZ-tételnek dell' AGNOLA-tól származó bizonyításától csak methodikai tekintetben eltérő rövid vázlat után új bizonyítását adom e tételnek abban az esetben, midőn egyetlen polusa, illetőleg lényeges singuláris helye van az egyik függvénynek, a mire a distributiv tulajdonság folytán a compositio mindig visszavezethető. Ez esetek közül az elsőben kimutatom, hogy a singularitások összege valóban singuláris helye a HURWITZ-féle compositiónak. Bemutatom továbbá a HURWITZ-tétel egyszerű alkalmazását annak az eldöntésére, hogy a convergentia-kör megadott helye singuláris hely-e? A HURWITZ-féle compositiónak kettőnél több függvényre való általánosítása és többszörös integrálokból való előállítása után következik olyan új fajta sorok vizsgálata, melyek együtthatói a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$ együtthatóiból alakulnak a következő processussal: az $\frac{1}{x^{n+1}}$ együtthatója

$$A_n = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_p!} \begin{vmatrix} a_{i_1}, & a_{i_1+1}, & a_{i_1+2}, & \dots & a_{i_1+p-1} \\ a_{i_2+1}, & a_{i_2+2}, & a_{i_2+3}, & \dots & a_{i_2+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i_p+p-1}, & a_{i_p+p}, & \dots & a_{i_p+2p-2} \end{vmatrix}.$$

($i_1 + i_2 + \dots + i_p = n$)

Az így készített $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{n+1}}$ által értelmezett függvényről kimutatjuk, hogy nem lehet más singularitása, mint a $\sum \frac{a_n}{x^{n+1}}$ singularitásainak p tagú összege, továbbá, hogy ha a_1, a_2, \dots k_1 -szeres, k_2 -szeres stb. polusai az eredeti függvénynek, akkor $l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots$ a származtatottnak nem lehet polusa, ha valamelyik $l_i > k_i$ és $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m$ a származtatott függvénynek egyszerű polusa, ha $p = k_1 + k_2 + \dots + k_m$. És végül ha az eredeti sor convergentia-körén csupa polus van, akkor ez

új sorok együttthatóiból kriteriumot állapítunk meg arra, hogy a polusok maximális rendszáma egy megadott k szám.

I. Az Hadamard-féle compositio.

1. *Hadamard tétele a singularitások összetételére vonatkozólag.*

A szóban forgó tétel a következő:

Ha $f(x)$ analitikai függvényt az $x=c$ reguláris hely környezetében az

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_n (x-c)^n$$

és $\varphi(x)$ -et a

$$\varphi(x) = \sum_0^{\infty} b_n (x-c)^n$$

hatványsorok állítják elő, akkor a kettőből alkotott:

$$\sum a_n b_n (x-c)^n$$

olyan $\psi(x)$ analitikai függvény ága, melynek nem lehet más singularitása, mint az $f(x)$ és $\varphi(x)$ egy-egy singularitásának a szorzata. Megjegyezzük, hogy ilyen általánosságban a tétel csakis abban az esetben érvényes, midőn az $f(x)$ és $\varphi(x)$ singularitásai izoláltak. Csakis ilyen esetekre szorítkozunk, bár a tételek nagy része más esetekben is érvényes.

Egyszerűség kedvéért legyen $c=0$, továbbá a $\sum a_n x^n$ által értelmezett analitikai függvény singularitásai: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, és $|\alpha_1| = r$ -nél kisebb abszolút értékű nincsen. Épen így a $\sum b_n x^n$ által értelmezett függvény singuláris helyei: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$, és $|\beta_1| = \rho$ -nál kisebb abszolút értékű nincsen és legyen $r \leq \rho$.

Ekkor a $\sum a_n x^n$ hatványsor convergentia-körének radiusa: r , a $\sum b_n x^n$ -é pedig ρ , és miként egyszerűen kimutatható, a convergentia-kör radiusának CAUCHY-HADAMARD-féle meghatározási módjával: a $\sum a_n b_n x^n$ hatványsor convergentia-körének radiusa legalább is: $r\rho$.

Ha az O középpontú $r\rho$ sugarú körben egy tetszésszerű T tartományt jelölünk meg (például: a $\theta r\rho$ sugarú kört, a hol $0 < \theta < 1$

és θ tetszésszerinti kevéssel tér el az 1-től) és x e tartomány tetszésszerinti belső helye, továbbá az O középpontból a θr sugárral a C kört rajzoljuk meg, akkor, ha z ezt a C kört futja be: az $\frac{x}{z}$ mindenesetre az O közepű, ϱ sugarú körön belül marad, mert hiszen:

$$\left| \frac{x}{z} \right| < \frac{\theta r \varrho}{\theta r} = \varrho.$$

Így tehát a

$$\varphi\left(\frac{x}{z}\right) = \sum b_n \left(\frac{x}{z}\right)^n$$

egyenletesen összetartó, ha x a T tartományban és z a C görbén van.

Szorozzuk meg $\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ -t $\frac{f(z)}{z}$ -vel és integráljunk a C görbe mentén:

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \varphi\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z}.$$

Az integrálást az előbbi megjegyzés szerint tagonként is elvégezhetjük. Ha tekintetbe vesszük, hogy $r \leq \varrho$, vagyis azt, hogy a C görbén belül $f(z)$ reguláris, és ennek megfelelően:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = a_n,$$

akkor arra jutunk, hogy

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \varphi\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z} = \sum a_n b_n x^n$$

mindazokra az x -ekre nézve, melyek a T tartományban vannak.

A C görbéről tudjuk, hogy az a_i helyek mind kívül vannak és az $\frac{x}{\beta_k}$ helyek mind a belsejébe esnek. Az utóbbi állítás abból következik, hogy:

$$\left| \frac{x}{\beta_k} \right| < \frac{\theta r \varrho}{\varrho} = \theta r.$$

Az $I(x)$ integrál az x analitikai függvénye minden tartományban, mely az $a_i \beta_k$ pontokat nem tartalmazza. E tétel bizo-

nyítására a legegyszerűbb utat követi MONTEL,¹ a ki LEBESGUE egyik tételének felhasználásával bizonyítja be ezt az állítást. Ha ugyanis T egy ilyen tartomány (mely például egy igen nagy, O középpű körből a függvénytanban szokásos módon az $\alpha_i\beta_k$ pontok kirekesztése után fenmaradó egyszerűen összefüggő tartományból áll), akkor ehhez mindig alkotható olyan C integrációs görbe, melyen az α_i pontok kívül vannak és az $\frac{x}{\beta_k}$ pontok mind belül esnek, akárhol legyen is x a T tartományban. Ez a bizonyítás alapgondolata. Ha a T tartomány az analysis situs értelmében összevonható az előbbi C körbe, a nélkül, hogy a határvonalat az $\alpha_i\beta_k$ pontokon — és az integrandusnak rendszerint egy másik singuláris helyét alkotó O ponton — át kellene húzni, akkor az $I(x)$ a régebbi C görbementi integrálással nyert $I(x)$ -nek, mely a $\sum a_n b_n x^n$ hatványsor által volt előállítva, analitikai folytatása. Ez az összevonás mindig elvégezhető, ha a T tartomány teljesen a $\sum a_n b_n x^n$ által előállított — esetleg többértékű — függvény RIEMANN-féle felületének első lapján van, de nem mindig végezhető, ha a T nem az első lapon van. Ekkor ugyanis a C -nek az O pontot körülvevő körbe való összevonása rendszerint csakis a RIEMANN-felület valamely — nem első — lapjának O pontján át lehetséges. E viszonyra tüzetesebben először FABER utalt rá.²

2. Az HADAMARD-féle *compositio distributiv volta*.

Az HADAMARD-féle $I(x)$ integrál alakjából azonnal következik annak distributiv volta; ha ugyanis

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x); \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

ahol $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ az x analitikai függvényei, melyeknek nincsenek más singularitásai, mint az $f(x)$, illetőleg $\varphi(x)$ -nek, akkor

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x),$$

a hol

¹ MONTEL: Leçons sur les séries des polynomes, p. 34.

² FABER: Bemerkungen zu einem functionentheoretischen Satze des Herrn HADAMARD. Jahresberichte der deutschen Mathem. Vereinigung, XVI. p. 285.

$$I_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c f_1(x) \varphi_1\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z},$$

$$I_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c f_1(x) \varphi_2\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z},$$

.

Ismeretes, hogy $f(x)$ mindig előállítható $f_1(x) + f_2(x)$ alakban, ahol $f_1(x)$ -nek egyetlen egy singuláris helye α_1 és $f_2(x)$ -nek α_1 már nem singuláris helye. Ez az előállítás egyértékű analitikai függvények esetében a MITTAG-LEFFLER-féle analitikai előállításból következik, az általános esetben pedig — szintén izolált singuláris helyek esetében — FABER-től származik.¹

Ha feltesszük, hogy $\alpha_i \beta_k$ csak egyféleképpen keletkezik, vagyis, hogy

$$\alpha_i \beta_k = \alpha_i \beta_l$$

csakis akkor lehetséges, ha $i = j$, $k = l$, akkor a $\sum a_n b_n x^n$ által előállított függvény viselkedése az $\alpha_i \beta_k$ helyen ama részek által teljesen jellemezve van, a melyeknek singuláris helyei csakis α_i , illetőleg β_k . Ha ugyanis

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

ahol $f_1(x)$ -nek egyetlen singuláris helye α_i és $f_2(x)$ az α_i helyen reguláris, és $\varphi_1(x)$ egyetlen singuláris helye β_k és $\varphi_2(x)$ a β_k helyen reguláris, akkor $H[f, \varphi]$ -vel jelölve az f és φ -re vonatkozó $I(x)$ integrált az f és φ függvények HADAMARD-féle compositióját,

$$H[f, \varphi] = H[f_1, \varphi] + H[f_1, \varphi_2] + H[f_2, \varphi_1] + H[f_2, \varphi_2];$$

és az HADAMARD-tétel szerint $\alpha_i \beta_k$ csakis az elsőnek lehet singuláris helye.

3. Az HADAMARD *compositio* PINCHERLE-féle alakja. Az HADAMARD-tétel bizonyítása a distributív elv alapján — egyelőre véges számú singularitas esetében — a PINCHERLE² által kö-

¹ FABER: Über analytische Functionen mit vorgeschriebenen Singularitäten. Math. Annalen, 60. p. 379.

² PINCHERLE: A proposito di un recente teorema del Sign. HADAMARD. Rendiconti della R. Accademia delle scienze di Bologna, 1899.

vetett út némi egyszerűsítésével és a PINCHERLE-féle operációs calculus mellőzésével a következőképpen végezhető.

Először is megjegyezzük, hogy a tétel bizonyítása redukálható arra az egyszerű esetre, midőn $f(x)$ -nek és $\varphi(x)$ -nek — melyeket a 0 hely környezetében $\Sigma a_n x^n$ és $\Sigma b_n x^n$ hatványsorok állítanak elő — az a , illetőleg a β egyetlen singuláris helyük; ekkor $\Sigma a_n b_n x^n$ -nek nem lehet más singuláris helye, mint az $a\beta$.

Még egy lépéssel egyszerűsíthető a kérdés, ha az adott sorok helyett a $\Sigma a_n a^n x^n$ és $\Sigma b_n \beta^n x^n$ sorokat választjuk, melyeknek egyetlen singularitása az 1 és kimutatjuk, hogy a $\Sigma a_n b_n (a\beta)^n x^n$ által előállított analitikai függvénynek az 1-en kívül a végesben singularitása nem lehet. Egyszerűség kedvéért tehát tegyük fel, hogy a $\Sigma a_n x^n$ és $\Sigma b_n x^n$ értelmezte analitikai függvényeknek az 1 hely az egyetlen singuláris helyük és mutassuk meg, hogy a $\Sigma a_n b_n x^n$ HADAMARD-féle compositionának más singuláris helye nem lehet, mint az 1.

E végből az a_n -et a véges különbségekre vonatkozó ismeretes eljárás szerint előállítjuk a következő alakban:

$$a_n = a_0 + \binom{n}{1} \Delta a_0 + \dots + \binom{n}{n} \Delta^n a_0;$$

$$\text{a hol } \Delta^k a_0 = a_k - \binom{k}{1} a_{k-1} + \binom{k}{2} a_{k-2} - \dots + (-1)^k a_0.$$

Ebből azután, minthogy a kettős sorok átrendezésére vonatkozó WEIERSTRASS-féle feltétel az alábbi esetekben, miként a tárgyalásból kitűnik, teljesítve van, tehát:

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty a_n b_n x^n &= \sum_0^\infty \left[a_0 + \binom{n}{1} \Delta a_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_0 + \dots + \binom{n}{n} \Delta^n a_0 \right] b_n x^n \\ &= a_0 \sum_0^\infty b_n x^n + \Delta a_0 \sum_1^\infty n b_n x^n + \frac{\Delta^2 a_0}{2} \sum_2^\infty n(n-1) b_n x^n + \\ &+ \frac{\Delta^3 a_0}{3!} \sum_3^\infty n(n-1)(n-2) b_n x^n + \dots \\ &= a_0 \varphi(x) + \Delta a_0 x \varphi'(x) + \frac{\Delta^2 a_0}{2} x^2 \varphi''(x) + \frac{\Delta^3 a_0}{3!} x^3 \varphi'''(x) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{\Delta^k a_0}{k!} x^k \varphi^{(k)}(x). \end{aligned} \quad A)$$



Tegyük fel, hogy $f(x)$ -nek az 1 hely polusa, vagy lényeges singuláris helye. (Ez utóbbi esetet a 6. pontban tárgyaljuk.)

Ha az 1 például p -edrendű polus, akkor $f(x)$ LAURENT-sorának csak ez a része jön tekintetbe:

$$\frac{A_0}{(1-x)^p} + \frac{A_1}{(1-x)^{p-1}} + \dots + A_p,$$

mert a LAURENT-sor másik része a singularitásra befolyással nincsen. Ha ezt a főrészt az x hatványai szerint kifejtjük, látjuk, hogy x^n együtthatója:

$$a_n = A_0 \binom{p+n-1}{p-1} + A_1 \binom{p+n-2}{p-2} + \dots + A_{p-1} = \phi_{p-1}(n),$$

vagyis n -nek $p-1$ -ed fokú racionális egész függvénye, tehát

$$\Delta^k a_0 = 0,$$

ha $k > p-1$ és így a véges számú tagból álló A alatti

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\Delta^k a_0}{k!} x^k \varphi^{(k)}(x)$$

kifejezésnek nem lehet más singularitása, mint a $\varphi(x)$ -nek, vagyis: 1. Ez esetben ezen a PINCHERLE-féle alakon azonnal látható, hogy 1 valóban singuláris hely. Ugyanis, ha az 1 nem volna singuláris hely, akkor:

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\Delta^k a_0}{k!} x^k \varphi^{(k)}(x) = F(x)$$

függvénynek a végesben nem volna singuláris helye, vagyis $F(x)$ transcendens egész függvény volna. Ezt az egyenletet azonban $\varphi(x)$ -re $p-1$ -edrendű lineáris differenciálegyenletnek tekinthetjük, melynek együtthatóinak ha t. i. $\varphi^{(p-1)}(x)$ együtthatójával végig osztunk] nincs más singuláris helyük, mint 0 és így e differenciálegyenletek általános elméletéből következik, hogy $\varphi(x)$ -nek sem lehet más singuláris helye, mint 0, tehát 1 nem volna a $\varphi(x)$ -nek singuláris helye, a mi pedig feltevésünkkel ellentézik.

Következik tehát, hogy $F(x)$ -nek, vagyis az $f(x)$ és $\varphi(x)$

HADAMARD-féle compositiójának az 1 hely okvetlenül singuláris helye, ha az egyiknek az 1 hely polusa volt. Ha tehát $f(x)$ -nek α a polusa, akkor $\alpha\beta$ a $H(f, \varphi)$ -nek okvetlenül singuláris helye, ha β a $\varphi(x)$ -nek singuláris helye (ha $\alpha\beta$ szorzat csak egyféleképpen keletkezhetik). Ez az állítás akkor is igaz, ha a singuláris helyek száma nem véges; ugyanis $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ és $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ alakban írhatók, a hol $f_1(x)$ -nek α és $\varphi_1(x)$ -nek β egyetlen singularitásuk és $f_2(x)$ -nek α , $\varphi_2(x)$ -nek β már nem singularitása. Az HADAMARD-tétel 1. pont alatt vázolt bizonyításából következik, hogy $H(f_2, \varphi_1)$, $H(f_1, \varphi_2)$, $H(f_2, \varphi_2)$ compositióknak $\alpha\beta$ nem lehet singularitásuk; a $H(f_1, \varphi_1)$ -nek pedig az iménti bizonyítás szerint $\alpha\beta$ okvetlenül singularitása.

Ha α az $f(x)$ -nek p -edrendű, a β pedig $\varphi(x)$ -nek q -adrendű polusa, akkor $F(x)$ alakjából következik, hogy $\alpha\beta$ az HADAMARD-féle compositiónak $p + q + 1$ -edrendű polusa.

4. Egyetlen lényeges singuláris hely kritériuma.

Ha 1 az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ egyértékű analitikai függvény egyetlen, és pedig lényeges singuláris helye, akkor LAURENT-sorfejtése:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(x-1)^n};$$

vagy téve $\frac{1}{x-1} = u$, a jobboldalon álló $\sum c_n u^n$ az u transcendens egész függvénye. De ekkor nyilván az $u+1$ -nek is transcendens egész függvénye, tehát:

$$f(x) = \sum C_n (u+1)^n,$$

a hol $\lim \sqrt[n]{C_n} = 0$. De $u+1 = \frac{x}{x-1}$, tehát:

$$f(x) = \sum D_n \frac{x^n}{(1-x)^n},$$

a hol $D_n = (-1)^n C_n$ és $\lim \sqrt[n]{D_n} = 0$. A jobboldalon álló függvénysor a WEIERSTRASS-féle kettős-sor tétel szerint x hatványsorába fejthető, a miből következik:

$$a_{n+1} = D_n + \binom{n}{1} D_{n-1} + \binom{n}{2} D_{n-2} + \dots + D_0.$$

Ezekből az egyenletekből a véges különbségek elmélete szerint következik, hogy:

$$D_{n-1} = a_n - \binom{n}{1} a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} \cdots + (-1)^n a_0 = \Delta^n a_0;$$

tehát ha 1 az egyetlen singuláris helye az egyértékű $f(x)$ -nek, akkor:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Delta^n a_0} = 0.$$

Ha még a végtelenben levő esetleges singuláris helyet is tekintetbe vesszük, akkor a tételt így fejezhetjük ki: Ha a végesben a $\Sigma a_n x^n$ egyértékű analitikai függvénynek 1 az egyetlen singuláris helye, akkor

$$a_n = a'_n + a''_n$$

alakban állítható elő, a hol $\lim \sqrt[n]{a'_n} = 0$ (vagyis $\Sigma a'_n x^n$ transzcendens egész függvény) és

$$\lim \left[a''_n - \binom{n}{1} a''_{n-1} + \binom{n}{2} a''_{n-2} + \cdots + (-1)^n a''_0 \right]^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Fordítva: ha $\lim \sqrt[n]{\Delta^n a_0} = 0$, [de végtelen sok $\Delta^n a_0 \neq 0$], akkor $\Sigma a_n x^n$ -ben a véges különbségek szerint:

$$a_n = a_0 + \binom{n}{1} \Delta a_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_0 + \cdots + \binom{n}{n} \Delta^n a_0$$

téve, $f(x)$ előállítható a

$$\Sigma C_n \frac{x^n}{(x-1)^{n+1}}$$

alakban, a hol $C_n = (-1)^n \Delta^n a_0$, tehát $(x-1) f(x)$ az $\frac{x}{x-1}$ -nek és így az $\frac{1}{x-1}$ -nek is transzcendens egész függvénye, vagyis valóban 1 az egyetlen, és pedig lényeges singuláris helye és $f(x)$ egyértékű. Ez a kriterium LE ROY-tól származik.¹

5. A LE ROY-féle feltétel átalakítása.

Megállapítottuk, hogy ha $f(x) = \Sigma a_n x^n$ egyértékű analitikai

¹ LE ROY: Sur les séries divergentes etc. Annales de Toulouse, 1901.

függvény, akkor annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy 1 az egyetlen singuláris helye legyen, az, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^n a_0)^{\frac{1}{n}} = 0$.

Most ezzel æquivalens feltételt állapítunk meg.

Legyen adva a $\sum a_n x^n$ hatványsor. Mindig található olyan $G(z)$ transcendens egész függvény, mely a

$$G(\nu) = a_\nu; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

egyenleteket kielégíti. Ezt a közönséges véges interpolációs tétele végtelenre kiterjesztő állítást egyszerű megfontolással láthatjuk be. Mindjárt valamivel általánosabban is fogalmazzuk. Legyenek adva a

$$c_0, c_1, c_2, \dots$$

különböző helyek, melyek a végesben nem sűrűsödnek, és keressük azt a $G(z)$ transcendens egész függvényt, a melyre nézve

$$G(c_i) = a_i; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Először megalkotjuk WEIERSTRASS eljárásával azt a transcendens egész függvényt, melynek egyszerű 0 helyei: $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$

Legyen ez $\bar{G}(z)$. Akkor $\frac{\bar{G}(z)}{z - c_i}$ szintén transcendens egész függvény, mely a c_i helyen nem 0. Legyen a c_i helyen ennek értéke $\bar{G}'(c_i) = A_i$. Most megalkotjuk MITTAG-LEFFLER eljárásával azt a $\phi(z)$ meromorph függvényt, melynek egyszerű polusai: c_0, c_1, c_2, \dots és melynél a c_i -hez tartozó residuum: $\frac{a_i}{A_i}$, úgy, hogy c_i hely környezetében:

$$\phi(z) = \frac{a_i}{A_i(z - c_i)} + \psi(z),$$

a hol $\psi(z)$ a c_i helyen reguláris. Ez a szorzat: $\bar{G}(z) \phi(z)$ transcendens egész függvény és c_i helyen értéke: a_i . Ezzel a szóbanforgó állítást igazoltuk.¹

Legyenek az a_i számok a hatványsor együtthatói és egy-

¹ FEJÉR LIPÓT l. t. barátomtól értesülök, hogy HURWITZ ugyanilyen módon állította elő azt a transcendens egész függvényt, mely a megadott c_i helyeken a megadott a_i értékeket veszi fel.

szerűség kedvéért $a_0 = 0$ és $G(z)$ olyan transzcendens egész függvény, melyre nézve:

$$G(\nu) = a_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Legyen:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k,$$

akkor:

$$\begin{aligned} J^n a_0 &= G(n) - \binom{n}{1} G(n-1) + \binom{n}{2} G(n-2) - \dots \pm G(1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k n^k - \binom{n}{1} \sum_{k=0}^{\infty} g_k (n-1)^k + \binom{n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} g_k (n-2)^k - \dots \pm \sum_{k=0}^{\infty} g_k, \end{aligned}$$

és minthogy $\sum g_k z^k$ transzcendens egész függvény, tehát ez a kifejezés átrendezhető ebbe az alakba:

$$\begin{aligned} J^n a_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k \left[n^k - \binom{n}{1} (n-1)^k + \binom{n}{2} (n-2)^k - \binom{n}{3} (n-3)^k + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} n \cdot 1^k \right]. \end{aligned}$$

A zárójelben álló kifejezés így értelmezhető: Legyen:

$$\varphi(x) = (e^x - 1)^n = e^{nx} - \binom{n}{1} e^{(n-1)x} + \binom{n}{2} e^{(n-2)x} - \dots + (-1)^n,$$

akkor

$$\begin{aligned} [\varphi^{(k)}(x)]_{x=0} &= D^k (e^x - 1)^n_{x=0} = \\ &= n^k - \binom{n}{1} (n-1)^k + \binom{n}{2} (n-2)^k - \dots + (-1)^{n-1} n \cdot 1^k, \end{aligned}$$

és ebből azonnal látjuk, hogy ha $k < n$, akkor:

$$n^k - \binom{n}{1} (n-1)^k + \binom{n}{2} (n-2)^k - \dots = 0,$$

ha pedig $k = n$, akkor ez a kifejezés: $n!$ és minden esetben pozitív, mert hiszen $e^x - 1$ minden együtthatója pozitív. Így tehát:

$$J^n a_0 = \sum_{k=0}^{\infty} g_k [D^k (e^x - 1)^n]_{x=0}.$$

Ha feltesszük, hogy elég nagy r -től kezdve mindig:

$$|G(re^{i\theta})| < e^{er},$$

akárminő kicsiny is a pozitív ε , vagyis, hogy a $G(z)$ a PRINGS-HEIM-féle nomenclatura szerint minimális típusú és rangja: 1, akkor POINCARÉ-, illetőleg HADAMARD-nak a transcendens egész függvényre vonatkozó tételei szerint:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! |g_n|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

vagyis elég nagy k -tól kezdve

$$|g_k| < \frac{\varepsilon^k}{k!};$$

és így a fenti egyenletből:

$$|A^n u_0| < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{[D^{(k)}(e^x - 1)^n]_{x=0}}{k!} \cdot \varepsilon^k,$$

vagyis:

$$|A^n u_0| < (e^\varepsilon - 1)^n;$$

és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A^n u_0|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha $G(z)$ transcendens egész függvény, melyre nézve $|G(re^{i\theta})| < e^r$, bármilyen kis pozitív szám is az ε , ha csak r elég nagy és $0 \leq \theta \leq 2\pi$ és $a_k = G(k)$, akkor a $\sum a_k x^k$ hatványsor által előállított függvény egyértékű és egyetlen singuláris helye: 1.

A tétel ebben az alakjában LEAU-tól származik,¹ a ki erre egészen más uton jutott. A tétel megfordítása is helyes, vagyis: ha az $f(x) = \sum a_n x^n$ egyértékű analitikai függvénynek egyetlen singuláris helye az 1, akkor létezik olyan $G(z)$ transcendens egész függvény, mely azzal a tulajdonsággal bír, hogy ha ε tetszőszerinti kis pozitív szám, minden, elég nagy r -re nézve:

$$|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}; \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

és

$$G(\nu) = a_\nu; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Ez állítás bizonyításához nem kell egyéb, mint a véges különbségekre vonatkozó ismeretes formulát kiterjeszteni a végtelenre. Ugyanis ez a végtelen függvény-sor:

¹ LEAU: Recherche des singularités etc. Journal de Mathématiques, 1899.

$$G(z) = a_0 + \Delta a_0 z + \frac{\Delta^2 a_0}{2} z(z-1) + \frac{\Delta^3 a_0}{3!} z(z-1)(z-2) + \dots$$

az esetben, ha $\Sigma a_n x^n$ -nek 1 az egyetlen singuláris helye: transcendens egész függvény, mert $\lim \sqrt[n]{\Delta^n a_0} = 0$, és bárminő nagy T tartományt válasszunk is ki, melynek maximális távolsága a kezdőponttól ϱ , áll:

$$\left| \binom{z}{k} \right| = \left| \left(\frac{z+1}{k} - 1 \right) \left(\frac{z+1}{k-1} - 1 \right) \left(\frac{z+1}{k-2} - 1 \right) \dots \left(\frac{z+1}{1} - 1 \right) \right| < (\varrho+2)^k,$$

tehát:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\Delta^k a_0 \binom{z}{k} \right]^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $G(z)$ transcendens egész függvény. A $G(\nu) = a$, egyenletek ki vannak elégitve, mert a véges különbségek elmélete szerint:

$$a_\nu = a_0 + \binom{\nu}{1} \Delta a_0 + \binom{\nu}{2} \Delta^2 a_0 + \dots + \binom{\nu}{\nu} \Delta^\nu a_0.$$

Végül, ha $|z| < \varrho$,

$$|G(z)| < |a_0| + \left| \Delta a_0 \binom{\varrho}{1} \right| + \left| \Delta^2 a_0 \binom{\varrho+1}{2} \right| + \left| \Delta^3 a_0 \binom{\varrho+2}{3} \right| + \dots;$$

és ha adatik a pozitív ε , elmehetünk n -nel oly messzire, hogy $|\Delta^n a_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, a hol $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$;

$$\text{tehát} \quad |G(z)| < \psi(\varrho) + \frac{1}{(1-\eta)^\varrho},$$

a hol $\psi(\varrho)$ $n-1$ -edfokú racionális egész függvénye a ϱ -nak. ϱ legyen olyan nagy, hogy $\psi(\varrho) < e^{\eta\varrho}$, a mi mindig lehetséges, mert $\psi(\varrho)$ racionális egész függvény] és még

$$\frac{\log 2}{\varrho} < \frac{\eta^2}{2(1-\eta)}; \quad \text{és} \quad \frac{\log 3}{\varrho} < \eta;$$

ekkor tehát mint egyszerű számítással adódik:

$$\begin{aligned} |G(z)| &< \psi(\varrho) + \frac{1}{(1-\eta)^\varrho} < e^{\eta\varrho} + e^{-\varrho \log(1-\eta)} < \\ &< 3e^{\eta\varrho} < e^{\varrho \left[\eta + \frac{\log 3}{\varrho} \right]} < e^{\varrho\eta}, \end{aligned}$$

vagyis $G(z)$ valóban minimális típusu, melynek növekedése $e^{\rho z}$ -nél alacsonyabb.¹

6. A HADAMARD-tétel bizonyítása egyetlen lényeges singuláris hely esetében.

Visszatérve az HADAMARD-féle compositio PINCHERLE-féle alakjára, vagyis a

$$H[f, \varphi] = \sum_0^{\infty} \frac{J^k a_0}{k!} x^k \varphi^{(k)}(x)$$

alakjára, kimutatjuk, hogy ennek csakis 1 lehet a singuláris helye, ha $f(x) = \sum a_n x^n$ egyértékű analitikai függvény, melynek nincs más singularitása, mint 1 és $\varphi(x)$ -nek is csak ez az egy singuláris helye van (de $\varphi(x)$ nem okvetlenül egyértékű). E végből csak azt kell kimutatnunk, hogy a

$$F(x) = \sum_0^{\infty} \frac{J^k a_0}{k!} x^k \varphi^{(k)}(x)$$

függvénysor minden olyan tartományban, mely az 1-et nem tartalmazza, reguláris. Rajzoljunk az O körül, mint középpont körül egy tetszésszerinti nagy R sugárral kört és vegyük körül az 1 helyet egy tetszésszerinti kis körrel, melytől a nagy körig két egymáshoz elég közel levő vonalat húzunk. Az ilyen módon készített c kerületű egyszerűen összefüggő tartományban jelöljünk meg egy tetszésszerinti egyszerűen összefüggő tartományt T -t, melynek az előbbi tartomány határaitól való minimális távolsága legyen $\rho > 0$. A c görbén legyen $|\varphi(z)| < 2\pi M$. Ha x a T tartomány bármely helye, akkor $|x| < R$ és

$$\left| \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z)}{(z-x)^{k+1}} dz \right| < \frac{ML}{\rho^{k+1}};$$

a hol L a c görbe hossza. Minthogy $\lim \sqrt[k]{J^k a_0} = 0$, $|\sqrt[k]{J^k a_0}| < \varepsilon$, ha ε tetszésszerinti kis pozitív szám és k elég nagy és így az $F(x)$ majoransa (bizonyos n -től kezdődően)

¹ L. FABER: Ueber die Fortsetzbarkeit gewisser Taylor'scher Reihen. Math. Annalen, 57. (1903), p. 379.

$$\sum M L \varepsilon^k \frac{R^k}{\rho^{k+1}}$$

convergens, az $F(x)$ -et előállító végtelen függvénysor a T tartományban egyenletesen összetartó, tehát $F(x)$ reguláris. Ezzel kimutattuk, hogy az f és φ HADAMARD-féle compositiójának más singularitása nem lehet, mint 1, ha $f(x)$ -nek az 1 hely egyedüli lényeges singuláris helye és $\varphi(x)$ -nek az 1 hely tetszés szerinti, de egyedüli (végesben levő) singularitása.

Az $F(x)$ kifejezése a $\varphi(x)$ -nek végtelen-rendű lineáris differentiálalakja. Erről minden valószínűség szerint a fennálló feltételek mellett éppen úgy, mint polus esetében tettük, megmutatható lesz, hogy ha $F(x)$ -nek 1 nem volna singuláris helye, akkor $\varphi(x)$ -nek sem lehetne singuláris helye az 1, vagyis hogy az 1 hely az $f(x)$ és $\varphi(x)$ HADAMARD-féle compositiójának tényleg singuláris helye, ha legalább az egyik componensnek lényeges singuláris helye. Ezt a tényt más úton FABER¹ már kimutatta.

7. Egyetlen elágazási hely kriteriuma.

Tegyük fel, hogy az 1 hely, mely az $f(x)$ -nek egyetlen singuláris helye, elágazási hely.

Keressünk erre az együtthatókból olyanféle kriteriumot, mint a milyen a lényeges singuláris helyre vonatkozó LE ROY-féle kriterium.

$$\text{Az} \quad x = -\log(1-z)$$

a $\log(1-z)$ RIEMANN-féle felületét (az $1 \cdots \infty$ mentén összefűzött végtelen sok levelű felületet) leképezi az x -síkra úgy, hogy a $z = 1$ -nek valamint a $z = \infty$ -nek az x -sík végtelen pontja felel meg. Ha tehát az

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

függvénynek egyetlen singuláris helye volt a $z = 1$, akkor az $x = -\log(1-z)$, vagy a vele æquivalens:

$$z = 1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

¹ FABER: Jahresberichte I. c.

transformatio átviszi az $f(z)$ -t az $F(x) = \sum A_n x^n$ -be, melynek a végesben singuláris helye nincsen, tehát transcendens egész függvény. Ha már most $\lim \sqrt[n]{A_n} a_0 = 0$ nem áll fenn, de $\lim \sqrt[n]{A_n} = 0$, akkor az $f(z)$ -nek a $z = 1$ hely egyetlen singuláris helye, még pedig *elágazási helye*.

Hogy könnyen kezelhető feltételhez jussunk, állítsuk elő $1 - e^{-x}$ pozitív egész hatványait. Legyen:

$$(1 - e^{-x})^n = B_n^{(n)} x^n + B_{n+1}^{(n)} x^{n+1} + B_{n+2}^{(n)} x^{n+2} + \dots$$

$$\begin{aligned} B_{n+k}^{(n)} &= \frac{1}{(n+k)!} \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} (1 - e^{-x})_{x=0}^n = \frac{D^{n+k} (1 - e^{-x})_{x=0}^n}{(n+k)!} = \\ &= \frac{(-1)^k}{(n+k)!} \left[n^{n+k} - \binom{n}{1} (n-1)^{n+k} + \binom{n}{2} (n-2)^{n+k} + \dots \right]. \end{aligned}$$

A zárójelben álló kifejezés, melylyel már találkozunk (l. a 14. lapon), nem más, mint x^{n+k} n -ik véges különbsége az $x=0$ -nál, vagyis: $[J^{(n)} x^{n+k}]_0$ vagy röviden: $\Delta^n 0_{n+k}$. Így tehát:

$$\begin{aligned} A_n &= a_n B_n^{(n)} + a_{n-1} B_n^{(n-1)} + a_{n-2} B_n^{(n-2)} + \dots + a_1 B_n^{(1)} \\ &= J^{(n)} \left[a_n \frac{(1 - e^{-x})^n}{n!} + a_{n-1} \frac{(1 - e^{-x})^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + a_1 (1 - e^{-x}) \right]_{x=0} \\ &= (-1)^n \left[a_n \frac{\Delta^n 0^n}{n!} + a_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} 0^n}{(n-1)!} + a_{n-2} \frac{\Delta^{n-2} 0^n}{(n-2)!} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Így tehát annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\sum a_n z^n$ -nek 1 legyen a végesben az egyetlen elágazási helye, az, hogy $(\Delta^n a_0)^{\frac{1}{n}}$ limese ne legyen 0, ellenben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n B_n^{(n)} + a_{n-1} B_n^{(n-1)} + \dots + a_1 B_n^{(1)}]^{\frac{1}{n}} = 0$$

legyen.

8. Az *Hadamard-tétel egyetlen elágazási pont esetében*. Legyen $f(z) = \sum a_n z^n$ -nek 1 egyetlen singularitása, és pedig elágazási helye; $\varphi(z) = \sum b_n z^n$ -nek is 1 az egyetlen singularitása. Ha z helyett $1 - e^{-x}$ -et teszünk és x hatványai szerint kifejtünk, akkor

$$\sum a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$$

alakra jutunk, vagyis:

$$\sum a_n z^n = \sum A_n [\log(1 - z)]^n,$$

a hol $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 0$. Ha tesszük:

$$\log(1-z)^n = C_n^{(n)} z^n + C_{n+1}^{(n)} z^{n+1} + C_{n+2}^{(n)} z^{n+2} + \dots,$$

akkor:

$$a_n = [A_n C_n^{(n)} + A_{n-1} C_n^{(n-1)} + A_{n-2} C_n^{(n-2)} + \dots].$$

Ebből az HADAMARD-féle compositio ebbe az alakba hozható:

$$\Sigma a_n b_n z^n = \Sigma A_n [C_n^{(n)} b_n z^n + C_{n+1}^{(n)} b_{n+1} z^{n+1} + C_{n+2}^{(n)} b_{n+2} z^{n+2} + \dots].$$

A zárójelben álló kifejezés nem más, mint a

$$\log(1-z)^n \text{ és } \Sigma b_n z^n$$

HADAMARD-féle compositiója, amint természetes is, mert hiszen a distributiv elv szerint

$$H[f(z), \varphi(z)] = \Sigma H[A_n [\log(1-z)]^n, \varphi(z)].$$

A $[\log(1-z)]^n$ és $\varphi(z)$ HADAMARD-féle compositiója az integrál alakban:

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\log \left(1 - \frac{x}{z} \right) \right]^n \varphi(z) \frac{dz}{z}.$$

C görbe gyanánt egy tetszésszerű zárt görbét választhatunk, mely az 1-et nem zárja magába, például: az előbb használt T tartomány határvonalát. Legyen x e T tartományon belül levő T' tartomány tetszésszerű helye és $\left| \log \left(1 - \frac{x}{z} \right) \right|$ -nek maximuma, miközben

z a C görbén halad: $M, \frac{\varphi(z)}{z}$ -é pedig m , akkor a fenti integrál abszolút értéke kisebb, mint LmM^n , a hol L a C vonal hossza. Minthogy pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 0$, tehát $\Sigma A_n F_n(x)$ majoránsa, a $Lm \Sigma A_n M^n$ convergens és így a T' tartományban $\Sigma A_n F_n(x)$, az analitikai függvények egyenletesen convergens sora, vagyis mindenütt reguláris. Ezzel az HADAMARD-tétel arra az esetre is ki van mutatva, midőn az 1 hely az $f(x)$ egyetlen elágazási helye és $\varphi(x)$ -nek is 1 hely az egyetlen singularitása.

II. Az Hadamard-tétel néhány alkalmazása.

1. Az állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak jellemzése.

Legyen adva a következő differenciálegyenlet:

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0,$$

a hol a_0, a_1, \dots, a_n állandók. Ha egymásután differenciálunk, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$a_0 y^{(n+k)} + a_1 y^{(n+k-1)} + \dots + a_n y^{(k)} = 0; \quad k=0, 1, 2, \dots$$

és az integrálnak az $x=0$ helyen vett differenciálhányadosai eleget tesznek ennek az egyenletrendszernek:

$$a_0 y_0^{(n+k)} + a_1 y_0^{(n+k-1)} + \dots + a_n y_0^{(k)} = 0, \quad (1)$$

a mely egyenletrendszerből az $y^{(m)}$ differenciálhányadosok kezdőértékei recurrens módon határozhatók meg. Az $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ tetszőesszerűek. A recurrens sorok elméletéből következik, hogy az (1) egyenletrendszerből kiszámított $y_0^{(m)}$ oefficiensekkel alkotott

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_0^{(m)} x^m$$

hatványsor nem más, mint az

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0} \quad (2)$$

racionális függvény, ahol $\varphi(x)$ az x -nek $n-1$ -edfokú racionális egész függvénye: $k_{n-1} x^{n-1} + k_{n-2} x^{n-2} + \dots + k_0$, melynek együtthatói az $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ kezdőértékekből igen egyszerűen adódnak:

$$k_{n-1} = a_0 y_0, \quad k_{n-2} = a_0 y'_0 + a_1 y_0, \quad k_{n-3} = a_0 y''_0 + a_1 y'_0 + a_2 y_0, \dots$$

Az adott differenciálegyenlet integrálja, melynek a megadott kezdőértékei vannak:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y_0^{(m)} x^m}{m!},$$

tehát az $f(x)$ racionális függvénynek és az e^x -nek HADAMARD-féle compositiója. Ez az integrál tehát az HADAMARD-féle integrálalakban:

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{x}{z}} f(z) \frac{dz}{z},$$

ha C egy tetszőszerinti zárt görbe, mely a O pontot magába zárja, de az $f(z)$ singuláris helyei, vagyis az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

egyenlet $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ gyökei mind kívül vannak. Minthogy pedig e^z -nek nincs singularitása a végesben, tehát x a C helyet magában foglaló tetszőszerinti T tartományból való lehet, vagyis a fenti integrál a lineáris differentiális egyenlet integrálját az egész x -sikon előállítja. Ha z helyett $\frac{1}{u}$ -t tesszük, akkor a C görbe átmegy a C_1 invers görbébe, a mely az $\frac{1}{\beta_i} = a_i$ pontokat magába zárja; az HADAMARD-féle integrál pedig a következő lesz:

$$- \int_{C_1} e^{ux} f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u}.$$

Az integrandusban levő $f\left(\frac{1}{u}\right)$:

$$\frac{\frac{k_{n-1}}{u^{n-1}} + \frac{k_{n-2}}{u^{n-2}} + \dots + k_0}{\frac{a_n}{u^n} + \frac{a_{n-1}}{u^{n-1}} + \dots + a_0} \cdot \frac{1}{u} = \frac{k_0 u^{n-1} + k_1 u^{n-2} + \dots + k_{n-1}}{a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n};$$

és az $\frac{1}{\beta_i} = a_i$ gyökök nem mások, mint az

$$a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

alapegyenlet gyökei. A differentialegyenlet integrálja tehát:

$$y = \int_C e^{ux} \frac{k_0 u^{n-1} + k_1 u^{n-2} + \dots + k_{n-1}}{a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n} du,$$

a hol C az $a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_n = 0$ alapegyenlet gyökeit magába záró tetszésszerű görbe.

Ilyen módon tehát az HADAMARD-féle compositio közvetlenül rávezetett bennünket az állandó együtthatójú homogen lineáris differentiálegyenlet általános integráljának CAUCHY-féle integrálalakjára. De közvetlenül rájuthatunk az integrálok soralakjára is. Ha ugyanis a differentiálegyenlet:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

akkor az általános integrálja, miként láttuk: a (2) alatti $f(x)$ és e^x HADAMARD-féle compositiója, vagy, mivel e speciális compositióval behatóan BOREL foglalkozott, mondhatjuk: az $f(x)$ BOREL-féle associált függvénye,¹ a hol a számláló tetszésszerű $n-1$ -edfokú egész függvény. Az $f(x)$ -et partialis törtekre bontjuk. Legyenek az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

egyenlet gyökei: β_1, β_2, \dots , és pedig β_1 legyen p_1 -szeres, β_2 legyen p_2 -szeres... gyök; akkor:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_1}{x - \beta_1} + \frac{A_2}{(x - \beta_1)^2} + \dots + \frac{A_{p_1}}{(x - \beta_1)^{p_1}} + \\ & + \frac{B_1}{x - \beta_2} + \frac{B_2}{(x - \beta_2)^2} + \dots + \frac{B_{p_2}}{(x - \beta_2)^{p_2}} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Nyilván az $f(x)$ BOREL-féle associáltja a részlettörtekhez tartozó associáltak összege. E szerint tehát csak az

$$\frac{1}{(x - \beta)^m}$$

-hez tartozó associált függvényt kell meghatároznunk.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x - \beta)^m} = & \frac{(-1)^m}{\beta^m} \left\{ 1 + \binom{m}{1} \frac{x}{\beta} + \binom{m+1}{2} \left(\frac{x}{\beta} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \binom{m+2}{3} \left(\frac{x}{\beta} \right)^3 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

¹ BOREL: Séries divergentes, 1901. p. 96.

A zárójelben álló $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{x}{\beta}\right)^k$ associáltja így írható:

$$\frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k-1)(m+k-2)\dots(k+1)}{k!} \left(\frac{x}{\beta}\right)^k.$$

Az összeg jele alatti hatványsor nem más, mint

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{m+k-1}}{k! \beta^k} = x^{m-1} e^{\frac{x}{\beta}}$$

$(m-1)$ -ik differenciálhányadosa.

Az általános integrált megkapjuk, ha a (3) alatti $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ együttthatóknak, melyek száma $p_1 + p_2 + \dots = n$ (és melyek a k_0, k_1, \dots, k_{n-1} -gyel egyszerű lineáris módon függnek össze), tetszésszerű értékeket adunk. Particuláris integrált kapunk tehát, ha pl: $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ stb. egynek kivételével mind 0-ok. Iyen particuláris integrál tehát az imént meghatározott: $x^{m-1} e^{\frac{x}{\beta}}$ -ből $m-1$ -szeri differenciálással kiadódó. Ez integrál analitikai alakja:

$$e^{\frac{x}{\beta}} \cdot \left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{m-1} + (m-1) \binom{m-1}{1} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{m-2} + \dots + (m-1)(m-2) \binom{m-1}{2} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{m-3} + \dots + (m-1)! \right].$$

A β_1 gyökhöz tartozó p_1 számú partiális törthöz p_1 ilyen particuláris integrál tartozik. Téve $\frac{1}{\beta_1} = a_1$, ezek az integrálok:

$$e^{a_1 x}, e^{a_1 x} [a_1 x + 1], e^{a_1 x} [a_1^2 x^2 + \binom{2}{1} a_1 x + 2], \dots$$

vagy, ha az elsőt a másodikból, azután az első 2-szeresét és a második kétszeresét a harmadikból s i. t. levonjuk és a constans factorokat elhagyjuk, akkor az $e^{a_1 x}, x e^{a_1 x}, x^2 e^{a_1 x}, \dots, x^{p_1-1} e^{a_1 x}$ integrálokra jutunk. Hasonlóképpen kapjuk az $e^{a_2 x}, x e^{a_2 x}, x^2 e^{a_2 x}, \dots, x^{p_2-1} e^{a_2 x}$ stb. integrálokat, a hol a_1, a_2, \dots az

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

alapegyenlet gyökei és pedig $a_i p_i$ -szeres gyök. Ilyen módon az integrálok ismeretes rendszerére jutottunk.

A homogen lineáris differenciál egyenlet integráljának a racionális függvénynyel való ez a most kiderített kapcsolata alkalmat ad arra, hogy *kritériumot állítsunk fel, melylyel a*

$$\phi(x) = \Sigma a_n x^n$$

hatványsor együtthatóiból közvetlenül eldönthessük, hogy $\phi(x)$ állandó együtthatójú homogen lineáris differenciálegyenlet megoldása-e, azaz előállítható-e

$$\varphi_1(x) e^{a_1 x} + \varphi_2(x) e^{a_2 x} + \dots + \varphi_m(x) e^{a_m x} \quad (4)$$

alakban, a hol $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ racionális egész függvények. Minthogy a (4) alatti függvény racionális függvény asszociáltja, tehát csak a KRONECKER¹-féle feltételeket kell alkalmaznunk a

$$\Sigma n! a_n x^n$$

hatványsorra. Jelöljük $n! a_n$ -et c_n -nel, akkor tehát megalkotjuk a

$$D_1 \dots c_m, D_2 = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \dots$$

HANKEL-féle determinánsokat. Ha valamely m indextől kezdve minden $D_m = 0$, akkor $\Sigma c_n x^n$ racionális függvény, melynek nevezője m -edfokú, tehát a $\Sigma a_n x^n$, mely a $\Sigma c_n x^n$ -nek BOREL-féle asszociáltja, előállítható a (4) alakban.

2. Az *Hadamard-tétel alkalmazása a hypergeometrikus sorra.* A közönséges hypergeometrikus sor:

$$1 + \frac{a \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{a(a+1) \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2) \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

¹ KRONECKER: Zur Theorie der Elimination etc. Ges. Werke II. p. 146.

tekinthető a következő hatványsorok HADAMARD-féle compositiójának:

$$1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots = (1-x)^{-\alpha};$$

$$1 + \frac{\beta}{1}x + \frac{\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots = (1-x)^{-\beta};$$

$$1 + \frac{1}{\gamma}x + \frac{1 \cdot 2}{\gamma \cdot (\gamma+1)}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{\gamma \cdot (\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \dots = \varphi(x).$$

Az első kettőnek — ha csak α és β nem negatív egész szám — egyetlen singularitása: 1. Megmutatjuk, hogy a harmadik sorra is ugyanez áll. Ugyanis, mint a Γ függvényről tudjuk:

$$\Gamma(\gamma+n) = (\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\dots\gamma \cdot \Gamma(\gamma)\text{-ből:}$$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n-1)} &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} = \frac{n\Gamma(n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} = \\ &= nB(n, \gamma) = n \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\gamma-1} dx, \end{aligned}$$

ha $\gamma > -1$. Ez esetben tehát:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} z^n = 1 + z \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^1 (zx)^{n-1} (1-x)^{\gamma-1} dx;$$

és ha $|z| < 1$, a jobboldali összeg:

$$1 + z \int_0^1 \frac{(1-x)^{\gamma-1}}{(1-zx)^2} dx.$$

Ez az integrál $|z| < 1$ esetében az adott sorral megegyezik; de analitikai függvényt értelmez az egész z síkon a valós tengely $1 \dots \infty$ -ig menő részének kivételével; minthogy azonban az integrandus x analitikai függvénye és egy olyan T tartományban, melyet a $0 \dots 1$ egyenes köz és a 0 és a 1 pontok között vonuló tetszésszerű görbe határol: reguláris, tehát a $0 \dots 1$ egyenes köz helyettesíthető más, a $0 \dots 1$ közötti C integrációs görbével és így a z -re nézve az 1-től ∞ -ig vonuló metszet más

ilyen metszettel is helyettesíthető, vagyis a szóbanforgó analitikai függvénynek a végesben az 1 ponton kívül nincs más singularitása. Ezzel kimutattuk, hogy az

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

hypergeometrikus függvénynek más singularitása nem lehet, mint 1, és ∞ és az HADAMARD-tétel értelmében még a függvény egyéb ágaiban: a 0.

Ezt a $\gamma > -1$ -re mutattuk meg, de hogy a

$$\sum \frac{n!}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} z^n$$

összegnek nincs az 1-en kívül más singularitása, azt $\gamma < -1$ esetében is könnyen kimutathatjuk. Ez esetben ugyanis, ha

$$-k > \gamma > -(k+1),$$

akkor a sor első k tagját különválasztjuk, az racionális egész függvény; a többiből pedig $\frac{1}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}$ -t kiemeljük; ha $\gamma+k=\delta$ tesszük, akkor csak a $\sum \frac{n!}{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-k)} z^n$ vizsgálandó és erről az előbbihez hasonló módon mutatjuk ki, hogy 1 az egyetlen singularitása az általa előállított analitikai függvénynek. Az itt követett gondolatmenet a LE-ROY már említett értekezésében foglalthoz hasonló.

3. *Egy elégséges kritérium a singularitás meghatározására.* Ha adatik a $\sum a_n z^n$ hatványsor, akkor annak a megállapítása, hogy a convergentia-kör valamely pontja singuláris pont-e, tudvalevőleg visszavezethető arra, hogy az egységsugarú convergentia-körrel bíró hatványsor által előállított függvénynek az 1 hely singuláris helye-e. Ha $a_n = a'_n + i a''_n$, a hol a'_n és a''_n valósak, akkor ez a kérdés visszavezethető a valós együtthatójú $\sum a'_n z^n$ és $\sum a''_n z^n$ vizsgálatára; tehát a kérdés az, hogy a valós együtthatójú egységnyi convergentia-sugárral bíró $\sum a_n z^n$ hatványsornak az 1 hely singuláris helye-e? Erre nézve az HADAMARD-tétel alkalmazásával a következő *elégséges kritériumot állapítjuk meg. Ha a jelölt helyek indexei sorban:*

$$k_1, k_2, k_3, \dots$$

és

$$\sum \frac{1}{k_i}$$

convergens végtelen sor, akkor az 1 hely szinguláris.

Ennek a megmutatása végett elkészítjük ezt a

$$G(x) = \prod \left(1 - \frac{x}{k_i}\right)$$

transzcendens egész függvényt. Ez a $0 \dots k_1$ közben pozitív, a $k_1 \dots k_2$ közben negatív stb., úgy hogy e közökben a jele meg-
egyezik az együtthatók jeleivel; a közök határpontjain: 0.

A $|G(x)|$ növekedési rendjére vonatkozólag megállapítható a következő: Menjünk el a $\sum \frac{1}{k_i}$ sorban olyan messzire, hogy $\sum_N \frac{1}{k_i} < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen.

$$\left| \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k_i}\right) \right| < \left| \prod_1 \left(1 - \frac{x}{k_i}\right) \right| \prod_2 \left(1 + \frac{|x|}{k_i}\right),$$

a hol \prod_1 az első $N-1$ tényezőt tartalmazza. Minthogy:

$$1 + \frac{|x|}{k_i} < e^{\frac{|x|}{k_i}},$$

tehát $\prod_2 < e^{\frac{|x|}{2}}$. A \prod_1 racionális egész függvény, tehát megállapítható oly nagy R , hogy ha $|x| > R$, akkor $|\prod_1| < e^{\frac{|x|}{2}}$ és így ha $|x| > R$,

$$|G(x)| < e^{\varepsilon|x|}.$$

Most azt állítjuk, hogy a k_i -ktől különböző, elég nagy pozitív egész számokra áll az, hogy

$$G(\nu) > e^{-\varepsilon\nu}.$$

Feltételünkből következik, hogy végtelen sok i -re $k_{i+1} - k_i > 2$. Legyen ilyen i -re

$$k_i + 1 < \nu < k_{i+1} - 1$$

és k_i már elég nagy, akkor a felírt egyenlőtlenség HADAMARD-nak egy nevezetes, a transzcendens egész függvényekre vonat-

kozó tétele szerint fennáll.¹ Akkor is érvényes az egyenlőtlenség, ha $\nu = k_i + 1$, vagy $\nu = k_i - 1$.

Ugyanis legyen $\nu = k_i + 1$; de $k_i + 1 < k_{i+1}$,

$$G(\nu) = \left(1 - \frac{\nu}{k_i}\right) H' \left(1 - \frac{\nu}{k_j}\right),$$

a hol j az összes pozitív egész számokon megy át i kivételével. (Ha $k_{i+1} - k_i = 2$ volna, akkor még az $1 - \frac{\nu}{k_{i+1}}$ factort is előre írjuk).

A H' -re érvényes HADAMARD említett tétele, mert $|\nu - k_j| > 2$. Így tehát ha ν elég nagy, akkor $H' > e^{-\frac{1}{2}\nu}$. Az elül álló factor

$$1 - \frac{\nu}{k_i} = 1 - \frac{k_i + 1}{k_i} = -\frac{1}{k_i};$$

$$\left|1 - \frac{\nu}{k_i}\right| = \frac{1}{k_i} = e^{-\log k_i}.$$

De ha k_i elég nagy, akkor $\frac{\log k_i}{k_i}$ tetszésszerűen kicsiny, tehát $\log k_i < \frac{\varepsilon}{2}\nu$, vagyis

$$\left|1 - \frac{\nu}{k_i}\right| > e^{-\frac{\varepsilon}{2}\nu};$$

és így:

$$G(\nu) > e^{-\nu}.$$

Ugyanígy bizonyítható abban az esetben, midőn $k_{i+1} - k_i = 2$, vagy mikor $\nu = k_i - 1$; tehát:

$$e^{-\nu} < |G(\nu)| < e^{\nu},$$

akárminő kicsiny is ε , ha ν elég nagy. E szerint tehát:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |G(\nu)|^{\frac{1}{\nu}} = 1;$$

és így ennek a hatványsornak

$$\Sigma G(\nu) z^{\nu}$$

összetartási sugara: 1, [a $[G(\nu)]^{\frac{1}{\nu}}$ -nek igazi limese 1] és a

¹ L. pl. BOREL: Leçons sur les fonctions entières, p. 77.

16. lapon közölt 5. alatti tétel szerint egyetlen singuláris helye az általa értelmezett analitikai függvénynek: 1.

Ha már most a $\Sigma a_n z^n$ és $\Sigma G(n) z^n$ HADAMARD-féle compositionját alkotjuk meg, akkor olyan:

$$\Sigma G(n) a_n z^n$$

sorra jutunk, melynek minden együtthatója vagy 0, vagy pozitív; tehát, ha a convergentia-köre megmaradt az egység-sugarú kör, akkor egy ismeretes, VIVANTI-tól eredő tétel szerint az 1 hely singuláris hely. De minthogy az HADAMARD-féle compositionnak nem lehet más singuláris helye, mint a két függvény singularitásainak szorzata, tehát az eredeti $\Sigma a_n z^n$ -nek is singuláris helye: 1. A convergentia-kör sugara azonban valóban 1. Az ellenkező eset ugyanis akkor és csakis akkor állhatna be, ha a jelváltó helyeken levő együtthatókból alkotott

$$|\sqrt[k_1]{a_{k_1}}|, |\sqrt[k_2]{a_{k_2}}|, \dots$$

sorozat limes-superiorja 1, de ezeken kívül elég messze menve, már minden $|\sqrt[k]{a_n}| < 1 - \varepsilon$, ha ε elég kicsiny.

Ez esetben úgy segíthetünk a dolgon, hogy jelváltó helyek gyanánt nem, mint szokásos, az első, új jelű tagot vesszük, hanem a régi jelű csoport utolsó tagját; ez esetben ugyanis a $\Sigma G(n) a_n z^n$ hatványsorban megint csupa pozitív együttható lesz és

$$|G(k_1) a_{k_1}|^{\frac{1}{k_1}}, |G(k_2) a_{k_2}|^{\frac{1}{k_2}}, \dots$$

limes superiorja: 1. A $\Sigma \frac{1}{k_i}$ sorral a $\Sigma \frac{1}{k_i - 1}$ is convergens és így a $G(z)$ transcendens egész függvényre vonatkozó előbbi állítások érvényben maradnak.

4. *Hadamard-féle függvények.* HADAMARD nevezetes thésisének egyik főgondolata, hogy a $\Sigma a_n z^n$ hatványsor által értelmezett függvény singularitásainak vizsgálatára felhasználja az együtthatókból alkotott HANKEL-féle

$$D_p^{(n)} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+p-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & \dots & a_{n+p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & a_{n+p+1} & \dots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}$$

determinánsokat, melyeket, miként a 24. lapon az 1. alatti fejtegetésben említettük, KRONECKER a racionális függvények vizsgálatánál oly sikerrel használt.

HADAMARD-nak e determinánsokra vonatkozó tételei közül csak a következőket említjük: Ha a $\sum a_n z^n$ convergentia-körének sugara ρ , akkor a $|\sqrt[p]{D_p^{(n)}}|$ limes superiorja nem lehet nagyobb $\frac{1}{\rho^p}$ -nél. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt[p]{D_p^{(n)}}| = \frac{1}{\rho^p}$, ellenben a $p+1$ -edrendű HANKEL-determinásra: $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt[p]{D_{p+1}^{(n)}}| < \frac{1}{\rho^{p+1}}$, akkor a convergentia-körön csupa polus van és pedig számra nézve a többszörös polus többszörösségi rendjével számítva éppen p . Ha ellenben akárhányszorrendű HANKEL-féle determinánsokat alkotunk is meg, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt[p]{D_p^{(n)}}|$ mindig $\frac{1}{\rho^p}$, akkor a $\sum a_n z^n$ convergentia-körén van legalább egy singularitás, mely nem polus.

A HANKEL-féle determinánsokkal mint együttthatókkal hatványsorokat alkotunk. Így például a p -edrendű HANKEL-féle determinánsokkal a

$$H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$$

hatványsort. Ezeket a hatványsorokat HADAMARD-féle compositiókkal készíthetjük el.

Így például, ha az

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

hatványsort az

$$a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \dots$$

hatványsorral componáljuk, kapjuk az

$$a_0 a_2 + a_1 a_3 x + a_2 a_4 x^2 + \dots$$

hatványsort. És ha most még az

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots$$

sor önmagával componáljuk és az előbbiből kivonjuk, akkor

$$\Sigma (a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2) x^n$$

hatványsort kapjuk, melyet $H_2(x)$ -szel jelöltünk.

Egészen hasonló módon állíthatjuk elő a

$$H_p(x) = \Sigma D_p^{(n)} x^n$$

függvényt, melynek együttthatói a $\Sigma a_n x^n$ együttthatóinak p -edrendű HANKEL-féle determinánsai.

Ugyanis a $D_p^{(0)}$ valamelyik tagja: az $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p}$ szorzat, a hol i_1, i_2, \dots, i_p az $1, 2, \dots, p$ valamely permutációja. De akkor nyilván a $D_p^{(n)}$ -nek van egy megfelelő tagja, mely ettől csak abban különbözik, hogy minden index n -nel emelkedik; tehát ha a következő hatványsoroknak:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{i_1+n} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{i_2+n} x^n, \dots, \sum_{n=0}^{\infty} a_{i_p+n} x^n$$

HADAMARD-féle compositióját alkotjuk meg és ellátjuk a $D_p^{(0)}$ -ban hozzá tartozó $(-1)^I$ jellel, a hol I az i_1, i_2, \dots, i_p számok inverzióinak száma és ezt az eljárást a $D_p^{(0)}$ minden tagjára vonatkozólag elvégezzük és az így nyert $p!$ hatványsort összeadjuk, akkor előáll a kívánt $\sum_0^{\infty} D_p^{(n)} x^n = H_p(x)$.

Az így keletkezett függvényeket HADAMARD-féle függvényeknek fogjuk nevezni.

Minthogy a $\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^{n-k}$ függvénynek ugyanazok a singularitásai, mint az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ -nek [legfőlebb a RIEMANN-felületnek az első alatti lapján lehet még 0 a singularitása, mert $\frac{1}{x^k} [f(x) - \varphi(x)]$ alakban állítható elő, a hol $\varphi(x)$ k -adfokú racionális egész függvény], tehát az HADAMARD-tétel szerint a $H_p(x)$ -nek nem lesz más singularitása, mint az $f(x)$ singularitásainak p -edrendű szorzatai.

Ha az $f(x)$ -nek a_1, a_2, a_3, \dots polusai és pedig rendre k_1 -szeres, k_2 -szeres, stb. polusok, akkor az HADAMARD-féle függvénynek

$$a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3}, \dots$$

(a hol $r_1 + r_2 + \dots = p$), *csakis akkor lehet polusa, ha*

$$r_1 \leq k_1, r_2 \leq k_2, r_3 \leq k_3, \dots;$$

szóval az a_i polus a rendszámánál magasabb hatványban nem fordulhat elő. (Feltesszük mindig, hogy két $a_1^r a_2^s \dots$ szorzat csakis akkor lehet egyenlő, ha az exponensek egyenlők.)

Ezt az állítást a következő módon bizonyíthatjuk be: Ha a az $f(x)$ -nek k -szeres polusa, akkor

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)^k f(x)$$

függvénynek a a reguláris helye. Tekintsük már most például a $D_p^{(n)}$ HANKEL-féle determinánst, melynél $p \geq k$. Alakítsuk át ezt a determinánst úgy, hogy az utolsó előtti sorát $-\frac{k}{a}$ -val, az előtte levőt $\binom{k}{2} \frac{1}{a^2}$ -tel, az i -ediket (visszáról számítva) $(-1)^i \binom{k}{i} \frac{1}{a^i}$ -val szorozva, az utolsó sorhoz adjuk; akkor az utolsó sor elemei ilyenek lesznek:

$$\begin{aligned} A_m &= a_m - a_{m-1} \binom{k}{1} \frac{1}{a} + a_{m-2} \binom{k}{2} \frac{1}{a^2} - \\ &- a_{m-3} \binom{k}{3} \frac{1}{a^3} + \dots + (-1)^k \frac{1}{a^k}, \end{aligned}$$

vagyis az $\left(1 - \frac{x}{a}\right)^k f(x)$ -ben az x^m együtthatója.

Ugyanígy alakítjuk át az utolsó előtti sort, vagyis az előtte levő sorokat rendre az előbb említett tényezőkkel megszorozva, hozzáadjuk s i. t. Így folytatjuk ezt az eljárást a $k+1$ -ik sorig (előlről számítva). Ezáltal a $D_p^{(n)}$ determinánst átalakítottuk olyan p -edrendű determinánssá, melynek első k -sorában a régi a_i együtthatók állanak, a következő sorokban azonban az a_i helyett A_i áll.

Ezt az átalakítást a $H_p(x)$ mindenik együtthatóján elvégezve képzeljük. A $H_p(x)$ tehát előállítható megint hatványsorok HADAMARD-féle compositiója gyanánt.

Ugyanis az átalakított $D_p^{(0)}$ most ilyen alakú:

$$D_p^{(0)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k-1} & a_k & \cdots & a_{k+p-2} \\ A_k & A_{k+1} & \cdots & A_{k+p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{p-1} & A_p & \cdots & A_{2p-2} \end{vmatrix};$$

és így, ha valamelyik tagja a kellő előjellel:

$$a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} A_{i_{k+1}} \cdots A_{i_p},$$

akkor $D_p^{(n)}$ -nek megfelelő tagját úgy kapjuk meg, hogy minden indexet n -nel növelünk; tehát e tagokkal vett hatványsor a

$$\sum_{n=i_1}^{\infty} a_n x^{n-i_1}, \sum_{n=i_2}^{\infty} a_n x^{n-i_2}, \dots \sum_{n=i_k}^{\infty} a_n x^{n-i_k}, \\ \sum_{n=i_{k+1}}^{\infty} A_n x^{n-i_{k+1}}, \dots \sum_{n=i_p}^{\infty} A_n x^{n-i_p}$$

HADAMARD-féle compositiója, a megfelelő előjellel véve. Ilyen módon $p!$ számú HADAMARD-féle compositiót készítünk, ezek összege lesz a $H_p(x)$.

Az e compositióknál használt hatványsorok közül az első k a $\Sigma a_n x^n$ -ből vétetik a megfelelő eltolással, a következő $p-k$ hatványsor azonban a $\Sigma A_n x^n$ megfelelő eltolásaival keletkezik. De az utóbbiaknak a már nem singularitásuk, tehát az HADAMARD-féle compositiók, melyekből összeadás és kivonás útján keletkezik a $H_p(x)$, az a -nak legfőlebb k -ik hatványát tartalmazhatják a singularitások szorzatában.

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy $H_p(x)$ HADAMARD-féle függvénynek csak olyan

$$a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} \dots$$

polusszorzat lehet polusa, a melynél $r_1 + r_2 + \dots = p$ és az exponensek nem nagyobbak az illető polus többszörösségi rendszámánál.

Ebből rögtön következik, hogy ha a $\Sigma a_n x^n$ convergentia-körén $a_1, a_2, a_3, \dots a_m$ rendre $k_1, k_2, k_3, \dots k_m$ -szeres polusok

vannak, a hol $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = p$ és más singularitás nincsen, akkor $H_p(x)$ -nek az

$$c = a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} \dots a_m^{k_m}$$

valóban polusa, és pedig egyszerű polusa.

Ugyanis, ha c nem volna polusa a $H_p(x)$ -nek, akkor a ϱ^p sugarú körön (és természetesen ezen belül) nem volna singularitása, mert hiszen ilyen csakis az $f(x)$ -nek a ϱ sugarú körön levő összes singularitásainak szorzata lehetne; és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_p^{(n)}} < \frac{1}{\varrho^n}.$$

Ha ez a p a legelső, a melyre nézve ez az egyenlőtlenség fennáll, vagyis még

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_{p-1}^{(n)}} = \frac{1}{\varrho^{p-1}},$$

akkor HADAMARD mély tétele szerint¹ a $\sum a_n x^n$ által előállított függvénynek a ϱ sugarú körön csakis $p-1$ polusa lehet, a mi feltevésünkkel ellentéznék. Ha még előbb következnek be a limes superior e változása, vagyis ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_{p-k-1}^{(n)}} = \frac{1}{\varrho^{p-k-1}},$$

de már

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_{p-k}^{(n)}} < \frac{1}{\varrho^{p-k}},$$

akkor pedig a $\sum a_n x^n$ -nek csak $p-k-1$ polusa lenne a convergentia-körön.

Ezzel tehát kimutattuk, hogy ha a ϱ -sugarú convergentia-körön az $f(x)$ -nek egyedüli singularitásai az a_1, a_2, \dots, a_m polusok, melyek rendszámai: k_1, k_2, \dots, k_m , és $k_1 + k_2 + \dots + k_m = p$, akkor a $H_p(x)$ HADAMARD-függvénynek

$$c = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$$

a ϱ^p sugarú convergentia-körön egyetlen polusa.

¹ HADAMARD: Thèse, I. c.

Ha a $\Sigma a_n x^n$ -nek a convergentia-körön túl a legközelebbi singuláris helyei szintén a $\varrho' > \varrho$ sugarú körön levő polusok: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ és pedig rendre l_1, l_2, \dots, l_r -szeres polusok, a hol $l_1 + l_2 + \dots + l_r = q$, akkor $H_{p+q}(x)$ -nek a convergentia-körén egyetlen polusa lesz:

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \dots \beta_r^{l_r},$$

a mint az az előbbihez hasonló módon az HADAMARD-féle vizsgálatok segítségével abból a tényből következik, hogy β_i exponense l_i -nél magasabb nem lehet. Ezt a gondolatmenetet folytathatjuk abban az esetben, midőn a következő singularitások szintén polusok.

Ha ilyen esettel van dolgunk, vagyis a $\Sigma a_n x^n$ által értelmezett függvénynek egy R sugarú körön és rajta csakis polusai vannak és ezek

$$a_1, a_2, \dots, a_m,$$

és pedig a_i k_i -szeres polus és $k_1 + k_2 + \dots + k_m = p$, akkor a $H_p(x)$ -nek az

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$$

egyetlen polusa a convergentia-körén; de ekkor KÖNIG GYULA tétele szerint¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_p^{(n)}}{D_p^{(n+1)}} = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}.$$

A polusszorzatok meghatározására ez az eljárás szolgálhat: Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_p^{(n)}} = \frac{1}{\varrho^p}$, de már $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_{p+1}^{(n)}} < \frac{1}{\varrho^{p+1}}$ (ahol ϱ a $\Sigma a_n x^n$ convergentia-körének sugara), akkor, mint tudjuk, a

$$H_p(x)$$

függvénynek egyedüli polusa $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$, ha a_1, a_2, \dots, a_m a ϱ tehát a körön levő polusok rendre k_1, k_2, \dots többszörösséggel; sugarú KÖNIG-tétel szerint:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_p^{(n)}}{D_{p+1}^{(n+1)}} = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m};$$

¹ KÖNIG GYULA: A hatványsorok egy tulajdonságáról. Math. és Term. Értesítő, I. köt. 59—62 l. 1883. Über eine Eigenschaft der Potenzreihen. Math. Ann. 23. 1884., p. 447.

és ha a q -nál először áll be, hogy a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_{p+q}^{(n)}} = \frac{1}{\varrho^p \varrho_1^q}$, de már $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_{p+q+1}^{(n)}} < \frac{1}{\varrho^p \varrho_1^{q+1}}$, akkor a

$$H_{p+q}(x)$$

egyetlen polusa $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_m^{k_m} \beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \dots \beta_n^{l_n}$, a hol β_1, β_2, \dots a ϱ_1 sugarú körön levő polusai a $\Sigma a_n x^n$ -nek, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{p+q}^{(n)}}{D_{p+q}^{(n+1)}} = \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_m^{k_m} \beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \dots \beta_n^{l_n};$$

és így:

$$\lim \left(\frac{D_{p+q}^{(n)}}{D_{p+q}^{(n+1)}} : \frac{D_p^{(n)}}{D_p^{(n+1)}} \right) = \beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \dots \beta_n^{l_n};$$

s i. t. az absolut értékére megegyező polusokszorzat fokoza-
tosan meghatározhatók. Ilyenformán a KÖNIG-tétel alkalmazásá-
val némileg áttekinthetőbbé válik HADAMARD eljárása.

Hogy a $H_p(x)$ HADAMARD-függvénynél miképpen szerepel-
nek a $\Sigma a_n x^n$ -nek ama singularitásai, a melyek nem polusok,
annak részletesebb vizsgálatára más alkalommal térek vissza,
kimutatva például, hogy ha γ a $\Sigma a_n x^n$ convergentia-körén olyan
singuláris hely, mely nem polus és rajta kívül csakis polusok
vannak: $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — amire a kérdés mindig visszavezethető —,
akkor a $H_p(x)$ -nek, akármekkora legyen is a p , csak

$$\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_m^{k_m} \gamma^{p - \Sigma k_i}$$

singularitásai lehetnek, a hol k_1, k_2, \dots nem nagyobb az illető
polus többszörösségi rendszámánál, és pedig ezek nem lehetnek
polusok.

5. Az Hadamard-függvények integrálalakja. A $H_p(x)$ függ-
vényt többszörös integrál alakjában állíthatjuk elő. Ugyanis, ha
 $\Sigma a_n x^n$ által értelmezett függvény $f(x)$ és a 0 pontot magába
záró c görbén kívül vannak $f(x)$ összes singularitásai, akkor:

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz.$$

Ha a $D_p^{(n)}$ HANKEL-féle determinánsban minden a_m helyett
ilyen integrálalakot teszünk, és pedig az első sorban az integrá-

tiós változót z_1 -gyel, a másodikban $z_2 \dots$ -vel, az integrációs görbéket pedig c_1, c_2, \dots -vel stb. jelölve, akkor:

$$D_p^{(n)} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^p \begin{vmatrix} \int_{c_1} \frac{f(z_1)}{z_1^{n+1}} dz_1, & \int_{c_1} \frac{f(z_1)}{z_1^{n+2}} dz_1, & \dots & \int_{c_1} \frac{f(z_1)}{z_1^{n+p}} dz_1, \\ \int_{c_2} \frac{f(z_2)}{z_2^{n+2}} dz_2, & \int_{c_2} \frac{f(z_2)}{z_2^{n+3}} dz_2, & \dots & \int_{c_2} \frac{f(z_2)}{z_2^{n+p+1}} dz_2, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{c_p} \frac{f(z_p)}{z_p^{n+p}} dz_p, & \int_{c_p} \frac{f(z_p)}{z_p^{n+p+1}} dz_p, & \dots & \int_{c_p} \frac{f(z_p)}{z_p^{n+2p-1}} dz_p \end{vmatrix};$$

és ez a következő p -szeres integrálalakban írható:

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \right)^p \int_{c_1} \int_{c_2} \dots \int_{c_p} \frac{f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p)}{z_1^{n+1} z_2^{n+2} \dots z_p^{n+p}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_1^2} & \dots & \frac{1}{z_1^{p-1}} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_2^2} & \dots & \frac{1}{z_2^{p-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{z_p} & \frac{1}{z_p^2} & \dots & \frac{1}{z_p^{p-1}} \end{vmatrix} dz_1 dz_2 \dots dz_p.$$

Az integrál abban az értelemben veendő, a mint POINCARÉ a complex változós többszörös integrálokat megállapította.¹

Jelöljük az integrál jele alatt álló VANDERMONDE-féle determinánst Δ -val, akkor $D_p^{(n)}$ ebben az alakban írható:

$$D_p^{(n)} = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{c_1} \dots \int_{c_p} \Delta \frac{f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p)}{(z_1 z_2 \dots z_p)^{n+1}} \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_p}{z_1^0 z_2^2 \dots z_p^{p-1}}.$$

Ha most a z_1, z_2, \dots, z_p betűket permutáljuk és olyan permutációt alkotunk, melynek inversióinak száma l , akkor Δ -ból $(-1)^l \Delta$ lesz. De az integrációs betű változtatása nem változtatja meg az integrált, tehát:

$$D_p^{(n)} = \frac{(-1)^l}{(2\pi i)^p} \int_{c_1} \dots \int_{c_p} \Delta \frac{f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p)}{(z_1 z_2 \dots z_p)^{n+1}} \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_p}{z_{i_0}^0 z_{i_1}^2 \dots z_{i_{p-1}}^{p-1}},$$

¹ POINCARÉ: Sur les résidus des intégrales doubles. Acta Math. 9.

a hol $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{p-1}$ az $1, 2, 3, \dots, p$ -ből kiválasztott p különböző szám. Ha már most minden módon permutáljuk a z_1, z_2, \dots, z_p betűket és tekintetbe vesszük, hogy

$$\sum (-1)^l \frac{1}{z_{i_0}^0 z_{i_1} z_{i_2}^2 \dots z_{i_{p-1}}^{p-1}} = A,$$

akkor arra jutunk, hogy $D_p^{(n)}$ a következő symmetrikus alakra hozható:

$$D_p^{(n)} = \frac{1}{p! (2\pi i)^p} \int_{c_1} \dots \int_{c_p} f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p) \cdot A^2 \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_p}{(z_1 z_2 \dots z_p)^{n+1}} \quad (A)$$

vagy még az integrandust $(z_1 z_2 \dots z_p)^{2p-2}$ -vel szorozva és osztva

$$D_p^{(n)} = \frac{1}{p! (2\pi i)^p} \int_{c_1} \dots \int_{c_p} f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p) H^2 \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_p}{(z_1 z_2 \dots z_p)^{2p-1+n}},$$

a hol H jelenti a z_1, z_2, \dots, z_p VANDERMONDE-féle determinánsát, a $H(z_i - z_k)$ szorzatot, ha i és k az $1, 2, \dots, p$ közül választott összes különböző számpárok.

E szerint már most $H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_p^{(n)} x^n$ az esetben, midőn $|x| < |z_1 z_2 \dots z_p|$ (például ha a c_1, c_2, \dots, c_p mindannyian a kezdőpont körüli R sugarú körök, akkor $|x| < R^p$) így írható:

$$H_p(x) = \frac{1}{p! (2\pi i)^p} \int_{c_1} \dots \int_{c_p} \frac{f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p) \cdot H^2}{(z_1 z_2 \dots z_p)^{2p-2} (z_1 z_2 \dots z_p - x)} dz_1 dz_2 \dots dz_p.$$

Ez az integrálalak szintén igen alkalmas az HADAMARD-függvények singularitásainak vizsgálatára.

Az HADAMARD-függvény integrálalakjának részletesebb tárgyalása is rávezet bennünket arra a két nevezetes tulajdonságra, melyeket közvetlenül a hatványsor-alakon mutattunk ki és pedig:

1. Ha $f(x) = \sum a_n x^n$ -nek: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ rendre k_1, k_2, \dots, k_m -edrendű polusai, akkor a $p = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ -edrendű $H_p(x)$ HADAMARD-függvénynek $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$, a hol $l_1 + l_2 + \dots + l_m = p$, nem lehet szinguláris helye, ha az l exponensek közül valamelyik nagyobb a megfelelő k többszörösségi rendszámnál.

2. Az $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ a $H_p(x)$ HADAMARD-függvénynek egyszerű polusa.

Az 1. tételt a következő megfontolással bizonyítjuk be. A $H_p(x)$ -et előállító p -szeres integrál:

$$I_p(x) = \int_{c_1} \dots \int_{c_p} \frac{f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p)}{(z_1 z_2 \dots z_p)^{2p-2}} [H(z_i - z_k)]^2 \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_p}{z_1 z_2 \dots z_p - x}.$$

Meg akarjuk mutatni, hogy

$$x = a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_m^{l_m} \text{ helyen } [l_1 + l_2 + \dots + l_m = p]$$

$I_p(x)$ reguláris.

Az integrációs görbék tetszésszerűen, a O pontokat körülvevő, de singuláris helyet nem tartalmazó görbék. Válasszuk c_1, c_2, \dots, c_p görbéket a z_1, z_2, \dots, z_p síkokon például úgy, hogy az a_1 pontot kis ϱ_1 sugarú körrel vesszük körül, azután mindegyik síkon olyan görbét rajzolunk, mely a kezdőpontot és ezt a kis kört is magába zárja, de más singuláris helyet nem tartalmaz. Éppen így a $z_{l_1+1}, z_{l_1+2}, \dots, z_{l_1+l_2}$ síkokon az a_2 pontot vesszük körül egy kis ϱ_2 sugarú körrel és olyan görbét rajzolunk mindenik síkon, a mely a kezdőpontot és azt a kis ϱ_2 sugarú kört is tartalmazza s i. t. és még mindenik síkon a kis körtől a szokásos módon párhuzamosokat vonunk a határgörbéhez, hogy az illető területek egyszerűen összefüggővé váljanak.

Még arról is gondoskodunk, hogy a c_1, c_2, \dots, c_p görbéknek a $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ sugarú kis köröktől különböző részein levő z_1, z_2, \dots, z_p helyek között ne legyen olyan, melyen $z_1 z_2 \dots z_p = a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_m^{l_m}$.

Ha már most x az $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_m^{l_m}$ kis környezetéből való, a z_1, z_2, \dots, z_p pedig a c_1, c_2, \dots, c_p görbéknek a kis köröktől különböző részein haladnak, akkor $z_1 z_2 \dots z_p - x$, abszolút értékre nézve egy véges g számnál nagyobb és így az integrandus korlátos lévén, az e görberészekre vonatkozó integrál az x kijelölt tartományában reguláris.

Azt fogjuk most megmutatni, hogy az integrációs görbéknek a $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ körökre vonatkozó szakaszaiból eredő része az integrálnak 0-hoz konvergál, ha ϱ_1 zérussá válik, ha $l_1 > k_1$.

Vezessünk be e kis körökre vonatkozólag poláris koordinátákat:

$$z_k = a_k + r_k e^{i\varphi_k},$$

a hol

$$r_k = \varrho_1,$$

ha

$$1 \leq k \leq l_1;$$

$r_k = \varrho_2$, ha

$$l_1 < k \leq l_1 + l_2, \dots;$$

$r_k = \varrho_m$, ha

$$p - l_{m-1} < k \leq p;$$

és éppen így,

$$a_k = a_1,$$

ha

$$1 \leq k \leq l_1,$$

$a_k = a_2$, ha

$$l_1 < k \leq l_1 + l_2,$$

s i. t. és

$$r = a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_m^{l_m} + \xi.$$

Az $f(z_1)$ az a_1 környezetében így állítható elő:

$$f(z_1) = \frac{A_1}{(z_1 - a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(z_1 - a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1-1}}{z_1 - a_1} + \varphi(z_1),$$

a hol $\varphi(z_1)$ az a_1 környezetében reguláris. Hasonlóképpen állítható elő az a_1 környezetében $f(z_2)$, $f(z_3)$, ... $f(z_{l_1})$, egyszerűen a z_1 betű helyett z_2 , z_3 , ... z_{l_1} betűket írva.

Már a következő $f(z_{l_1+1})$ -nek az a_2 körüli előállítására van szükségünk:

$$f(z_{l_1+1}) = \frac{B_1}{(z_{l_1+1} - a_2)^{k_2}} + \frac{B_2}{(z_{l_1+1} - a_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{B_{k_2-1}}{z_{l_1+1} - a_2} + \psi(z_{l_1+1}).$$

Ugyanilyen lesz az előállítása az $f(z_{l_1+2})$, $f(z_{l_1+3})$, ... $f(z_{l_1+l_2})$ -nek: a következő függvényeknek az a_3 pont körüli előállításait vesszük s i. t.

Az integrálnak a $\varphi(z)$, $\psi(z)$ stb.-ből eredő részei nem jönnek tekintetbe, azok a ϱ_1 , ϱ_2 , ... sugarú körökkel együtt zérussá válnak. Csakis a főrészeket kell tekintetbe vennünk és ezeket is a distributív elv érvényessége alapján elég tagonként figyelembe vennünk. Vegyük mindenik főrészből az első tagokat. A con-

stans factorokat el is hagyhatjuk és így a $I(x)$ integrálban $(z_1), f(z_2) \dots f(z_{l_1})$ helyett egyszerűen:

$$\frac{1}{(z_1 - a_1)^{k_1}}, \frac{1}{(z_2 - a_1)^{k_1}}, \dots, \frac{1}{(z_{l_1} - a_1)^{k_1}}$$

értékeket, az $f(z_{l_1+1}), f(z_{l_1+2}), \dots f(z_{l_1+l_2})$ helyett rendre:

$$\frac{1}{(z_{l_1+1} - a_2)^{k_2}}, \frac{1}{(z_{l_1+2} - a_2)^{k_2}}, \frac{1}{(z_{l_1+3} - a_2)^{k_2}}, \dots, \frac{1}{(z_{l_1+l_2} - a_2)^{k_2}}$$

s i. t. tagokat teszszük. Így tehát az említett poláris koordinátákat bevezetve, az $f(z_1)f(z_2) \dots f(z_p)$ szorzat egyszerűen;

$$\frac{1}{\varrho_1^{k_1 l_1} \varrho_2^{k_2 l_2} \dots \varrho_m^{k_m l_m}} e^{-i [k_1 \varphi_1 + k_1 \varphi_2 \dots + k_m \varphi_m]}.$$

Most a $[H(z_i - z_k)]^2$ állítandó elő a $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ sugarú körökön. Minthogy

$$z_1 = a_1 + \varrho_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = a_1 + \varrho_1 e^{i\varphi_2}, \dots, z_{l_1} = a_1 + \varrho_1 e^{i\varphi_{l_1}},$$

tehát a $(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_{l_1})$ factorból:

$$\varrho_1^{l_1} (e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) (e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_3}) \dots (e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_{l_1}})$$

lesz. A z_1 -et tartalmazó többi factor egészen a $z_1 - z_{l_2}$ -ig ilyen alakú:

$$a_1 - a_2 + \varrho_1 e^{i\varphi} - \varrho_2 e^{i\psi}.$$

Az l_2 -iktől l_3 -ikig ilyen alakú:

$$a_1 - a_3 + \varrho_1 e^{i\varphi} - \varrho_3 e^{i\psi};$$

s i. t., szóval, ha a ϱ sugarak elég kicsinyek, e különbségek tetszés szerinti kevéssel térnek el a 0-tól különböző $a_1 - a_2, a_1 - a_3, \dots, a_1 - a_m$ -ektől, tehát az $I(x)$ integrálnak egy 0-tól különböző constans factorát szolgáltatják, a mit nem kell tekintetbe vennünk. A Π -ben szereplő: $(z_2 - z_3)(z_2 - z_4) \dots (z_2 - z_{l_1})$ factorból

$$\varrho_1^{l_1-1} (e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_3}) (e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_4}) \dots (e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_{l_1}})$$

lesz; a többi $(z_2 - z_{l_1+1})(z_2 - z_{l_1+2}) \dots (z_2 - z_p)$ szorzatból ismét egy, 0-tól különböző constans tényező válik. A

$$(z_3 - z_4) \dots (z_3 - z_{l_1}) (z_3 - z_{l_1+1}) \dots (z_3 - z_p)$$

szorzatból megint egy, a 0-tól különböző constans factorrá válótól eltekintve

$$\varrho_1^{l_1-2} (e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_4}) (e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_5}) \dots (e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_{l_1}})$$

lesz s i. t. Szóval: azokból a tényezőkből, melyek a z_1, z_2, \dots, z_{l_1} változók valamelyikét tartalmazzák, ez lesz:

$$II (e^{i\varphi_r} - e^{i\varphi_s}) \varrho_1^{\frac{l_1(l_1-1)}{2}},$$

a hol r és s az $1, 2, \dots, l_1$ számok közül a különböző párokat jelenti és $r > s$.

Következnek a $II (z_i - z_k)$ ama faktorai, melyekben a második csoport, a

$$z_{l_1+1}, z_{l_1+2}, \dots, z_{l_1+l_2}$$

valamelyike előfordul. Ugyanolyan meggondolással, mint előbb, kiadódik, hogy ebből a szorzatból:

$$II (e^{i\varphi_r} - e^{i\varphi_s}) \varrho_2^{\frac{l_2(l_2-1)}{2}}$$

lesz [illetőleg ettől különbözik egy $C + \mu_2 \varrho_2 + \mu_3 \varrho_2 + \dots$ faktorban, ahol $C \neq 0$.] Az r és s most csak az $l_1+1, l_2+2, \dots, l_1+l_2$ közül választatik. Ha ezt az eljárást folytatjuk, akkor arra jutunk, hogy $[II(z_i - z_k)]^2$ főrésze a következő lesz:

$$\varrho_1^{l_1^2 - l_1} \varrho_2^{l_2^2 - l_2} \dots \varrho_m^{l_m^2 - l_m} [II(e^{i\varphi_r} - e^{i\varphi_s})]^2,$$

a hol a II az előbb megállapított m -számú II szorzata. Az integrálban előforduló $dz_1 dz_2 \dots dz_p$ -ből a körök mentén

$$\varrho_1^{l_1} \varrho_2^{l_2} \dots \varrho_m^{l_m} e^{i\varphi} \cdot d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_p$$

lesz. Végül az integrandus nevezőjében előforduló $(z_1 z_2 \dots z_p)^{2p-2} [a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_m^{l_m}]^{2p-2}$ -től csekélylyel különbözik, tehát szintén nem szükséges tekintetbe vennünk.

Az integrációt úgy végezzük el, hogy a most már $0 \dots 2\pi$ közben veendő p -szeres integrációt először ezen az l_1 -szeres integrálon végezzük el:

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\varrho_1^{l_1^2}}{\varrho_1^{l_1 k_1}} [II(e^{i\varphi_r} - e^{i\varphi_s})]^2 e^{i\varphi_k} d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{l_1},$$

a hol most r és s csak az $1 \dots l_1$ számok közül választott. Ha $l_1 > k_1$, akkor $l_1^2 > l_1 k_1$, tehát ez az integrál zérussá válik, a midőn ϱ_1 eltűnik. Ezzel már kimutattuk, hogy az $I(x)$ integrálnak az a része, mely a $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ sugarú körök-menti integrálással származik, zérussá válik, ha ϱ_1 zérussá lesz, ha x az $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_m^{l_m}$ környezetében van és $l_1 > k_1$, vagyis az $x = a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_m^{l_m}$ a $H_p(x)$ reguláris helye. Ugyanez áll, ha akármelyik $l_i > k_i$. Ezzel az 1. állítást igazoltuk. (Ez a tétel még azon az úton is bizonyítható, a melyet a HURWITZ-függvényre vonatkozó analog tétel bizonyításánál követünk.)

Hasonlóképpen megmutatjuk, hogy az $x = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ a $H_p(x)$ egyszerű polusa. E végből azt mutatjuk meg, hogy

$$(x - a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}) I_p(x)$$

az $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ helyen reguláris, vagy, a mi elégséges: e szorzat limese, ha $x = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$, 0-tól különböző, ($k_1 + k_2 + \dots = p$).

Nyilván ismét csak azt a részét kell az integrálnak tekintetbe venni, a mely az előbbi kis $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ sugarú köröktől származik. És ebben is az $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_m)$ főrészeinek legelső tagjaira szorítkozhatunk, mert az alacsonyabb rendű tagokból eredő résznek az $a_1^{k_1} a_2^{k_2}, \dots, a_m^{k_m}$ éppen az előbbi tétel szerint reguláris helye.

Ha tesszük:

$$z_k = a_k + \varrho_k e^{i\varphi_k},$$

a hol az előbbi fejtegetésekhez hasonló módon

$$a_k = a_1,$$

ha

$$1 \leq k < k_1,$$

és

$$a_k = a_2,$$

ha

$$k_1 < k \leq k_1 + k_2,$$

$a_k = a_3$, ha

$$k_1 + k_2 < k \leq k_1 + k_2 + k_3;$$

s í. t. és

$$r_k = \varrho_1,$$

ha

$$1 < k \leq k_1,$$

$r_k = \varrho_2$, ha

$$k_1 < k \leq k_1 + k_2,$$

s i. t., akkor az integrandusban szereplő:

$$\frac{1}{z_1 z_2 \dots z_p - x}$$

ilyen alakú:

$$\frac{1}{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} - x + (\varrho)},$$

a hol (ϱ) -val jelöltük azokat a tagokat, melyek $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ -vel zérussá válnak.

Ez a tag az $x - a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ -mel szorozva:

$$1 + (\varrho)$$

alakba megy át, vagyis limese: 1, ha a $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ zérushoz konvergál.

Az $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_p)$ helyett a főrészeik első tagjait tesszük, vagyis a k_1 elsőt tartalmazó csoportban $f(z_i)$ helyett $\frac{1}{(z_i - a_1)^{k_1}}$ -et, a következő k_2 tagot tartalmazó csoportban $f(z_i)$ helyett $\frac{1}{(z_i - a_2)^{k_2}}$ -t s i. t. és így a poláris koordináták bevezetésével az $f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p)$ szorzat főrésze átmegy ebbe:

$$\frac{1}{\varrho_1^{k_1^2} \varrho_2^{k_2^2} \dots \varrho_m^{k_m^2}} e^{-i[k_1(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{k_1}) + k_2(\varphi_{k_1+1} + \dots + \varphi_{k_1+k_2}) + \dots]}$$

A $[II_1(z_i - z_k)]^2$ -ről ugyanolyan megfontolással, mint az imént láttuk, következik, hogy elégséges, ha helyette a

$$[II_1(z_i - z_k)]^2, [II_2(z_i - z_k)]^2, \dots, [II_m(z_i - z_k)]^2$$

szorzatát tesszük, a hol az első szorzat a z_1, z_2, \dots, z_{k_1} -re, a második a $z_{k_1+1}, z_{k_2+1}, \dots, z_{k_1+k_2}$ -re, a harmadik $z_{k_1+k_2+1}, z_{k_1+k_2+2}, \dots, z_{k_1+k_2+k_3}$ -re stb. vonatkozik. Ha poláris koordinátákat vezetünk be, akkor ezekből

$$\varrho_1^{k_1^2-k_1} [H_1 (e^{i\varphi_r} - e^{i\varphi_s})]^2, \quad \varrho_2^{k_2^2-k_2} [H_2 (e^{i\varphi_r} - e^{i\varphi_s})]^2, \dots$$

$$\varrho_m^{k_m^2-k_m} [H_m (e^{i\varphi_r} - e^{i\varphi_s})]^2$$

lesz, a hol az első szorzatban r és s az $1, \dots, k_1$ közül, a másodikban $k_1 \dots k_1 + k_2, \dots$ stb. közül választott számpárok.

Minthogy még a $dz_1 dz_2 \dots dz_m$ helyett a transzformációnál

$$\varrho_1^{k_1} \varrho_2^{k_2} \dots \varrho_m^{k_m} e^{i\varphi} d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_p$$

lép be, látjuk, hogy az integrandus számlálójában és nevezőjében:

$$\varrho_1^{k_1^2} \varrho_2^{k_2^2} \dots \varrho_m^{k_m^2}$$

szorzat szerepel.

Így az integrandus egyszerűbb alakra hozható. Áttekinthetőbb lesz ez az alak, ha ismét $e^{-i\varphi_r}$ helyett ζ_r -et vezetünk be és tekintetbe vesszük, hogy most már az integratio a $\zeta_1=0, \zeta_2=0, \dots$ pontok körül az egységnyi sugárral leírt körökön végzendő.

Az integrál, a melyet ki kell számítanunk, a következő alakú lesz

$$\int \dots \int_{c_p} (\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_{k_1})^{k_1-2} (\zeta_{k_1+1} \dots \zeta_{k_1+k_2})^{k_2-2} \dots$$

$$H_1 \left(\frac{1}{\zeta_r} - \frac{1}{\zeta_s} \right)^2 H_2 \left(\frac{1}{\zeta_r} - \frac{1}{\zeta_s} \right)^2 \dots d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_p,$$

a hol H_1 , miként előbb, az $\frac{1}{\zeta_1}, \dots, \frac{1}{\zeta_{k_1}}$ VANDERMONDE-féle determinánsa, H_2 az $\frac{1}{\zeta_{k_1+1}}, \dots, \frac{1}{\zeta_{k_1+k_2}}$ VANDERMONDE-ja stb.; c_1, c_2, \dots görbék a kezdőpontból, mint középpontból az egységnyi sugárral leírt körök. Az integrációt lépésekben végezzük el; először a következő k_1 -szeres integrált számítjuk ki:

$$I = \int \dots \int_{c_{k_1}} \frac{(\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_{k_1})^{k_1-1}}{\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_{k_1}} H \left(\frac{1}{\zeta_r} - \frac{1}{\zeta_s} \right)^2 d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_{k_1}$$

és ebben az alakban azonnal felismerjük, hogy ez az integrál a 39. lapon levő (A)-ból keletkezik, ha $f(z)$ függvény: z^{k_1-1} , továbbá $p = k_1$, $n = 0$, vagyis csak egy 0-tól különböző factorban tér el

a z^{k_1-1} k_1 -adrendű HADAMARD-függvényétől a $z=0$ helyen. De ez a $D_{k_1}^{(0)}$ olyan k_1 -edrendű determináns, melynek minden eleme 0, kivéve a diagonálisban levő elemeket, a melyek 1-ek. A többi factor ugyanígy számítható ki. Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy ha az $f(z)$ -nek a_1 k_1 -edrendű, a_2 k_2 -edrendű, \dots a_m pedig k_m -edrendű polusa, akkor a $H(p, x)$ -nek $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ elsőrendű polusa.

III. A Hurwitz-tétel és alkalmazásai.

1. A Hurwitz-tétel. Ha az $f(z)$ analitikai függvény a végtelenben reguláris és értéke e helyen 0, akkor LAURENT-tétele szerint egy, a kezdőpont körül mint középpont körül leírt körön kívül (mely kör az összes singuláris helyeket körülzárja) kifejezhető az

$$\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \dots$$

alakban. Legyen éppen így a hasonló viselkedésű $\varphi(x)$ kifejtése:

$$\frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x^2} + \frac{b_2}{x^3} + \dots$$

Tudjuk, hogy ha c a singuláris helyeket magába záró görbe, akkor

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) z^n dz, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \varphi(z) z^n dz.$$

Készítsük el most HURWITZ szerint ezt a hatványsort:

$$H(x) = \sum_0^\infty \left(a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a_n b_0 \right) \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Vizsgáljuk meg ez új LAURENT-sor convergentia-körét. Tegyük fel, hogy az első sor convergens ha $|x| > r$ és divergens, ha $|x| < r$, a második convergens, ha $|x| > \varrho$ divergens, ha $|x| < \varrho$; akkor tudjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \varrho.$$

Föltehetjük, hogy N indextől kezdve minden

$$|a_n| < (r + \varepsilon)^n; \quad |b_n| < (\varrho + \varepsilon)^n;$$

ahol ε tetszőszerinti kis pozitív szám. N indexig pedig

$|a_n| < M, |b_n| < M. \quad (n=0, 1, 2, \dots, N)$
 ahol M az $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|, |b_0|, \dots, |b_N|$ maximuma. Ekkor
 tehát $(n > 2N)$:

$$\begin{aligned} & \left| a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \dots + \binom{n}{N} a_N b_0 \right| < \\ & < M \left[(r+\varepsilon)^n + \binom{n}{1} (r+\varepsilon)^{n-1} + \dots + \binom{n}{N} (r+\varepsilon)^{n-N} \right] + \\ & + \left[\binom{n}{N+1} (r+\varepsilon)^{n-N-1} (\varrho+\varepsilon)^{N+1} + \dots + \binom{n}{N+1} (r+\varepsilon)^{N+1} (\varrho+\varepsilon)^{n-N-1} \right] + \\ & + M \left[(\varrho+\varepsilon)^n + \binom{n}{1} (\varrho+\varepsilon)^{n-1} + \dots + \binom{n}{N} (\varrho+\varepsilon)^{n-N} \right] < \\ & < M(1+r+\varepsilon)^n + M(1+\varrho+\varepsilon)^n + (r+\varrho+2\varepsilon)^n. \end{aligned}$$

Ha r és ϱ 1-nél nem kisebb, akkor ebből következik, hogy a szóbanforgó sor convergens, ha $|x| > r+\varrho$. Ha legalább egyik, például $\varrho < 1$, és $r \geq \varrho$, akkor ebből csak annyit látunk, hogy a szóbanforgó sor convergens, ha $|x| > r+1$.

Ha a $H(x)$ HURWITZ-féle sorban a b együtthatók helyett azok integrálalakját helyettesítjük, akkor, tekintetbe véve, hogy $|z| < |x|$, a következőre jutunk:

$$\begin{aligned} H[f(x), \varphi(x)] &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_0 \int_c f(z) z^n dz + \binom{n}{1} a_1 \int_c f(z) z^{n-1} dz + \right. \\ & + \binom{n}{2} a_2 \int_c f(z) z^{n-2} dz + \dots + a_n \int_c f(z) dz \left. \right] \frac{1}{x^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{x^{k+1}} + \binom{k+1}{1} \frac{z}{x^{k+2}} + \binom{k+2}{2} \frac{z^2}{x^{k+3}} + \dots \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{k+1}} \left(1 - \frac{z}{x} \right)^{-(k+1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) \varphi(x-z) dz. \end{aligned}$$

A $H(x)$ ezen alakjára legelőször DELL' AGNOLA jutott.¹ Eredetileg ez az integrálalak csakis arra az esetre tekinthető megállapítotttnak, midőn a c a kezdőpont körül a ϱ -nál és r -nél nagyobb sugárral leírt kör és $|x|$ nagyobb e kör sugaránál, mert

¹ DELL' AGNOLA: Estensione di un teorema di Hadamard (II. közlemény) Atti degli Istituti Veneto, 1899.

csakis erre az esetre érvényes a végzett transformatio. De éppen úgy, mint az HADAMARD-féle integrál, ez az integrál is az x reguláris függvénye a most említettél nagyobb tartományban. Ugyanis a CAUCHY-tétel szerint a c helyettesíthető olyan görbével, mely az eredetileg választott c -vel olyan gyűrűtartományt zár be, melyen belül az integrandus reguláris. A c -t összehúzzhatjuk az $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ pontokig, melyek az $f(z)$ singuláris helyei és x olyan tartományból vehető, a melyen belül minden $x-z$ különbözik a $\varphi(z)$ singuláris helyeitől, a β_1, β_2, \dots -től, ha z a határgörbén fut végig. Ezt pedig mindig elérhetjük, ha $x-\alpha_i$ különbözik a β_k -től, hol α_i és β_k tetszésszerinti singuláris helyek.¹ Ebből következik, hogy $H[f(x), \varphi(x)]$ -nek nem lehet más singularitása, mint az $f(x)$ és $\varphi(x)$ singularitásainak összege, tehát (a mennyiben még esetleg 0 is singuláris helye lehet az $f(x)$ -nek és $\varphi(x)$ -nek) az $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ helyek.

A $H[f(x), \varphi(x)]$ integrálalakján azonnal látható, hogy ha

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

hol úgy az $f_1(x)$, mint $f_2(x)$ teljesíti a szóbanforgó feltételeket:

$$H[f, \varphi] = H[f_1, \varphi] + H[f_2, \varphi],$$

vagyis a HURWITZ-féle compositio is distributiv természetű. Ezért véges számú singuláris hely esetében elégséges, ha a következő fejtegetésekben csakis olyan függvényekre szorítkozunk, melyeknek egyetlen singuláris helyük van a 0-on kívül. Az $x = \alpha\xi$ transzformációval mindig elérhetjük, hogy ez a singuláris hely 1 legyen.

2. A Hurwitz-féle compositio Pincherle-féle alakja. A PINCHERLE-féle alakot állítsuk elő abban az esetben, midőn az egyértékű $f(x)$ -nek 1 az egyetlen singuláris helye a $\varphi(x)$ -nek 1 -en kívül esetleg még 0 a singuláris helye. Legyen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^{n+1}}.$$

¹ A C görbe választására vonatkozólag l. bővebben MONTEL i. h., a hol azonban az α, β helyek maguk, mint esetleges singularitások, kimaradtak.



Ha tesszük $\frac{1}{x} = z$, akkor $\sum a_n z^{n+1}$ a 0 helyen reguláris és egyetlen singuláris helye $z = 1$, tehát, minthogy $f(x)$ egyértékű analitikai függvény, az I. rész 4. pontja szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{J^n a_0} = 0.$$

Éppen ezért arra törekszünk, hogy a HURWITZ-féle compositióban az a_n együtthatók helyett a véges különbségeket hozzuk be. A HURWITZ-féle compositiót, minthogy a szóbanforgó tartományban (a 2 sugarú körön kívül) abszolút és egyenletesen convergens, és a tekintetbe vett esetekben a WEIERSTRASS-féle kettőssor tétel érvényes, a következő alakban írjuk:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n b_0 + \binom{n}{1} a_{n-1} b_1 + \binom{n}{2} a_{n-2} b_2 + \dots + \binom{n}{n} a_0 b_n \right) \frac{1}{x^{n+1}} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{b_0}{x^{n+1}} + \binom{n+1}{1} \frac{b_1}{x^{n+2}} + \binom{n+2}{2} \frac{b_2}{x^{n+3}} + \dots \right) = \\ & = \sum \frac{a_n}{n!} \left[\frac{n! b_0}{x^{n+1}} + \frac{(n+1)!}{1} \frac{b_1}{x^{n+2}} + \frac{(n+2)!}{2!} \frac{b_2}{x^{n+3}} + \frac{(n+3)!}{3!} \frac{b_3}{x^{n+4}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

A zárójelben álló kifejezés nem más, mint $(-1)^n \varphi^{(n)}(x)$, tehát:

$$H[f, \varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n!} \varphi^{(n)}(x).$$

Ha a_n helyett a véges különbségeket vezetjük be, akkor:

$$\begin{aligned} H[f, \varphi] &= \sum (-1)^n \left[a_0 + \binom{n}{1} J a_0 + \binom{n}{2} J^2 a_0 + \dots + \binom{n}{n} J^n a_0 \right] \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = \\ &= \sum (-1)^n J^{(n)} a_0 \left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} - \binom{n+1}{n} \frac{\varphi^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} + \binom{n+2}{n} \frac{\varphi^{(n+2)}(x)}{(n+2)!} - \dots \right] \\ &= \sum (-1)^n \frac{J^n a_0}{n!} \left[\varphi^{(n)}(x) - \frac{\varphi^{(n+1)}(x)}{1} + \frac{\varphi^{(n+2)}(x)}{2!} - \frac{\varphi^{(n+3)}(x)}{3!} + \dots \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{J^n a_0}{n!} \varphi^{(n)}(x-1). \end{aligned} \tag{A}$$

Megmutatjuk, hogy ennek a $H[f, \varphi]$ -nek nem lehet más singularitása, mint 1, 2, vagyis az $f(x)$ és $\varphi(x)$ singularitásai és azok összege. E végből jelöljünk meg az x -sikon egy tetszés-

szerinti, egyszerűen összefüggő T tartományt, mely 1 és 2 pontokat nem tartalmazza és ebben a T -ben rajzoljunk olyan T' tartományt, melynek pontjainak a T határvonalától való minimális távolsága a tetszésszerinti kis ϱ -nél nagyobb. A $\varphi(x-1)$ a T tartományban reguláris, mert $\varphi(x)$ -nek nincs más singularitása, mint 0 és 1. Így tehát ha x a T' tartományban van és a T tartomány határán $|\varphi(x-1)|$ maximuma M , és a c görbe hossza L akkor, miként ismeretes:

$$|\varphi^{(n)}(x-1)| < \frac{LMn!}{\varrho^{n+1}};$$

és így az (A) alatti függvény majoránsa:

$$LM \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\Delta^n a_0|}{\varrho^{n+1}}.$$

Minthogy pedig $\lim \sqrt[n]{\Delta^n a_0} = 0$, tehát az (A) alatti függvénysor e tartományban egyenletesen összetartó és így a $H[f, \varphi]$ valóban reguláris. Ezzel egyszerű módon kimutattuk, hogy a HURWITZ-féle tétel arra az esetre, midőn az egyik függvény egyértékű és a singuláris helyek száma véges, érvényes.

Az (A) alatti függvénysorból azonban még arra is következtethetünk, hogy bizonyos esetekben a 2 hely valóban singuláris hely. Így például ha az $f(x)$ -nek az 1 hely polusa, akkor mint tudjuk, a $\Delta^n a_0$ bizonyos m -től kezdve 0 és így az (A) sor a $\varphi(x-1)$ $m-1$ -edrendű homogen lineáris differenciálalakja. Ha már most 2 nem volna singularitása a $H[f, \varphi]$ -nek, akkor, miként a lineáris differenciálegyenletek elméletéből tudjuk,

$$\sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \frac{\Delta^n a_0}{n!} \varphi^{(n)}(x-1) = F(x) \quad (B)$$

nem homogen lineáris differenciálegyenlet megoldásának sem lehetne 2 singuláris helye és így $\varphi(z)$ -nek nem volna singuláris helye az 1 hely, a mi pedig feltevésünkkel ellentézik. Ha tehát $f(x)$ -nek a polusa és $\varphi(x)$ valamely singuláris helye β , akkor $H[f(x), \varphi(x)]$ HURWITZ-féle compositiónak $a + \beta$ okvetlenül singuláris helye, ha $a + \beta$ a singuláris helyek összetételeivel csak egyfeleképpen keletkezhetik. Ha a HURWITZ-tételt az 1. pont-

ban foglalt meggondolással és nem az egyetlen singuláris hely esetében végzett 2. alatti módon bizonyítjuk, akkor a distributív elv szerint az $f(x)$ -et $f_1(x) + f_2(x)$ alakban állíthatjuk elő, a hol $f_1(x)$ -nek csak egyetlen polusa α és $f_2(x)$ -nek α nem singularitása. $f_2(x)$ és $\varphi(x)$ Hurwitz-féle compositiójának $\alpha + \beta$ az 1. pont alatti szerint nem lehet singularitása; tehát a 2. alatti bizonyítás szerint $\alpha + \beta$ az $f(x)$ és $\varphi(x)$ Hurwitz-féle compositiójának singularitása, még akkor is, ha a singuláris helyek száma nem véges. (A bizonyítás menete azonban izolált singuláris helyeket tételez fel). A végtelenedrendű lineáris differentiaalalak behatóbb vizsgálatával és ennek kapcsán a lényeges singuláris hely kérdésével más alkalommal szándékozom foglalkozni.

A (B) alatti alakból azt is látjuk, hogy ha az I hely nemcsak az $f(x)$ -nek, hanem a $\varphi(x)$ -nek is polusa, akkor az $f(x)$ és $\varphi(x)$ Hurwitz-féle compositiójának is polusa a 2, és pedig, ha $f(x)$ -nek m -edrendű polusa, akkor (B)-ben már $\Delta^m q_0 = 0$, és így, ha $f(x)$ -nek m -edrendű polusa, $\varphi(x)$ -nek r -edrendű polusa, akkor a Hurwitz-féle compositiónak $m + r - 1$ -edrendű polusa lesz. Ez természetesen érvényes az $\alpha + \beta$ polusokra is, ha $f(x)$ -nek polusa α , $\varphi(x)$ -é pedig β .

3. A Hurwitz-féle tétel alkalmazása a hatványsor singularitásának meghatározására. Legyen adva a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$ hatványsor, melynek convergentia-körének sugara, a mi mindig feltehető: 1. Kriteriumot akarunk megállapítani arra, hogy a sor értelmezte függvény a convergentia-kör egy kijelölt helyén — a mit az általánosság csorbitása nélkül 1-nek vehetünk — reguláris-e?

E végből a megadott hatványsornak és a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}$ geometriai sornak Hurwitz-féle compositióját készítjük el. Ha az eredeti hatványsor által értelmezett függvény singularitásai $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, (melyek mind az egységsugarú körön, vagy azon belül vannak), akkor a Hurwitz-féle compositio singularitásai (minthogy az egyik függvénynek csak polusa van) okvetlenül: $\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots$. Ha tehát 1 $f(x)$ singularitása, akkor a compositiónak 2 singularitása lesz. Ha azonban 1 reguláris hely volt, akkor minden $\alpha + 1 | < 2$, tehát a Hurwitz-féle compositio convergentia

radiusa 2 lesz, ha az eredeti sornak 1 singuláris helye volt, és 2-nél kisebb lesz, ha 1 reguláris hely volt. Vagyis az 1 hely reguláris, vagy singuláris, a szerint, a mint:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup. \left| a_n + \binom{n}{1} a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a_0 \right|^{\frac{1}{n}} \leq 2.$$

Ilyenféle kriteriumot tetszés-szerinti más hatványsorral is készíthetünk, ha a segítségül vett hatványsornak egyetlen polusa 1.

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$ -nek egyetlen singuláris helye 1, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}} \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$$

HURWITZ-féle compositiójának a 0 hely kivételével nem lesz singuláris helye, tehát a HURWITZ-féle compositio az $\frac{1}{x}$ transcendens egész függvénye lesz, vagyis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n - \binom{n}{1} a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} + \dots + (-1)^n a_0 \right|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Delta^n a_0} = 0$.

És fordítva, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Delta^n a_0} = 0$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^{(n)} a_0}{x^{n+1}} \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}$$

HURWITZ-féle compositiójának egyetlen singuláris helye az 1. Ez a compositio pedig, minthogy:

$$a_0 + \binom{n}{1} \Delta a_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_0 + \dots + \binom{n}{n} \Delta^n a_0 = a_n,$$

nem más, mint:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}.$$

Ezzel tehát kimutattuk, hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$ -nek egyetlen singuláris helye legyen az 1, az, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Delta^n a_0} = 0$ legyen. Ha a HURWITZ-tételt e tétel felhasználása nélkül bizonyítjuk — miként azt például

PINCHERLE¹ teszi, — akkor e nevezetes tételnek igen egyszerű bizonyítására juthattunk.

4. A Hurwitz-tétel általánosabb alakja. HURWITZ a tételt egyszerű polusok esetére, kettős integrálok segítségével állapította meg.² Ez az út könnyen rávezet a tétel általánosabb fogalmazására is.

Legyenek adva az

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(1)}}{x^{n+1}}, \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(2)}}{x^{n+1}}, \quad \dots \quad f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(k)}}{x^{n+1}}$$

függvények és készítsük el a következő hatványsort:

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \dots a_{i_n}^{(k)} \cdot \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_n!} \cdot \frac{1}{x^{n+1}},$$

ahol $i_1 + i_2 + \dots + i_n = n$.

Ha tesszük:

$$a_{i_1}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} f_1(z_1) z_1^{i_1} dz_1, \quad a_{i_2}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} f_2(z_2) z_2^{i_2} dz_2, \dots$$

$$a_{i_k}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} f_k(z_k) z_k^{i_k} dz_k,$$

a hol c_1, c_2, \dots, c_k olyan zárt görbék, melyek az illető függvény singuláris helyeit körülzárják, és az integrálást a negatív irányban végezzük, akkor H -t a következő k -szoros integrálállítja elő: $|x| > \max |z|$

$$\frac{1}{(2\pi i)^k} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{c_1} \dots \int_{c_k} f_1(z_1) f_2(z_2) \dots f_k(z_k) \sum \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_k!} \frac{z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_k^{i_k}}{x^{n+1}} dz_1 dz_2 \dots dz_k;$$

vagyis:

$$(2\pi i)^k H = \int_{c_1} \dots \int_{c_k} \frac{f_1(z_1) f_2(z_2) \dots f_k(z_k)}{z_1 + z_2 + \dots + z_k - x} dz_1 dz_2 \dots dz_k.$$

¹ PINCHERLE: Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date. Atti della reale Accademia dei Lincei, 1899. VIII. k. p. 228.

² HURWITZ: Sur un théorème de M. HADAMARD. Comptes-Rendus, 1899. p. 350.

A $c_1 c_2 \dots c_k$ görbék tetszés szerint változtathatók, ha csak az $f_1(z)$, $f_2(z) \dots$ singuláris helyein át nem húzzuk őket, tehát e singuláris helyekhez tetszésszerint közel vonulhatnak a CAUCHY-féle tétel értelmében; az x pedig olyan tartományból vehető, a melynek nincsen $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ -nel egyenlő helye. Legcélszerűbb, ha itt is, mint MONTEL teszi az eredeti HURWITZ-tétel bizonyításakor, a z_i -síkon a c_i görbét úgy választjuk, hogy e sík valamely helyéről a függvénytanban szokásos hurkokat (lacet) vonjuk az $f_i(z)$ singuláris helyeihez. Ez az egyszerűen összefüggő tartomány a c_i belseje. Ekkor az x az egész síkon lehet, kivéve olyan hurkokat, a melyek az n síkon rajzolt hurkok összegéből (az összeget a complex számok összeadásával értelmezve) keletkeznek. Minthogy a hurkok az egyes síkok tetszésszerinti helyéből indulhatnak és csakis a singuláris helyek a változhatatlanok, tehát x a sík minden helye lehet, kivéve az $f(z_1)$, $f(z_2), \dots f(z_n)$ singuláris helyeinek összegeit. Ezzel tehát jeleztük annak a bizonyítását, hogy a H függvény singularitásai csakis az $f_1(z)$, $f_2(z), \dots f_n(z)$ egyes singularitásainak összegei lehetnek.

Ha például az $f_1(z)$, $f_2(z), \dots f_n(z)$ mindannyian megegyeznek és $f(z)$ singularitásai: a_1, a_2, a_3, \dots , akkor H -nak nem lehet más singularitása, mint az

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}$$

összegek, a hol természetesen ugyanaz az összeadandó többször is szerepelhet.

5. *Hurwitz-féle függvények.* Az $f(z) = \sum a_n z^n$ -ből megalkottuk a $H_p(x)$ HADAMARD-féle függvényeket. E függvények singularitásainak vizsgálatára az HADAMARD-féle compositióra vonatkozó tételt alkalmaztuk. Ebből a tételből következett, hogy $H_p(x)$ -nek nem lehet más singularitása, mint az $f(x)$ singularitásainak p -edrendű szorzatai, ugyanazt a factort többször is véve. De az HADAMARD-függvény együtthatóinak HANKEL-féle determináns alakja okozta, hogy az $f(x)$ valamely singularitása — egyelőre csak polusokról szóltunk — a $H_p(x)$ singularitásaiban mint factor a multiplicitásánál magasabb számban nem szere-

pelhet. Így például, ha $f(x)$ egyszerű polusai $\alpha, \beta, \gamma \dots$ akkor $H_2(x)$ -nek $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2 \dots$ nem lehetnek singularitásai.

Ebből a gondolatmenetből kiindulva, készítünk olyan HURWITZ-féle compositiót, a mely az $f(x)$ singularitásainak összegében is az illető singularitást legfőlebb a multiplicitásának megfelelő számban engedi meg. Így például, hogy egyszerű példán világítsuk meg a szándékunkat, legyenek az $f(x)$ egyszerű polusai: $\alpha, \beta, \gamma \dots$, akkor az $f(x)$ és $f(x)$ HURWITZ-féle compositiójának polusai a HURWITZ-tétel szerint: $2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma, 2\gamma, \dots$ Olyan compositiót akarunk készíteni, melynek $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, \dots$ reguláris helyei. Legyen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}};$$

és legyen:

$$A_n^{(p)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_p!} \begin{vmatrix} a_{i_1}, & a_{i_1+1}, & a_{i_1+2}, & \dots & a_{i_1+p-1} \\ a_{i_2+1}, & a_{i_2+2}, & a_{i_2+3}, & \dots & a_{i_2+p} \\ a_{i_3+2}, & a_{i_3+3}, & a_{i_3+4}, & \dots & a_{i_3+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i_p+p-1}, & a_{i_p+p}, & a_{i_p+p+1}, & \dots & a_{i_p+2p-2} \end{vmatrix};$$

a hol

$$i_1 + i_2 + \dots + i_p = n;$$

akkor a

$$H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^{(p)}}{x^{n+1}}$$

összeget rövidség kedvéért p -edrendű HURWITZ-féle függvénynek nevezzük. Erről a függvényről kimutatjuk, hogy ha $f(x)$ -nek polusai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ és pedig $\alpha_i k_i$ -szeres polus, akkor $H_p(x)$ -nek polusai

$$m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 + \dots,$$

a hol m_i nem lehet nagyobb k_i -nél. Továbbá megmutatjuk, hogy

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + \dots$$

egyszerű polusa. E végből előállítjuk a $H_p(x)$ integrál alakját.

Ha ugyanis az $A_n^{(p)}$ kifejezésébe tesszük:

$$a_{i_1+r} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z_1) z_1^{i_1+r} dz_1, \quad a_{i_2+r} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z_2) z_2^{i_2+r} dz_2, \dots$$

$$a_{i_p+r} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z_p) z_p^{i_p+r} dz_p$$

akkor az $A_n^{(p)}$ -ben szereplő determináns ilyen p -szeres integrálalakra hozható:

$$\frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{c_1} \dots \int_{c_p} f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p) z_1^{i_1} z_2^{i_2+1} \dots z_p^{i_p+p-1} \cdot \\ \cdot \Pi(z_i - z_k) dz_1 dz_2 \dots dz_p;$$

és így:

$$(2\pi i)^p A_n^{(p)} = \int_{c_1} \dots \int_{c_p} f(z_1) \dots f(z_p) \cdot \\ z_2^2 z_3^2 \dots z_p^{p-1} \Pi(z_i - z_k) (z_1 + z_2 + \dots + z_p)^n dz_1 \dots dz_p;$$

tehát: $H_p(x)$ erre az alakra hozható:

$$\frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{c_1} \dots \int_{c_p} \frac{f(z_1) f(z_2) \dots f(z_p) \cdot z_2^2 z_3^2 \dots z_p^{p-1}}{z_1 + z_2 + \dots + z_p - x} \Pi(z_i - z_k) dz_1 dz_2 \dots dz_p.$$

Ezt is, éppen úgy, mint az HADAMARD-függvényt, symmetrikus alakban írhatjuk. Ha ugyanis az integrációs betűnek minden permutációját megalkotjuk és az inversióknak megfelelő jelváltásokat figyelembe vesszük, akkor:

$$H_p(x) = \frac{1}{p!(2\pi i)^p} \int_{c_1} \dots \int_{c_p} \frac{f(z_1) \dots f(z_p)}{z_1 + z_2 + \dots + z_p - x} (\Pi(z_i - z_k))^2 dz_1 dz_2 \dots dz_p.$$

Ezen az integrálalakon olyan megfontolással, mint a melyet a 40. lapon végeztünk, közvetlenül látható, hogy $H_p(x)$ -nek nem lehet más singularitása, mint az $f(x)$ singularitásaiból készített p -tagú összegek. Mutassuk meg — az előbbi jelölést használva —, hogy minden $m_i \leq k_i$.

Tegyük fel, hogy $p > k$ és a k -szoros polusa $f(z)$ -nek. A $\Pi(z_i - z_k)$ determinánst átalakítjuk. Ugyanis:

$$(H(z_i - z_k))^2 = \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2, & \dots & z_1^{p-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2, & \dots & z_2^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1, & z_p, & z_p^2, & \dots & z_p^{p-1} \end{vmatrix}^2$$

determináns utolsó oszlopához az előtte levő k oszlopnak rendre $-\binom{k}{1}a, \binom{k}{2}a^2, -\binom{k}{3}a^3, \dots$ szorosát hozzáadjuk. Ekkor az utolsó oszlop elemei rendre: $z_1^{p-1-k}(z_1-a)^k, z_2^{p-1-k}(z_2-a)^k, \dots, z_p^{p-1-k}(z_p-a)^k$ lesznek. Ugyanezt tesszük az utolsóelőtti oszloppal, az előtte levő k oszlopnak rendre $-\binom{k}{1}a, \binom{k}{2}a^2, -\binom{k}{3}a^3, \dots$ -mal való szorzatainak hozzáadásával. Így az utolsóelőtti oszlop elemei rendre: $z_1^{p-2-k}(z_1-a)^k, \dots, z_p^{p-2-k}(z_p-a)^k$ lesznek s i. t.

Ez átalakítás folytán a determináns első $k-1$ oszlopa megmarad, a következők azonban az i -ik sorban $(z_i-a)^k, z_i(z_i-a)^k, z_i^2(z_i-a)^k, \dots, z_i^{p-1-k}(z_i-a)^k$ lesznek.

Ha $(z_i-a)^k f(z_i)$ -t $\varphi(z_i)$ -vel jelöljük, akkor nyilván $\varphi(z)$ -nek már az a nem polusa. Ha most a $H_p(x)$ első kifejezésében az átalakított $H(z_i-z_k)$ determinánst az $f(z_1)f(z_2)\dots f(z_p)$ -vel beszorozzuk [az i -ik sort $f(z_i)$ -vel] és az így kapott determinánst a LAPLACE-tétel szerint kifejtjük úgy, hogy az első k oszlop után készítjük el a vágást, akkor csupa ilyen alakú integrál összegére bomlik a $H_p(x)$:

$$\int_{c_1} \dots \int_{c_p} \frac{f(z_{i_1})f(z_{i_2})\dots f(z_{i_k}) \cdot \varphi(z_{i_{k+1}})\varphi(z_{i_{k+2}})\dots \varphi(z_{i_p}) H_1 H_2}{z_1 + z_2 + \dots + z_k - x} dz_1 dz_2 \dots dz_p;$$

a hol H_1 az első k változóra, a H_2 pedig a következőkre vonatkozó VANDERMONDE-féle determinánsoktól csak z_1, z_2, \dots, z_p bizonyos pozitív egész hatványaiban különbözik. Ha ezeket a H_1, H_2 determinánsokat is kifejtjük és egyszerűség végett az integrációs betűket természetes sorrendbe helyezzük, akkor látszik, hogy ez az integrál nem más, mint

$$z_1^{\mu_1} f(z_1), z_2^{\mu_2} f(z_2), \dots, z_k^{\mu_k} f(z_k),$$

és

$$z_{k+1}^{\lambda_1} \varphi(z_{k+1}), z_{k+2}^{\lambda_2} \varphi(z_{k+2}), \dots, z_n^{\lambda_n} \varphi(z_n)$$

HURWITZ-féle compositiója $(\mu_1, \mu_2, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ pozitív egész számok, melyekkel nem törődünk).¹ (L. az 54. lapon). De a $\varphi(z)$ -nek már α nem polusa, tehát ennek a HURWITZ compositiónak nem lehet más singularitása, mint olyan, melyben α legfőlebb k -szor szerepel összeadandóul, a hol k az α multiplicitásának száma. (Miként már említettük, az HADAMARD-függvényekre vonatkozólag ugyanilyen úton végezhetjük volna a bizonyítást.)

Hogy a $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m$, ahol k_i az a_i polus rendszáma és $k_1 + k_2 + \dots + k_m = p$, valóban polusa a $H_p(x)$ -nek, az éppen úgy bizonyítható, mint az HADAMARD-féle függvényeknél.

Példaképpen legyen $p = 2$, és az $f(x)$ -nek az r sugarú convergentia-körön két egyszerű polusa legyen: α és β és ezek legyenek az egyedüli singularitások; akkor a HURWITZ-féle $H_2(x)$ a következő:

$$H_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{a_i}{a_{n-i+1}} \frac{a_{i+1}}{a_{n-i+2}} \dots \frac{1}{x^{n+1}};$$

és tekintetbe véve, hogy $a_i = \alpha^i + \beta^i$, $H_2(x)$ csak egy numerikus tényezőben tér el a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta)^n}{x^{n+1}}$$

összegetől, a melyen látjuk, hogy $\alpha + \beta$ az egyetlen polus a convergentiakörön. Ha még más singularitása is van az $f(x)$ -nek, akkor $a_n = \alpha^n + \beta^n + a'_n$ alakban írható, a hol $\limsup |\sqrt[n]{a'_n}| < r$. Ha $\alpha + \beta$ más két singuláris hely összege gyanánt nem keletkezik, akkor is érvényes az állítás.

6. A HURWITZ-függvények alkalmazása a convergentia-körön levő singularitások meghatározására. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$ convergentia-körének radiusa 1 és e körön csak polusok vannak:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p,$$

¹ Az $f(z_1), \dots, f(z_k), \varphi(z_{k+1}), \dots, \varphi(z_n)$ soraiból azokat a tagokat, a melyekből a z pozitív egész hatványaival történt szorzással a z negatív hatványai elmaradnak, egyszerűen elhagyhatjuk. Az így keletkező függvényeknek ugyanazok a singularitásai, mint az eredetieknek.

Ha e polusok mind egyszerűek, akkor $H_2(x)$ HURWITZ-függvénynek $2a_1, 2a_2, \dots$ nem lehet polusa, hanem csakis az $a_i + a_k$ alakú összegek ($i \neq k$); de ekkor $|a_i + a_k| < 2$; tehát a $H_2(x)$ convergentia-körének radiusa 2-nél kisebb. És fordítva, ha e radius 2, akkor $H_2(x)$ -nek okvetlenül van $2a$ alakú polusa, mert két különböző singularis hely összegének abszolút értéke 2-nél kisebb, vagyis valamelyik polus legalább kétszeres polus; tehát az egység sugarú convergentia-körön van többszörös polus vagy nincsen, a szerint, a mint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} \\ a_{n-i+1} & a_{n-i+2} \end{vmatrix} \right|^{\frac{1}{n}} \leq 2.$$

Általánosítsuk ezt az eredményt. Tegyük fel, hogy az egység-sugarú convergentia-körön csupa polus van és ezek közül például a k -adrendű polus és k -nál magasabbrendű polus nincsen. Ekkor $H_k(x)$ egyik polusa ka lesz, a többi singularitása az $f(x)$ olyan k -számu singularitásának összege, a mely összegben a k -nál kevesebbszer szerepel, tehát

$$\omega = la + \beta + \gamma + \dots$$

alakú, a hol $l < k$ és β, γ, \dots abszolút értéke egyenlő, vagy kisebb $|a|$ -nál. Következésképpen $|\omega| < k|a|$ és így a $H_k(x)$ convergentia körének radiusa: k . Ellenben $H_{k+1}(x)$ -nek már $(k+1)a$ a tételünk értelmében nem lehet polusa és így minden singularitásának abszolút értéke $k+1$ -nél kisebb; tehát $H_{k+1}(x)$ convergentia körének radiusa $k+1$ -nél kisebb. És fordítva, ha $H_k(x)$ convergentia-körének radiusa k , ellenben $H_{k+1}(x)$ -é kisebb $k+1$ -nél, akkor az $f(x)$ convergentia-körén levő polusok maximális rendszáma k ; mert hiszen, ha a rendszáma k -nál nagyobb volna, akkor $H_{k+1}(x)$ -nek $(k+1)a$ polusa lenne, tehát a convergentia-kör radiusa $(k+1)|a| = k+1$ volna.

E szerint tehát, ha $H_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^{(k)}}{x^{n+1}}$ és az $f(x)$ convergentia-körén levő singularitások mind polusok, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n^{(2)}|^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |A_n^{(3)}|^{\frac{1}{n}}, \quad \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |A_n^{(k)}|^{\frac{1}{n}}$$

mind egyenlők rendre 2, 3, 4, ... k -val, ellenben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n^{(k+1)}|^{\frac{1}{n}} < k+1,$$

akkor a convergentia-körön van legalább egy olyan polus, melynek rendszáma k .

Ilyen módon az együtthatókból kriteriumot kaptunk arra nézve, hogy ha a convergentia-körön csupa polus van, ezek maximális rendszáma: k .

Ha a $H_k(x)$ convergentia-körének radiusa mindig k , akár mekkora legyen is a pozitív egész k , akkor az $f(x)$ convergentia-körén a polustól különböző más singularitásnak is kell lenni: mert ha csupa polus volna, akkor a $H_{k+1}(x)$ convergentia-körének radiusa $k+1$ -nél kisebb volna, ha k a polusok maximális rendszáma. E szerint tehát ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n^{(k)}} = k$$

minden k -nál, akkor a $\sum \frac{a_n}{x^{n+1}}$ -nek convergentia-körén nemcsak polusai vannak, hanem más singularitása is van.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 október 19.-én tartott üléséből.)

WILSON TÉTELÉNEK ANALOGONJA.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

I.

A számelméletben többször találkozunk a

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1^{p-2} \\ 1 & 2 & 2^2 & . & . & . & 2^{p-2} \\ 1 & 3 & 3^2 & . & . & . & 3^{p-2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & p-1 & (p-1)^2 & . & . & . & (p-1)^{p-2} \end{vmatrix},$$

VANDERMONDE-féle determinánssal, melyben p páratlan törzsszámot jelent és a mely a p modulusra vonatkozóan megvizsgálandó. E determináns néhány érdekes tulajdonságát óhajtom bemutatni a jelen cikkben. A determináns-elmélet elemeiből ismeretes, hogy a P , mint VANDERMONDE-féle determináns, az

$$1, 2, 3, \dots, p-1$$

számokból alakítható különbségek szorzatával egyenlő. E szerint

$$P = \begin{vmatrix} (2-1) & (3-1) & (4-1) & . & . & . & (p-2-1) & (p-1-1) \\ & (3-2) & (4-2) & . & . & . & (p-2-2) & (p-1-2) \\ & & (4-3) & . & . & . & (p-2-3) & (p-1-3) \\ & & & . & . & . & . & . \\ & & & & & & (p-2-\overline{p-3}) & (p-1-\overline{p-3}) \\ & & & & & & & (p-1-\overline{p-2}) \end{vmatrix}$$

vagy összevontabb alakban

$$P = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot (p-2)!$$

A P -re vonatkozóan néhány számelméleti tétel bizonyítható be.

1. tétel. A P mindenkor az

$$x^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$

kongruenciának gyöke. Tehát

$$I^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

valahányszor a p szám $(4n+1)$ -alakú és

$$I^2 \equiv +1 \pmod{p}$$

valahányszor a p szám $(4n+3)$ -alakú.

Első bebizonyítás. Kiindulva WILSON tételéből, a melynek értelmében

$$(p-1)! \equiv 1 \pmod{p},$$

a következő kongruenciák írhatók fel:

$$\begin{aligned} (p-2)! \cdot 1! &\equiv (-1)^2 \\ (p-3)! \cdot 2! &\equiv (-1)^3 \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ (p-k)! \cdot (k-1)! &\equiv (-1)^k \pmod{p} \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1! \cdot (p-1)! &\equiv (-1)^{p-1}. \end{aligned}$$

E kongruenciákat egymással szorozván, a

$$P^2 \equiv (-1)^{2+3+\dots+(p-1)} \equiv (-1)^{(p-2)\frac{p+1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$

adódik, a mivel a tételünk be van bizonyítva.

Második bebizonyítás. A P -ből mint determinánsból kiindulva szintén egyszerűen bizonyítható be a tételünk, ha P négyzetét oszloponkénti szorzással képezzük. Ugyanis ekkor

$$I^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{p-3} & s_{p-2} \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{p-2} & s_{p-1} \\ s_2 & s_3 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{p-1} & s_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{p-3} & s_{p-2} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2p-4} & s_{2p-3} \\ s_{p-2} & s_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2p-3} & s_{2p-2} \end{vmatrix},$$

a hol

$$s_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (p-1)^k.$$

Ismeretes számelméleti tétel szerint

$$\begin{array}{ll} \text{ha} & s_k \equiv 0 \pmod{p}, \\ & k \not\equiv 0 \pmod{p-1}; \\ \text{és} & \\ \text{ha} & s_k \equiv -1 \pmod{p}, \\ & k \equiv 0 \pmod{p-1}. \end{array}$$

Ennek következtében

$$P^2 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & . & -1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \end{vmatrix} \pmod{p}.$$

Ennek a determinánsnak csak egyetlen a zérustól különböző tagja lesz:

$$T = \varepsilon a_{11} a_{2p-1} a_{3p-2} \dots a_{p-23} a_{p-12},$$

a hol a_{ik} a $(p-1)$ -edfokú determinánsunk i -dik sorában álló k -dik elem, ε pedig, a tag előjele, az ismeretes szabály szerint állapítandó meg. Ugyanis

$$\varepsilon = (-1)^I,$$

a hol I az

$$1, p-1, p-2, \dots, 3, 2$$

permutációban foglalt inverziók száma. Mint közvetlenül látható

$$I = (p-3) + (p-4) + \dots + 2 + 1 = \frac{(p-2)(p-3)}{2};$$

tehát

$$\varepsilon = (-1)^{(p-2)\frac{p-3}{2}} = (-1)^{\frac{p-3}{2}},$$

mert $p-2$ páratlan, és így

$$P^2 = T \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} (-1)^{p-1} = (-1)^{\frac{p-3}{2}}, \quad (\text{mod. } p)$$

mivel $p - 1$ páros és így végül ismét

$$P^2 \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$

a mivel a tétel újból bebizonyítva van.

Példák. Ha $p = 29$, akkor

$$P = 1! \cdot 2! \cdot 3! \dots 27!$$

és tételünk szerint, mivel 29 $(4n+1)$ -alakú törzsszám, kell, hogy P a

$$z^2 \equiv -1 \pmod{29}$$

gyöke legyen. A számítás ezt csakugyan igazolja. Ugyanis

$1! \equiv 1$	$2! \equiv 2$	$3! \equiv 6$	
$4! \equiv -5$	$5! \equiv 4$	$6! \equiv -5$	
$7! \equiv -6$	$8! \equiv 10$	$9! \equiv 3$	
$10! \equiv 1$	$11! \equiv 11$	$12! \equiv 13$	
$13! \equiv 5$	$14! \equiv 12$	$15! \equiv 6$	$(\text{mod. } 29)$
$16! \equiv 9$	$17! \equiv 8$	$18! \equiv 1$	
$19! \equiv 10$	$20! \equiv 3$	$21! \equiv 5$	
$22! \equiv 6$	$23! \equiv 7$	$24! \equiv 6$	
$25! \equiv 5$	$26! \equiv 14$	$27! \equiv 1$	

Ha ezeket szorozzuk, kapjuk, hogy

$$P \equiv -12$$

és így

$$P^2 + 1 = 145 = 29 \cdot 5$$

csakugyan osztható 29-czel, tehát P valóban kielégíti a $z^2 \equiv -1 \pmod{p}$ kongruenciát.

Legyen $p = 31$, akkor

$$P = 1! \cdot 2! \cdot 3! \dots 28! \cdot 29!$$

és tételünk értelmében, mivel 31 $(4n+3)$ -alakú törzsszám, P a

$$z^2 \equiv 1 \pmod{31}$$

kongruenciának gyöke lesz, a mit aránylag rövid számolás ismét igazolni fog. Ugyanis

$$\begin{array}{lll}
 1! \equiv 1, & 6! \equiv 7, & 11! \equiv -9 \\
 2! \equiv 2, & 7! \equiv -13, & 12! \equiv -15 \\
 3! \equiv 6, & 8! \equiv -11, & 13! \equiv -9 \\
 4! \equiv -7, & 9! \equiv 6, & 14! \equiv -2 \\
 5! \equiv -4, & 10! \equiv 2, & 15! \equiv 1 \\
 \\
 16! \equiv -15, & 21! \equiv 5, & 26! \equiv 9 \\
 17! \equiv -7, & 22! \equiv -14, & 27! \equiv -5 \\
 18! \equiv -2, & 23! \equiv -12, & 28! \equiv 15 \\
 19! \equiv -7, & 24! \equiv -9, & 29! \equiv 1 \\
 20! \equiv 15, & 25! \equiv -8, &
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{lll} 1! \equiv 1, & 6! \equiv 7, & 11! \equiv -9 \\ 2! \equiv 2, & 7! \equiv -13, & 12! \equiv -15 \\ 3! \equiv 6, & 8! \equiv -11, & 13! \equiv -9 \\ 4! \equiv -7, & 9! \equiv 6, & 14! \equiv -2 \\ 5! \equiv -4, & 10! \equiv 2, & 15! \equiv 1 \\ \\ 16! \equiv -15, & 21! \equiv 5, & 26! \equiv 9 \\ 17! \equiv -7, & 22! \equiv -14, & 27! \equiv -5 \\ 18! \equiv -2, & 23! \equiv -12, & 28! \equiv 15 \\ 19! \equiv -7, & 24! \equiv -9, & 29! \equiv 1 \\ 20! \equiv 15, & 25! \equiv -8, & } \right\} \pmod{31}$$

ezeket ötönként szorozván, kapjuk, hogy

$$P \equiv -5, -15 \cdot 12 \cdot 9, \dots 1 \cdot 7 \equiv -1 \pmod{31}$$

tehát

$$P^2 \equiv 1 \pmod{31}$$

A mikor p $(4n+3)$ -alakú törzsszám, akkor P a

$$\zeta^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

kongruenciát elégíti ki. E kongruencia gyökei:

$$+1, -1,$$

tehát P is vagy a $+1$, vagy a -1 értéket veszi fel a p modulusra vonatkozóan. Kérdés, hogy e két érték közül melyik az, a mely a P -nek megfelel? E kérdésre választ ad a következő tétel:

2. tétel. Ha p $(4n+3)$ -alakú törzsszám, akkor a P 1-gyel vagy -1 -gyel kongruens \pmod{p} , a szerint a mint a p redukált maradéksorában foglalt páratlan számok között páros vagy páratlan számú quadratikuss nem-maradék fordul elő.

E tétel bebizonyítása céljából írjuk föl P -t a következő alakban:

$$P = 1^{p-2} \cdot 2^{p-3} \cdot 3^{p-4} \cdot \dots (p-3)^2 (p-2);$$

és képezzük a p modulusra nézve P -nek LEGENDRE-symbolumát.

Ez lesz:

$$\left(\frac{P}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right)^{p-2} \left(\frac{2}{p}\right)^{p-3} \left(\frac{3}{p}\right)^{p-4} \dots \left(\frac{p-3}{p}\right)^2 \left(\frac{p-2}{p}\right).$$

De mivel a

$$\left(\frac{2k}{p}\right)^{p-2k-1} = +1,$$

mert $p-2k-1$ páros; és

$$\left(\frac{2k+1}{p}\right)^{p-2k-2} = \left(\frac{2k+1}{p}\right),$$

mert $p-2k-2$ páratlan; azért

$$\left(\frac{p}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{3}{p}\right) \left(\frac{5}{p}\right) \dots \left(\frac{p-2}{p}\right) = (-1)^v,$$

a hol v az

$$1, 3, 5, \dots, p-4, p-2$$

sorozatban foglalt quadratikuss nem-maradékok számát jelenti. A

$$\left(\frac{p}{p}\right) \equiv (-1)^v \pmod{p}$$

kongruenciából következik, hogy ha v páros, akkor

$$\left(\frac{p}{p}\right) = +1;$$

de akkor lehetetlen, hogy p , a melyről előbb láttuk, hogy \pmod{p} vagy $+1$ vagy -1 , a -1 -gyel legyen kongruens, mert ekkor kellene, hogy

$$\left(\frac{p}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = -1$$

legyen, mivel p $(4n+3)$ -alakú törzsszám és így nem marad más hátra, mint hogy

$$p \equiv +1 \pmod{p}$$

legyen.

Ha v páratlan, akkor

$$\left(\frac{p}{p}\right) = (-1)^v = -1;$$

de akkor lehetetlen, hogy

$$p \equiv +1 \pmod{p}$$

legyen, mert ekkor

$$\left(\frac{P}{p}\right) = \left(\frac{+1}{p}\right) = +1$$

lenne és így kell, hogy

$$P \equiv -1 \pmod{p}$$

legyen. Ezzel a 2. tétel is teljesen be van bizonyítva.

Legyen például

$$p = 31,$$

akkor a p maradéksorában foglalt páratlan számok:

$$1, 3, 5, 7, \dots, 27, 29;$$

ezeknek LEGENDRE-symbolumait képezvén találjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{31}\right) &= 1, \quad \left(\frac{3}{31}\right) = 1, \quad \left(\frac{5}{31}\right) = 1, \quad \left(\frac{7}{31}\right) = -1 \\ \left(\frac{9}{31}\right) &= 1, \quad \left(\frac{11}{31}\right) = -1, \quad \left(\frac{13}{31}\right) = -1, \quad \left(\frac{15}{31}\right) = -1 \\ \left(\frac{17}{31}\right) &= -1, \quad \left(\frac{19}{31}\right) = 1, \quad \left(\frac{21}{31}\right) = 1, \quad \left(\frac{23}{31}\right) = -1 \\ \left(\frac{25}{31}\right) &= 1, \quad \left(\frac{27}{31}\right) = -1, \quad \left(\frac{29}{31}\right) = -1. \end{aligned}$$

A maradéksor páratlan számai között mindössze 9 quadratikuss nem-maradék fordul elő és így

$$P \equiv 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 29! \equiv (-1)^9 \equiv -1.$$

Legyen $p = 7$, akkor, mivel

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{7}\right) &= 1, \quad \left(\frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{4}{3}\right) = -1, \\ \left(\frac{5}{7}\right) &= \left(\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1, \end{aligned}$$

az

$$1, 3, 5$$

számok között kettő van olyan, mely a 7 modulusnak quadratikuss nem-maradéka, a miből 2. tételünkéből következik, hogy

$$P \equiv 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 5! \equiv (-1)^2 \equiv +1 \pmod{7}.$$

Ezt a közvetetlen számítás is igazolja. Ugyanis

$$\begin{aligned} 1! &\equiv 1, 2! \equiv 2, 3! \equiv -1, 4! \equiv 3, 5! \equiv 1 \pmod{7}; \\ \text{tehát} \quad P &\equiv 1 \cdot 2 \cdot -1 \cdot 3 \cdot 1 \equiv -6 \equiv +1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

II.

Az I. cikkben kifejtett első tétel most már közvetetlenül rávezet bennünket WILSON tételének analogonjára. WILSON tételének lényeges tartalma a következő:

Valamely p egész szám akkor és csak akkor törzsszám, ha fönnáll a

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

kongruencia.

A tétel, a melyet mi WILSON tételének analogonjaként odaállítunk, pedig a következő:

Valamely p egész szám akkor és csak akkor törzsszám, ha

$$II^4 \equiv [1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot (p-2)! \cdot (p-1)!]^4 \equiv 1 \pmod{p} \quad (A)$$

Hogy A) a p törzsszám voltának szükséges feltétele, az idézett tételből rögtön következik. Ha ugyanis p páratlan törzsszám, akkor e tétel értelmében

$$\begin{aligned} P^2 &\equiv [1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot (p-2)!]^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}; \\ \text{tehát} \quad P^4 &\equiv (-1)^{p+1} \equiv +1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Más oldalról WILSON tételéből következik, hogy

$$[(p-1)!]^4 \equiv [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)]^4 \equiv (-1)^4 \equiv +1 \pmod{p}.$$

Ezért

$$II^4 \equiv P^4 [(p-1)!]^4 \equiv +1 \pmod{p}.$$

Ezzel ki van mutatva A) fönnállása, ha p törzsszám.

Hogy fordítva, A) fönnállásából p törzsszám volta is következik, az a következőképen látható be. II^4 minden a p -nél kisebb számmal osztható, $II^4 - 1$ tehát semmilyen p -nél kisebb számmal nem osztható. Ha már most A) fönnáll, akkor

$$II^4 - 1$$

osztható p -vel, tehát ilyen alakú

$$II^4 - 1 = ps,$$

a hol s egész szám. Föltéve, hogy p nem törzsszám, hanem van egy p_1 valódi osztója, úgy hogy

$$p = p_1 p_2, \quad 1 < p_1 < p,$$

akkor a

$$II^4 - 1 \equiv p_1 p_2 s$$

egyenlőségből az következne, hogy $II^4 - 1$ a p -nél kisebb p_1 számmal, a minek lehetlenségét már kimutattuk. Az a föltevés, hogy p az A -nak fönnállásakor összetett szám lehet, absurdumra vezet, a miből következik, hogy p mindig törzsszám, valahányszor A fönnáll.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 június 14.-én tartott üléséből.)

MÁSODFAJÚ NORMÁLGÖRBÉKRŐL.

SZ. NAGY GYULÁ-tól.

Normálgörbének akkor nevezünk egy C_n^p n -edrendű p -ed fajú görbét, ha pontjai oly magas dimenziójú térben helyezkednek el, hogy nincsen magasabb dimenziójú térben fekvő oly C_n^p n -edrendű p -ed fajú görbe, melynek a C_n^p görbe projectiója volna.¹

Ilyen normálgörbék egyenletének előállítása következőképp történik.

Legyen

$$f(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

egy akármilyenrendű síkbeli p -ed fajú görbe egyenlete homogén koordinátákban. Legyen g_n^r az (1) görbén egy egyszerű, fix pontokat nem tartalmazó teljes lineáris pontsorozat.

Jelölje

$$\lambda_0 \varphi_0(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \dots + \lambda_r \varphi_r(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

azt az adjungált görberendszert, amely az (1) görbéből a g_n^r pontsorozatot kimetszi. A (2) egyenletben $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ egymástól lineárisan független ugyanolyan rendű adjungált görbéket, $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ független parametereket jelentenek.

A míg az (x, y, z) pont leírja az (1) görbét, addig az a pont, melynek homogén koordinátái az r dimensionális térben az

¹ L. pl. F. SEVERI: «Lezioni di Geometria Algebrica», Padova, 1908, p. 93—125.

$$x_0 : x_1 : \dots : x_r = \varphi_0(x, y, z) : \varphi_1(x, y, z) : \dots : \varphi_r(x, y, z) \quad (3)$$

egyenlettel értelmezetti x_0, x_1, \dots, x_r , leír egy r dimenziójú (és nem alacsonyabb dimenziójú) térben fekvő C_n^p normálgörbét.

A következőkben egy k dimenziójú lineáris teret S_k -val fogunk jelölni. Az S_k térben fekvő S_{k-1} tereket az olasz geometerek után az S_k tér hypersíkjainak, vagy ha félreértés nem származhatik, egyszerűen hypersíkoknak fogjuk nevezni. Hasonlóképp az S_k tér S_{k-2} tereit az S_k tér hyperegnyeseinek fogjuk hívni.

Az (1) és (3) egyenletekkel előállított C_n^p normálgörbe egy S_r térben fekszik és rendszáma n , minthogy a görbét minden hypersík n pontban metszi.

Ha a g_n^r egyszerű és nem specziális teljes pontsorozat, akkor

$$n - r = p$$

lévén, egy normálgörbe rendszáma annak a térnek dimenzióját, melyben fekszik, éppen fajsámával, p -vel mulja fölül.

Ha $p \geq 1$, akkor léteznek olyan specziális normálgörbék is, melyeknél a rendszám és a tér dimenziójának különbsége kisebb, így például a $p = 2$ esetben föllép egy egyetlen g_2^1 teljes pontsorozat. A g_2^1 -nek megfelelő normálgörbe egydimensionális másodrendű volna, vagyis egy egyenesen fekvő oly pontsorozat, amelynek általában két különböző pontja esik az egyenes egy pontjára.

F. KLEIN¹ az ilyen egydimensionális pontsorozatokat is normálgörbéknek tekinti. Mi azonban az egydimensionális normálgörbék tárgyalásunkból annál is inkább ki fogjuk zárni, mivel $p = 2$ esetén két különböző egydimensionális normálgörbét kellene tekintetbe vennünk: a g_2^1 -nek megfelelő másod- és egy g_3^1 nem specziális pontsorozatnak megfelelő harmadrendű görbét.

Az egydimensionális normálgörbék kizárva, minden másodfajú normálgörbe rendszáma 2-vel magasabb, mint annak

¹ F. KLEIN: «Über unendlichviele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung». Math. Ann. Bd. 17, (1880), p. 133. és köv.

a térnek dimenziója, melyben fekszik, vagy a hogy röviden kifejezhetjük, mint a hozzá tartozó tér dimenziója.

A másodfajú n -ed rendű normálgörbéket a következőkben C_n -nel fogjuk jelölni, a hozzájuk tartozó tér tehát S_{n-2} .

Mielőtt a másodfajú normálgörbékre vonatkozó tételeink kimutatásához hozzáfognánk, meg kell említenünk egy oly tételt, melyre a következőkben szükségünk lesz, s a mely bármily fajú görbékre nézve is igaz.

Ha egy normálgörbét a görbén fekvő pontokból, mint centrumból, alacsonyabb dimenziójú terekre projiciálunk, akkor a kapott projectiógörbék szintén normálgörbék.¹

1. *Másodfajú normálgörbéknek — leszámítva a negyedrendű másodfajú síkgörbét, melynek egy kettőspontja vagy egy csúspontja van — nincsenek kettőspontjai.*

Ha ugyanis egy C_n ($n > 4$) normálgörbének volna egy kettőspontja, akkor a kettősponton és a görbe két tetszés szerinti pontján keresztülvezetett különben tetszés szerinti hypersík (S_{n-3}) a görbét még $n - 4$ pontban metszené. Ezen az $n - 4$ ponton és a kettősponton keresztülmenő hypersíksor a görbéből egy oly g_2^1 pontsorozatot metszene ki, melynek egy pontpárját a tetszés szerint választott két pont alkotná. A C_n normálgörbe tehát végtelen sok g_2^1 pontsorozatot tartalmazna, a mi pedig képtelenség, mert egy másodfajú görbén csak egy g_2^1 , a kanonikus g_2^1 , lép föl.

2. A C_n görbe tetszés szerinti $k + 1$ pontján keresztülvezethetünk egy S_k teret. E szerint tehát léteznek oly S_k terek, melyek a C_n normálgörbét $k + 1$ pontban metszik. Hogy léteznek-e olyan S_k terek, melyek a C_n másodfajú normálgörbét több, mint $k + 1$ pontban metszik, arra a következő tétel adja meg a választ.

Egy C_n n -edrendű másodfajú normálgörbéhez tartozó S_{n-2} tér nem tartalmazhat magában egyetlen oly S_k teret sem, a mely a görbét több mint $k + 1$ pontban metszi, ha $k \leq n - 5$; ellenben tartalmaz ∞^{n-4} számú, a görbét $n - 2$ pontban metsző hyperegyenest (S_{n-4}), a mennyiben a görbe tetszés szerint fölvev

¹ A görbe projiciálására nézve l. SEVERI idézett munkáját p. 109—115.

$n-4$ pontján keresztül mindig megy egy és általában csakis egy oly hyperegyenes, mely a görbét $n-2$ pontban metszi. Ha pedig a C_n normálgörbének van olyan $n-4$ pontja, a melyen keresztül két oly hyperegyenes megy, mely a görbét $n-2$ pontban metszi, akkor azon $n-4$ ponton ∞^1 a C_n görbét $n-2$ pontban metsző hyperegyenes megy keresztül. Oly hyperegyenes, mely a C_n normálgörbét $n-1$ pontban metszené, semmikép sem létezhetik.

Tegyük föl ugyanis, hogy létezik egy oly S_k ($k \leq n-5$) tér, a mely a C_n normálgörbét $k+2$ pontban metszi. Ezen az S_k téren keresztül ∞^m hypersík megy keresztül, ahol

$$m = n - 2 - (k+1) = n - 3 - k \geq 2.$$

Ennélfogva az S_k téren és a C_n görbe két tetszés szerinti pontján keresztülvezethetünk egy hypersíkot, a mely a görbéből még $n-2-(k+2) = n-k-4$ pontot fog kimetszeni. Ezen az $n-k-4$ ponton és az S_k téren keresztül lehet vezetni egy hypersíksort, a mely a C_n normálgörbéből egy oly g_2^1 pontsorozatot metsz ki, melynek egy pontpárja egészen tetszés szerinti. Mint-hogy pedig ez lehetetlen, azért föltevésünk, mely szerint van oly S_k tér, a mely a görbét $k+2$ pontban metszi, ahol $k \leq n-5$, nem állhat meg. Annál kevésbbé lehetséges oly S_k ($k \leq n-5$) tér, mely a görbét $k+2$ -nél több pontban metszené.

Hogy pedig a C_n görbe $n-4$ tetszés szerinti pontján megy egy és általában csak egy oly hyperegyenes, mely a C_n görbét $n-2$ pontban metszi, annak bizonyítása végett projiciáljuk a C_n görbét az $n-4$ ponton átmenő S_{n-5} teret áthaladó hyperegyenesekkel egy oly síkra, a mely az S_{n-5} teret nem metszi. A projectió sikkörbe negyedrendű és vagy irreducibilis, a mikor egyetlen kettőspontja vagy csúcspontja van, vagy pedig reducibilis, a mikor a prejectio tulajdonképen egy kétszeresen számított kúpszelet. Ebből következik, hogy a C_n normálgörbe tetszés szerint fölvett $n-4$ pontján keresztül megy egy és általában csak egy oly hyperegyenes, a mely a C_n görbét $n-2$ pontban metszi. Ha pedig azon $n-4$ ponton keresztül két oly hyperegyenes megy keresztül, mely a görbét $n-2$ pontban metszi, akkor azon $n-4$ ponton keresztülmenő hyper-

egyenesek közül bármely a C_n görbét az $n - 4$ ponton kívül még metsző hyperegyenes $n - 2$ pontban metsző hyperegyenes.

Hogy ez az utóbbi eset is előfordulhat, arra példa egy oly C_5 normálgörbe, mely egy másodrendű kúpfelületen fekszik. Egy ilyen C_5 másodfajú normálgörbét a kúpfelület minden alkotója három pontban metsz.

Egy C_n normálgörbének nem lehet egyetlen egy $n - 1$ pontban metsző hyperegyenes sem. Mert ha volna egy, akkor az azon keresztülmenő hypersíksor egy változó tagja a görbét még egy változó pontban metszené, a minek következtében a görbe pontjai egy paraméter racionális függvényeképp volnának előállíthatók, vagyis a görbe nem másod-, hanem nulladfajú volna.

3. Egy C_n másodfajú normálgörbe bármely $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesén átmenő hypersíksor a görbéből egy \bar{g}_2^1 pontsorozatot metsz ki; minthogy pedig egy másodfajú görbén egyetlenegy g_2^1 pontsorozat, a kanonikus pontsorozat lép föl, azért valamennyi \bar{g}_2^1 pontsorozat a kanonikus g_2^1 pontsorozattal egyezik. Egy C_4 görbén a kanonikus g_2^1 pontsorozatot a kettősponton átmenő sugársor metszi ki, ennél fogva a g_2^1 kétszeres pontjainak száma a C_4 görbe kettőspontjából a görbéhez húzható érintők számával, vagyis hattal egyezik. Ugyanezt az eredményt kapjuk azon C. SEGRETŐL származó általános tétel alapján, a mely szerint egy g_n^r $(r + 1)$ -szeres pontjainak száma egy p -edfajú görbén $(r + 1)(n + rp - r)$.

Egy C_n görbén föllépő g_2^1 6 kétszeres pontja WEIERSTRASS-féle pont, mi azonban ezt a hat pontot rövidség kedvéért TIMERDING után ¹ *főpontoknak* fogjuk nevezni. Az előbbieket szerint tehát a C_n görbe bármely $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesén átmenő hypersíksorban hat olyan van, mely a görbét két egybeeső pontban metszi, illetőleg érinti, a hat érintéspont mindig a görbe hat főpontja.

Miként a C_n bármely $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesén keresztülmenő hypersík a görbéből egy a g_2^1 -hez tartozó

¹ H. E. TIMERDING: «Über eine Raumkurve fünfter Ordnung», Crelle's Journal, Bd. 123., (1901), p. 284—311.

pontpárt metsz ki, akként megfordítva a g_2^1 bármely pontpárján keresztülmenő hypersík a görbéből még oly $n - 2$ pontot metsz ki, melyek egy hyperegyenesen vannak.

Legyen S_{n-3} egy oly hypersík, mely a g_2^1 pontsorozat egy tetszés szerint választott G pontpárján keresztülmegy. Ez az S_{n-3} hypersík a C_n görbét még $n - 2$ pontban metszi, melyek közül $n - 4$ pontot úgy válasszunk ki, hogy a még hátramaradó pontpár ne képezze a g_2^1 egy pontpárját. A kiválasztott $n - 4$ ponton keresztülmenő S_{n-4} $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesről ki akarjuk mutatni, hogy az a hátramaradó, g_2^1 -hez nem tartozó, pontpáron is keresztülmegy. Az S_{n-4} -en és a G pontpár egyik pontján keresztülmenő S'_{n-3} hypersík az előbbieket szerint a G másik pontján is keresztülmegy. Az S_{n-3} és S'_{n-3} hypersíkoknak, tehát $n - 2$ görbén fekvő pontjuk közös; ebből pedig következik, hogy a két hypersík egybeesik. Nem lehetséges ugyanis, hogy az S_{n-3} és S'_{n-3} hypersíkoknak csak az $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesük közös, mert ha ez igaz volna, akkor az S_{n-3} a hyperegyenesen fekvő $n - 2$ ponton kívül a C_n görbét még egy g_2^1 -hez tartozó pontpárban metszené, a mi pedig föltevésünkkel ellentézik.

Ebben a pontban nyert tételeinket következőképen foglalhatjuk össze:

Egy másodfajú n -edrendű C_n normálgörbe bármely $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesén átmenő hypersíksor a görbén föllépő g_2^1 kanonikus pontsorozatot metszi ki és a g_2^1 egy tetszés szerinti pontpárján keresztülhaladó hypersíkok bármelyike oly $n - 2$ pontot metsz ki a görbéből, melyek egy hyperegyenesen fekszenek.

A C_n görbén föllépő g_2^1 hat kétszeres pontját főpontoknak nevezvén, a C_n görbe bármely $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesén átmenő hypersíksorban hat érintő hypersík van, a hat érintéspont mindig a görbe hat főpontja.

Megjegyezzük még, hogy egy $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesen átmenő hypersíksorban csak azokat a hypersíkokat tekintjük érintő hypersíkoknak, melyeken a g_2^1 megfelelő pontpárja egybeesik.

4. Két a C_n görbét $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesen

keresztülmenő hypersíksor hypersíkjai között létesítsünk egy kölcsönösen egyértékű vonatkozást oly módon, hogy a két hypersíksorban oly két hypersíkot tekintünk megfelelőnek, melyek a görbéből a g_2^1 -nek ugyanazt a pontpárját metszik ki. Ez a kölcsönösen egyértelmű vonatkozás szükségképen projectivitás.

Hasonlóképpen projectivitás az a kölcsönösen egyértelmű vonatkozás, melyet úgy kapunk, hogy a C_n görbe tetszés szerint választott $n - 5$ pontján és a g_2^1 G_1 , illetőleg G_2 pontpárján átmenő két hypersíksorban oly két hypersíkot tekintünk megfelelőnek, melyek az $n - 5$ ponton átmenő ugyanazon $n - 2$ pontban metsző hyperegyenesben metszik egymást.

Egy C_n n -edrendű másodfajú normálgörbén föllépő g_2^1 pontpárjait összekötő egyenesek egy nulladfajú $(n - 3)$ -adrendű torz normálfelületet alkotnak. Azért normálfelületet, mert a felület rendszámához képest a lehető legmagasabb dimenziójú térhez, S_{n-2} -höz tartozik és nem degenerál.

Minthogy ∞^{n-4} számú a C_n görbét $n - 2$ pontban metsző hyperegyenes van, azért ugyanannyi projectiv hypersíksor megfelelő hypersíkjainak metszővonalaként állíthatók elő a kérdéses normálfelület alkotói. Ebből pedig következik, hogy a kérdéses normálfelület előállítható $n - 3$ projectiv hypersíksor képződményeként. Ezzel egyszerismind előbbi állításunk igazolva van.¹

Ama tétel alapján, hogy egy nulladfajú torzfelületnek minden alacsonyabb dimenziójú térbe való projectiója torzfelület,² azt találjuk, hogy bármely másodfajú síkbeli, illetőleg közönséges térbeli n -edrendű görbén a g_2^1 pontpárjait összekötő egyenesek egy $(n - 3)$ -adrendű síkgörbét, illetőleg $(n - 3)$ -adrendű torzfelületet burkolnak, melyek fajszáma null.

Közönséges térbeli másodfajú görbékre ezt a tételt más gondolatmenettel JAN DE VRIES is lehozta.³

¹ L. pl. E. BERTINI: «Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi», Pisa, 1907 p. 196, 285 és köv.; C. SEGRE: «Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles mêmes», Math. Ann. Bd. 27., (1886), p. 299.

² L. BERTINI idézett munkáját p. 284.

³ JAN DE VRIES: «Over ruimtekrommen van het geslacht twee, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 1908, p. 871 s köv.

A C_5 normálgörbén a torzfelület másodrendű, a melynek egyik rendszerbeli sugárserege metszi ki a C_5 -ön föllépő g_2^1 pontsorozatot. Minthogy pedig közönséges tér esetén a hypereggyenesek is egyenesek, azért a C_5 trisecansai a másik rendszerbeli sugársereget alkotják. A két rendszerbeli sugarak között a görbe egy (2, 3) rokonságot állapít meg.¹

Ebben a pontban kapott főbb eredményeinket következőkép foglalhatjuk össze:

Egy C_n n -edrendű másodfajú normálgörbe két $n-2$ pontban metsző hypereggyenesén átmenő két hypersíksor hypersíkjai között a görbén föllépő g_2^1 pontpárjai projectív vonatkozást létesítenek, a mely vonatkozásban két oly hypersík felel meg egymásnak, a melyek a g_2^1 ugyanazon pontpárján mennek keresztül. Hasonlókép projectív a vonatkozás a g_2^1 két pontpárján és a C_n görbe $n-5$ más pontján átmenő két hypersíksor hypersíkjai között, ha a megfelelő hypersíkok az $n-5$ ponton átmenő ugyanabban az $n-2$ pontban metsző hypereggyenesben metszik egymást.

A g_2^1 pontpárjait összekötő egyenesek egy $(n-3)$ -adrendű nulladfajú torz normálfelületet alkotnak. A felületnek hat alkotója érinti a C_n normálgörbét.

5. E. BERTININEK $(n-2)$ -szeres ponttal bíró n -edrendű görbék terén végzett vizsgálataiból következik, hogy egy C_4 negyedrendű másodfajú görbén a 6 főpont egy kúpszeleten fekszik. Ez a kúpszelet és a görbe kettőspontja meghatároz egy másodfokú inversiót, mely a görbét önmagába viszi át. Ennél az inversiónál a görbének g_2^1 -hez tartozó pontpárjai önmagukba mennek át.²

Ebből pedig következik, hogy egy C_n másodfajú normálgörbe tetszés szerinti $n-4$ pontját tartalmazó S_{n-5} téren keresztülmenő hypereggyenesekkel lehet egy oly hyperfelületet alkotni,

¹ A C_5 térbeli normálgörbére nézve v. ö. H. E. TIMERDING idézett munkáját.

² Lásd G. KOHN encyklopédiacikkét, Encykl. d. math. Wiss. Bd. III. C. 5. (1909), p. 547. Az idézett tételek bizonyításukkal együtt megtalálhatók «Negyedrendű másodfajú görbékről» cz. dolgozatomban. Math. és Phys. Lapok 1916, (sajtó alatt).

mely a 6 főponton keresztülmegy s a melynek minden az S_{n-5} tért nem metsző sikkal való metszése kúpszelet. Ez a hyperfelület, melyet a következőkben F_2^{n-3} -vel fogunk jelölni, másodrendű hyperkúp, melynek csúcsa az S_{n-5} tér. Az F_2^{n-3} hyperkúp és a C_n görbét $n-2$ pontban metsző S_{n-5} -ön keresztülmenő hyperregyenes egy másodfokú inversiót határoz meg az S_{n-5} téren keresztülmenő ∞^2 hyperregyenes között. E szerint az inversio szerint oly hyperregyenesnek, a mely a C_n görbét S_{n-5} -ön kívül egy P pontban metszi, az a hyperregyenes felel meg, mely a C_n görbét oly Q pontban metszi, mely a g_2^1 pontsorozatban P -nek párját képezi. Az F_2^{n-3} hyperkúp tehát a C_n görbén föllépő g_2^1 kanonikus pontsorozat párjait harmonikusan választja el egymástól.

Ezeknek a tételeknek direkt igazolása is könnyen elvégezhető azon elv alapján, melyet H. G. ZEUTHEN alkalmaz tan-könyvében a kettősvizony bizonyos feladatokban való állandóságának kimutatására.¹

A fentebbi általános tételből következik, hogy, ha egy a C_n görbét $n-3$ pontban metsző hyperregyenesen keresztülmenő hypersíksor egy hypersíkja az $n-3$ ponton kívül a C_n görbét három főponton metszi, akkor ebben a hypersíksorban van egy olyan hypersík, a mely a C_n görbéből a másik három főpontot metszi ki. És pedig azért következik ez a tétel az előbbiből, mert most annak az F_2^{n-3} hyperkúpnak, melynek csúcsa a fölvett $n-3$ pont közül bármely $(n-4)$ -en keresztülmenő S_{n-5} , két hypersíkra kell degenerálnia.

Nevezzünk rövidség kedvéért egy ilyen hypersíkpárt egyszerűen hypersíkpárnak, akkor egy hypersíkpár hypersíkjai (mint F_2^{n-3} hyperkúp) harmonikusan választják el a C_n görbének g_2^1 -hez tartozó pontpárjait. Ha a C_n görbe rendszáma négynél nagyobb, akkor az olyan hypersíkpárok száma, melyek hypersíkjai különböző három-három főpontot tartalmaznak, 10; míg ellenben egy C_4 görbe 6 főpontja általában nem fekszik két egyenesen.

¹ H. G. ZEUTHEN: Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie, Leipzig (1914), p. 84—86.

Egy C_5 görbére vonatkozólag a síkpárok tulajdonságait már TIMERDING kimutatta.¹

Ebben a pontban már kimutatott főtételünket következőkép fejezhetjük ki:

Egy C_n n -edrendű másodfajú normálgörbe bármely $n-4$ pontján átmenő S_{n-5} tér egy oly másodrendű hyperkúpnak képezi csúcsát, a mely a 6 főponton keresztülmegy. Ez a hyperkúp és az S_{n-5} -ön keresztülmenő, a görbétn -2 pontban metsző hyperegyenes egy másodfokú inversiót határoz meg az S_{n-5} téren keresztülmenő hyperegyenesek között; ez a másodfokú inversio két oly hyperegyenest, mely egy g_2^1 -hez tartozó pontpárt projiciál, egymásba visz át. A hyperkúp tehát a g_2^1 minden egyes pontpárját harmonikusan választja el.

6. Ha két C_n és C_m normálgörbe pontjainak egymásra való kölcsönösen egyértékű vonatkozását akarjuk vizsgálni, akkor elégséges két ugyanazonrendű normálgörbére szorítkozni, mert ha nem volnának egyenlőrendűek, akkor a magasabbrendű görbét a görbén fekvő pontokból projiciálva, a másikkal egyenlőrendű normálgörbébe lehet átvinni.

Legyen C_n és C'_n két ugyanazon n rendszámú másodfajú görbe, melyeknek pontjai között birationális correspondentia áll fenn. Jelöljük ezt a birationális correspondentiát T -vel.

Mint hogy pedig egy birationális correspondentia egy teljes lineáris pontsorozatot teljes lineáris pontsorozatba visz át,² azért a T birationális correspondentia a C_n görbén föllépő g_2^1 kanonikus pontsorozatot a C'_n görbe g_2^1 kanonikus pontsorozatába, a C_n görbén föllépő egy g_3^1 pontsorozatot pedig a C'_n görbe egy g_3^1 pontsorozatába stb. viszi át. Ebből a 3. és 4. pontban kimondott tételek alapján következik, hogy a T correspondentia a C_n és C'_n görbék egy-egy tetszés szerinti $n-2$ pontban metsző hyperegyenesén átmenő hypersíksorok hypersíkjai között projectiv vonatkozást létesít, a mely projectiv vonatkozásban főponton átmenő hypersíknak főponton átmenő hypersík felel meg a két hypersíksorban. Hasonlókép, ha S_{n-4} és S'_{n-4} oly a C_n illető-

¹ L. az id. h.

² SEVERI: Lezioni etc. p. 206.

leg C'_n görbét $n - 3$ pontban metsző hyperegyenesek, hogy a rajtuk keresztülmenő hypersíksorok által a két görbéből kimetszett g_3^1 , illetőleg $g_3'^1$ pontsorozatokban egy G , illetőleg G' a T correspondentia szerint egymásnak megfelelő pontesoport, akkor a T correspondentia a két hypersíksor hypersíkjai között projectiv vonatkozást létesít.

Ez utóbbihoz meg kell még jegyeznünk, hogy, ha az S_{n-4} hyperegyenes a C'_n görbét csak $n - 3$ pontban metszi, akkor a rajta keresztülmenő hypersíksor által kimetszett g_3^1 egyetlen pontesoportja sem tartalmazhat a kanonikus g_2^1 pontsorozathoz tartozó pontpárt. Ha ugyanis a g_3^1 egy G pontesoportjának két pontja a g_2^1 egy pontpárja volna, akkor a reductio-tétel¹ szerint g_3^1 egy fix pontot tartalmazna és emiatt S_{n-4} nem $n - 3$, hanem $n - 2$ pontban metszené a C'_n görbét. De nem lehet a $g_3'^1$ pontsorozatnak sem oly pontesoportja, a mely a kanonikus pontsorozat egy csoportját magában foglalná, mert akkor redukálódna és így a g_3^1 -nek is redukálódni kellene.

Ezek alapján bármely n rendszámra általánosíthatjuk következő tételünket:² ha két másodfajú negyedrendű görbe, C_4 és C'_4 , pontjai között egy T birationális correspondentia van, akkor ez a T a két görbe síkjainak pontjai között is kölcsönösen egyértékű vonatkozást létesít.

Vegyünk föl a C_n görbéhez tartozó S_{n-2} térben $n - 3$ tetszőszerinti, de egymástól különböző, a görbét $n - 2$ pontban metsző hyperegyenest és egy oly S_{n-4} hyperegyenest, mely a C_n görbét csak $n - 3$ pontban metszi. Hasonlókép a C'_n görbéhez tartozó S'_{n-2} térben is vegyünk föl tetszés szerinti $n - 3$ különböző, a görbét $n - 2$ pontban metsző hyperegyenest és a C'_n görbét csak $n - 3$ pontban metsző oly S'_{n-4} hyperegyenest, hogy a T correspondentia az S_{n-4} és S'_{n-4} tengelyű hypersíksorok között projectiv vonatkozást létesítsen, a mi pedig az $n > 4$ esetben mindig lehetséges.

¹ M. NOETHER: Beweis eines abgebräisch-funktionentheoretischen Satzes des Herrn Weierstrass, Journal f. Mathematik Bd. 97, (1884), p. 224 vagy: Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen, Math. Ann. Bd. 37, (1890), p. 424.

² Id. h.

Az előbb kimutatott tételek szerint a C_n és C'_n görbék pontjai között fennálló T correspondentia olyan, hogy az S_{n-2} térben fölvevett $n-2$ hypersíksor hypersíkjait az S'_{n-2} tér megfelelő sorrendben vett $n-2$ hypersíksorjának hypersíkjaiira projectiv módon vonatkoztatja.

Legyen az S_{n-2} tér egy tetszés szerinti pontja P és legyen P' az S'_{n-2} tér amaz $n-2$ hypersíkjának metszéspontja, a mely az S_{n-2} térben fölvevett $n-2$ hypersíksor P ponton keresztülmenő hypersíkjainak projectiv módon megfelel; akkor az a kölcsönösen egyértelmű vonatkozás, a mely az S_{n-2} tér P pontjának az S'_{n-2} tér P' pontját felelteti meg, nemcsak a C_n és C'_n görbék pontjai között, hanem egyszersmind az S_{n-2} és S'_{n-2} tér pontjai között is birationális correspondentia.

Ennélfogva kimondhatjuk a következő tételt:

Ha C_n és C'_n két ugyanazon n -rendű másodfajú, normál-görbe pontjai között egy birationális correspondentia áll fenn, akkor azt a birationális correspondentiát ki lehet egészíteni (és pedig, ha $n > 4$, végtelen sok különböző módon) úgy, hogy az a két görbéhez tartozó S_{n-2} , illetőleg S'_{n-2} tér pontjait is kölcsönösen egyértelműleg vonatkoztassa egymásra.

Ez a tétel áll akkor is, ha a C_n és C'_n görbék egymástól nem különböznek.

7. Hogy két másodfajú negyedrendű görbe: C_4 és C'_4 pontjai között birationális correspondentia létezzék, arra nézve szükséges és elégséges, hogy a C_4 illetőleg C'_4 görbe kettőspontjából kiinduló s a főpontokon keresztülmenő 6—6 sugár között projectiv vonatkozást lehessen létesíteni. Ha a 6—6 sugár között k különböző projectiv vonatkozást lehet létesíteni, akkor a két görbe pontjai között $2k$ birationális correspondentia létezik.

Ha a 6—6 sugár között lehet projectiv vonatkozást létesíteni, az általában egyféleképp lehetséges. Több különböző projectivitas a 6—6 sugár között csak azok speciális, singuláris helyzete mellett lehetséges; ilyenkor a megfelelő birationális correspondentiákat is singulárisoknak nevezzük.¹

Mínthogy két másodfajú normálgörbe, C_n és C'_n projiciá-

¹ L. idézett dolgozatomat.

lással C_4 , illetőleg C'_4 normálgörbékbe projiciálható, azért a szükséges és elégséges feltétel arra nézve, hogy a C_n és C'_n görbék pontjai között egy birationális correspondentia álljon fenn, az, hogy egy-egy $n-2$ pontban metsző hyperegyenesen keresztülmenő az a $6-6$ hypersík, a mely a $6-6$ főpontot projiciálja, projectiv vonatkozásba legyen hozható. Ha a most említett tételekben szereplő $6-6$ sugarat ezzel a $6-6$ hypersíkkal helyettesítjük, akkor azok n -edrendű másodfajú normálgörbékre is állani fognak.

Ennélfogva a következő tételeket mondhatjuk ki:

Két (különböző vagy egybeeső) C_n és C'_n másodfajú n -edrendű normálgörbe pontjai között csak akkor, de akkor mindig létezik birationális correspondentia, ha a két görbe egy-egy $n-2$ pontban metsző hyperegyenesén keresztülmenő azon $6-6$ hypersík között, a mely a $6-6$ főpontot projiciálja, projectiv vonatkozást létesíthetünk. Ha e $6-6$ hypersík között k számú különböző projectivitás létezik, akkor a C_n és C'_n görbe pontjai között $2k$ birationális correspondentia van.

8. Ha C_n és C_m másodfajú görbék pontjai között van birationális correspondentia, akkor annyi van, mint a hány különböző birationális correspondentia létezik a C_n görbe pontjai között.

Ha ugyanis

$$S_1, S_2, \dots, S_k$$

jelöli azokat a birationális transformatiókat, melyek a C_n görbét önmagába viszik át (a melyek tudvalevőleg csoportot alkotnak), és ha T egy oly birationális transformatio, a mely a C_n görbét C_m -be viszi át, akkor az

$$S_1T, S_2T, S_3T, \dots, S_kT$$

transformatiók kimerítik az összes birationális transformatiókat, melyek a C_n görbét C_m -be viszik át. Ha ugyanis volna egy ezektől különböző R birationális transformatio, a mely a C_n -t C_m -be vinné át, akkor RT^{-1} oly birationális transformatio volna, a mely C_n -t önmagába vinné át s így egy S_i transformatióval egyeznék, tehát $RT^{-1} = S_i$ volna, a miből $R = S_iT$ volna. Ez pedig az előbbi sorban előfordul.

Minthogy a C_n görbe egy $n - 2$ pontban metsző hyper-egyenesén keresztülmenő az a 6 hypersík, a mely a főpontokat projiciálja, legalább is oly módon projectiv önmagával, hogy azon projectivitásban megfelelő hypersíkok egybeesnek, azért az előbbi pontban kimondott tétel szerint a C_n görbe pontjai között mindig van legalább két birationális correspondentia. Az egyik az involutorius I birationális correspondentia, a mely a görbe egy P pontjának azt a Q pontot felelteti meg, mely P -vel együtt a C_n görbén föllépő η^1 kanonikus pontsorozat egy pontcsoportját alkotja, a másik birationális correspondentia pedig a I correspondentia ismétlése, az $I^2 = E$ identikus correspondentia, a melynél a görbe minden pontja önmagába megy át. E két correspondentián kívül a C_n görbe pontjai közt általában nincs több birationális correspondentia, ha pedig van, akkor azon correspondentiák singularisok s a görbe is singularis.

Egy C_n görbének akkor van singularis correspondentiája, ha egy $n - 2$ pontban metsző hypereggyenesén átmenő hypersíksor hypersíkjai között lehet oly projectiv vonatkozást létesíteni, a melyben bármely főponton átmenő hypersíknak főponton átmenő hypersík felel meg és a mely vonatkozásban nem minden hypersík esik egybe a megfelelőjével. Hogy ez mikor és hányféleképp következhetik be, az oly hatodrendű binær formák vizsgálatára vezet, a melyeknek vannak önmagukba való lineáris substitutiói. Ezt az algebrai feladatot O. BOLZA oldotta meg minden esetre nézve.¹

BOLZA eredményeit geometriailag interpretálva, az a hat singularis eset, a mikor a hat hypersík önmagával többféle módon projectiv, a BOLZÁNÁL fölírt sorrendben a következő:

I. A 6 hypersík egy involúciónak képezi 3 pár hypersíkját,² azaz másszóval létezik a hypersíksorban oly két hypersík,

¹ O. BOLZA: «On Binary Sextics with Linear Transformations into Themselves». American Journal of Math., Tom. X., (1887), p. 47—70. Kivonatossan megjelent német nyelven a Math. Ann. 30. kötetében (1887), p. 1—7. V. ö. A. WIMAN: «Über die hyperelliptischen Kurven und diejenigen vom Geschlechte $p=3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen», Stockholm, Bihang etc. Bd. XXI. Afd. I. N:01. p. 7—8.

² SALMON: «Algebra der linearen Transformationen», p. 346.

mely mind a három pár hypersíkot harmonikusan választja el. Ekkor a projectivitások száma 2, a csoportja pedig másodrendű ciklikus csoport.

II. A 6 hypersík közül 5 ciklikusan projectív a hatodikra vonatkozólag, a mely a ciklikus projectivitás kettős hypersíkját alkotja. A projectivitások csoportja ekkor ötödrendű ciklikus csoport.

III. A 6 hypersík közül egy hypersíkpár a másik két párt harmonikusan választja el. Ilyenkor a projectivitások csoportja negyedrendű diédercsoport.

IV. A 6 hypersík két olyan három-három hypersíkból álló csoportra esik szét, a melyek a hypersíksor ugyanarra a két hypersíkjára vonatkozólag ciklikusan projectívek.¹ Ebben az esetben a projectivításcsoport hatodrendű diédercsoport.

V. A 6 hypersík ciklikusan projectív. Ekkor a projectivításcsoport 12-edrendű diédercsoport.

VI. A hypersík oly 3 párba bontható, melyek közül bármelyik pár a másik két párt harmonikusan választja el.² A projectivitások csoportja ekkor az oktaédercsoport, rendszáma tehát 24.

A C_n görbe egy $n - 2$ pontban metsző hyperegnyesen keresztülmenő hypersíksor hypersíkjai között fennálló bármely projectivitás a g_2^1 pontsorozatot önmagába viszi át. Ebből következik, hogy minden singularis projectivitáshoz (a melyben tehát főponton átmenő hypersíknak főponton átmenő hypersík felel meg) a C_n görbe pontjai között fennálló két birationális correspondencia tartozik a szerint, hogy a C_n görbe egy pontjának a rajta keresztülmenő hypersíknak megfelelő hypersíkon fekvő pontpár egyik vagy másik pontját feleltetjük meg. Az egyik correspondenciából a másikat úgy kapjuk, hogy azt az I correspondenciával kombináljuk.

Az egyes csoportokba tartozó C_n görbék pontjai között létező összes birationális correspondenciák számát a megfelelő csoport megjelölésével a következő sor tünteti föl:

¹ CLEBSCH: «Theorie der binären algebraischen Formen», 1872, p. 443.

² CLEBSCH: id. h. p. 176—177, p. 443.

I. 4; II. 10; III. 8; IV. 12; V. 24; VI. 48.

Az I. csoportba tartozó singularis C_n görbék két független modulussal bírnak, vagyis ∞^2 oly C_n görbe van az I. csoportban, melyek egymásba nem vihetők át biracionális transformatióval. A III. és IV. csoportba tartozó singularis C_n görbéknek egy független modulusuk van, ellenben a II., V., illetőleg VI. csoportba tartozó C_n görbék modulusai teljesen határozottak. E három csoport bármelyikébe oly singularis C_n görbék tartoznak, melyek birationális transformatióval egymásba vihetők át.¹

Valamennyi singularis C_n görbét két osztályba is be lehet sorolni. Az első osztályt képeznék a II. csoportba tartozó görbék, a második osztályt pedig a többi öt csoportba tartozók. A III. és IV. csoport ugyanis az I. csoportnak alosztálya, az V. és VI. csoport viszont a III. és IV. csoport alosztálya.

Ezek alapján a következő tételeket mondhatjuk ki:

Az összes singularis másodfajú görbék 6 csoportba oszthatók, a szerint a mint pontjaik között 4, 10, 8, 12, 24 vagy 48 különböző birationális correspondentia létezik. Az első csoportba tartozó (4 birationális correspondentiával bíró) singularis másodfajú görbéknek két, a harmadik és negyedik csoportba tartozóknak egy-egy független modulusuk van, míg a többi három csoportba tartozó görbék modulusai teljesen megvannak határozva úgy, hogy e három csoport akármelyikébe tartozó görbék birationális transformatióval egymásba vihetők át.

A tétel megfogalmazásában nem tettük ki a normálgörbe szót, minthogy tételünk bármily másodfajú görbére áll, a mennyiben bármilyen másodfajú görbét biracionális transformatióval át lehet vinni egy normálgörbébe.

Kimondott tételünkhöz hasonló tétel áll két singularis másodfajú görbe pontjai között fennálló birationális correspondentiákra nézve, a mint ez az e pont elején mondottakból következik.

9. A C_n és C'_n normálgörbék pontjai között fennálló T bira-

¹ L. BOLZA idézett munkáját.

tionalis correspondentia akkor és csak akkor collineatio, ha az egyik görbe egy hypersíkján fekvő n pontnak oly n pont felel meg a másik görbén, melyek szintén egy hypersíkon fekszenek. Következik ez abból, hogy a hypersíkok összessége a két görbéből egy-egy \mathcal{C}_n^{n-2} teljes pontsorozatot metsz ki és a T birationalis correspondentia a C_n egy teljes pontsorozatát a C_n ugyanolyan rendű teljes pontsorozatába viszi át.

Ebből következik, hogy két oly hatodrendű másodfajú normálgörbének, melyeknek főpontjai egy-egy hypersíkon fekszenek, egymásra való összes birationalis correspondentiái, vagy egy ilyen C_6 görbének önmagába átvivő birationalis correspondentiái mind collineatiók. Következik ez azért, mert minden birationalis correspondentiában főpontnak főpont felel meg. Egy ilyen C_6 görbének tehát önmagába való birationalis transformatiói a hozzátartozó S_4 tér ama és csakis ama collineatiói, melyek a 6 főpont rendszerét önmagába viszik át.

Hasonlóképp collineatio az I birationalis correspondentia oly C_4 görbén, melynek négy főpontja egy egyenesen, és oly C_5 görbén, a melynek 5 főpontja egy síkon van. Mindkét collineatio harmonikus centralis collineatio, homolog collineatio. A C_4 görbén a collineatio centruma a kettőspont, a melybe két főpont esik, a tengely pedig az az egyenes, melyen négy főpont van. A C_5 görbén pedig a tengelysík az a sík, mely 5 főpontot tartalmaz, a centrum pedig a hatodik főpont.

Az ilyen C_5 görbét tartalmazó másodrendű felület oly kúp, melynek csúcsa a hatodik főpont.

Mindezek könnyen beláthatók az 5. pontban mondottak alapján.

A most tárgyalt C_6 , C_5 , C_4 speciális tulajdonságú görbéket egy C_8 görbe projectiójaként állíthatjuk elő. Messe a C_8 görbe 6 főpontján átmenő hypersík a görbét még P és Q pontban. Jelöljön S_1 , \bar{S}_2 , illetőleg \bar{S}_3 oly egyenest, a mely P -n és Q -n megy keresztül, illetőleg oly síkot, mely P -n és Q -n és egy főponton, illetőleg oly teret, a mely P -n és Q -n és két főponton megy keresztül, akkor a C_8 görbe projectiója \bar{S}_1 -ből egy S_4 -be, \bar{S}_2 -ből egy S_3 -ba, illetőleg \bar{S}_3 -ból egy S_2 -be a kívánt tulajdonságú C_6 , C_5 , illetőleg C_4 görbe lesz.

10. Egy C_n reális normálgörbe, a melynek ugyanis ∞_1 reális pontja van, 3 különböző menetből állhat, minthogy a görbe fajszáma 2. Két menet csak akkor metszheti egymást, ha $n=4$, minthogy egy C_n $n > 4$ normálgörbének nincs kettőspontja.

Legyen S_{n-4} egy oly reális hyperegyenes, mely a C_n görbét $n-2$ pontban metszi és nevezzük rövidség kedvéért az S_{n-4} -en keresztülmenő hypersíksorban azt a 6 hypersíkot, a melyek a C_n görbe főpontjain mennek keresztül és az 3. pontban kimutatott tétel szerint a C_n görbét azokban a pontokban érintik, *főhypersíkoknak*.

Minthogy a hypersíksor egy hypersíkja a C_n görbét (az S_{n-4} hyperegyenesen fekvő $n-2$ ponton kívül) legfeljebb két reális pontban metszi, azért a C_n görbe egy menete sem léphet át főhypersíkot. Ebből pedig következik, hogy csak egy görbemenet fekehetik két szomszédos főhypersík között és a két főhypersík érinti a görbemenetet. Ebből továbbá következik, hogy az egy görbemenetet érintő főhypersíkok száma 2 vagy 0. Van olyan főhypersík, mely a menetet érinti, ha van oly hypersík az S_{n-4} hypersíksorban, a mely S_{n-4} -en kívül reális pontban nem metszi a menetet, ellenben nincs a menetet érintő főhypersík, ha minden S_{n-4} -en keresztülmenő hypersík S_{n-4} -en kívül reális pontban metszi a C_n görbét.

A mondottakból következik, hogy, ha a 6 főpont s így a 6 főhypersík reális, akkor a C_n reális görbének három menete van. Ha csak 4 főpont reális, akkor a C_n görbének két menete, ha pedig csak 2 főpont reális vagy egy sem, akkor a reális C_n görbének csak egy menete van.¹

Hogy ezek a különböző esetek nemcsak lehetségesek, hanem meg is valósíthatók, következik abból, hogy C_4 görbékkel valamennyi eset realisálható.²

Minthogy minden reális másodfajú görbe reális C_n normálgörbe reális projectiójának fogható fel és minthogy egy ilyen projectiónál a reális menetek és a reális főpontok (vagyis a

¹ V. ö. «Sík- és térbeli algebrai görbék reális meneteiről» cz. dolgozatomat. Math. és Természettud. Értesítő, 1915, 1. pont.

² L. «Negyedrendű ... stb.» cz. idézett dolgozatomat.

görbén levő g_2^1 reális kettős pontjainak) száma ugyanaz marad, azért bármely reális másodfajú görbére áll a következő tétel:

Egy reális másodfajú görbénél 3, 2, illetőleg 1 reális menete van, a szerint a mint reális főpontjainak száma 6, 4, illetőleg 2 vagy 0.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 október 18.-án tartott üléséből.)

AZ ALGEBRAI SZÁMTESTEK ELMÉLETÉHEZ.

BAUER MIHÁLY-tól.

1. §. Az algebrai számtest meghatározása congruentia-feltételekkel.

1. Az

$$f_1(x) = 0, \text{ illetve } f_2(x) = 0$$

egész racionális együtthatójú és irreducibilis egyenletek egy-egy gyöke adja meg a K_1 illetve K_2 számtestet. A testekhez tartozó GALOIS-féle tartományokat jelöljük G_1 illetve G_2 -vel. Ama p racionális törzsszámok halmazát, melyekre valamely

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (1)$$

congruentia baloldala lineáris tényezőkre bomlik, nevezzük az A)-halmaznak, míg ama törzsszámok halmaza, melyekre (1) -nek legalább egy racionális egész gyöke van, legyen a B)-halmaz.

Ismeretes, hogyha az

$$f(x) = 0 \quad (1^*)$$

racionális egész együtthatójú egyenlet irreducibilis, akkor egy fix gyöke által meghatározott K számtestben a következő tények érvényesek: Ama racionális törzsszámok halmaza, melyek K -ban mint különböző elsőfokú törzsideálok szorzata állíthatók elő, véges számú kivétellel megegyezik az A)-halmazzal, míg ama törzsszámok halmaza, melyek K -ban legalább egy elsőfokú törzsideállal birnak, véges számú kivétellel azonos a B)-halmazzal. E folyóiratban régebben a következő tételt bizonyítottam be.¹

¹ XX. k. KRONECKER egy tételéről. Az összetett számtestekről. 470—476. l. 1902.

I. A G_1 test akkor és csak akkor tartalmazza a G_2 tartományt, ha az A_1 halmaz véges számú kivétellel része A_2 -nek.

A bebizonyítás egyrésről KRONECKER- és FROBENIUSNAK az osztályszám-formulából kiinduló vizsgálataira, más oldalról a DEDEKIND-féle szabályra támaszkodik, mely megadja valamely törzsszám felbontását egy GALOIS-féle tartomány alárendelt tartományaiiban.¹ (A szabály mutatis mutandis relativ testekre is érvényes.) Ugyanezekkel a segédeszközökkel a jelen alkalommal a következő tételt fogom bebizonyítani.

I⁺. A K_1 test akkor és csak akkor tartalmazza a G_2 tartományt, ha a B_1 -halmaz véges számú kivétellel része A_2 -nek.

A tárgyalás menetéből látszani fog, hogy az I., mint az I⁺-tétel alkalmazása fogható fel.

2. Ha a p törzsszám a G GALOIS-féle test discriminansának nem tényezője, akkor

$$p = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_e,$$

a hol a \mathfrak{P}_i -k különböző f -edfokú törzsideálokat jelentenek. Ha \mathfrak{G} a test csoportja, akkor minden \mathfrak{P}_i tényezőhöz tartozik egy \mathfrak{H}_i alcsoport, mely őt változtatlanul hagyja. (HILBERT szerint a «felbontási» csoport.) A \mathfrak{H}_i alcsoportok ciklikusak és \mathfrak{G} -re nézve conjugáltak. Fordítva a \mathfrak{G} -nek minden f -edrendű \mathfrak{H} ciklikus alcsoportjához végtelen sok oly p törzsszám található (sőt «sűrűség»-ük FROBENIUS szerint nagyobb, mint zérus), melynek van oly \mathfrak{P} törzstényezője, hogy a hozzátartozó felbontási csoport azonos \mathfrak{H} -val. Ha K alárendelt tartománya G -nek és a \mathfrak{K} alcsoporthoz tartozik, akkor p felbontását K -ban DEDEKIND szerint a következő módon kapjuk. Legyen p -nek G -ben egy tetszős szerinti törzsideálja \mathfrak{P} , melynek felbontási csoportja \mathfrak{H} , f -edrendű csoport; végezzük a \mathfrak{G} csoportnak symbolikus szétbontását:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} R_1 \mathfrak{K} + \mathfrak{H} R_2 \mathfrak{K} + \dots,$$

a hol R_i a (mod. \mathfrak{H} , \mathfrak{K}) incongruens elemeket jelenti.

¹ KRONECKER: Über die Irreducibilität von Gleichungen. Berliner Monatsberichte, 1880, pp. 155–162. FROBENIUS: Über Beziehungen etc. Berliner Sitzungsberichte, 1896, pp. 689–703. DEDEKIND: Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten, 1894, pp. 272–277.

Ha a

$$\mathfrak{S}, R_i R_i^{-1}$$

csoporthoz legnagyobb közös osztójának rendje d_i , akkor a K testben

$$p = //p_i,$$

a hol a p_i törzsideálok egymástól különböző

$$f_i = \frac{f}{d_i}$$

rendű ideálok. E szabályból látszik, hogy véges számú kivétellel

a) az A -halmaz mindama racionális törzsszámokból áll, melyeknek G -ben van oly \mathfrak{P} törzsideáljuk, hogy a hozzájuk tartozó \mathfrak{S} felbontási csoport az összes

$$G \mathfrak{S} G^{-1} \quad (2)$$

csoporthoz a csoportja, hol G a \mathfrak{G} -csoport tetszőszerinti eleme.

β) a B -halmaz mindama racionális törzsszámokból áll, a melyeknek bizonyos törzsideáljához tartozó \mathfrak{S} felbontási csoport a (2) csoportok közül legalább egynek az a csoportja. Azonkívül még az is látható — most már kivétel nélkül —, hogy valamely törzsszám K -ban akkor és csak akkor állítható elő mint különböző elsőfokú törzsideálok szorzata, ha a hozzá tartozó GALOIS-féle testben hasonló tulajdonsággal bír. Ugyanis egyrészről K GALOIS-féle tartománya a

$$G \mathfrak{S} G^{-1}$$

alcsoportok legnagyobb közös osztójához, egy invariants alcsoportoz tartozik, másoldalról a K test és a hozzá tartozó GALOIS-féle test discriminansa ugyanazokkal a törzstényezőkkel osztható. E megjegyzésből kitűnik, hogy az I.-tétel csakugyan kiadódik mint I^+ alkalmazása.

3. Legyen már most G oly GALOIS-féle tartomány, mely K_1, K_2, G_1, G_2 testeket tartalmazza. Tartozzanak a K_1, K_2 testek a $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ alcsoportokhoz, G_2 amaz \mathfrak{S} invariants alcsoportoz tartozik, mely a

$$G \mathfrak{A}_2 G^{-1}$$

csoporthok legnagyobb közös osztója. A GALOIS-féle elmélet szerint annak a szükséges és elegendő feltételét keressük, hogy a \mathfrak{K}_1 alcsoportja legyen \mathfrak{J} -nek. Minthogy \mathfrak{J} invariants alcsoport, szükséges, hogy nemcsak \mathfrak{K}_1 -et, hanem az összes

$$G\mathfrak{K}_1G^{-1} \quad (3)$$

alcsoportokat tartalmazza. Ennélfogva, ha \mathfrak{H} oly alcsoport, mely a (3) alattiak valamelyikében előfordul, akkor \mathfrak{J} -nek is alcsoportja, a mit 2. szerint így mondhatunk ki: a $B)_1$ -halmaz véges számú kivétellel része $A)_2$ -nek.

Fordítva, képzeljük ezt a feltételt már kielégítettnek és legyen \mathfrak{H} a \mathfrak{K}_1 -nek egy teszesszerű ciklikus alcsoportja. Végtelen sok p racionális törzsszám bír oly törzsideállal, melynek felbontási csoportja éppen \mathfrak{H} , tehát p a $B)_1$ és így az $A)_2$ -halmazhoz tartozik, ennélfogva \mathfrak{H} csakugyan alcsoportja \mathfrak{J} -nek. Q. e. d.

4. Az előbbi általános tételnek egy alkalmazása például a következő tétel. Legyen

$$f(x) = c_0x^m + \dots + c_m = 0, \quad c_i \text{ racionális egész} \quad (4)$$

nem szükségképen irreducibilis egyenlet. Arra nézve, hogy a (4) egyenlet bármely gyöke által adott számtest az n -edik primitív egységgyököket tartalmazza, szükséges és elegendő, hogy mindama p törzsszámok, melyekre nézve az

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (5)$$

congruentia legalább egy racionális egész gyökkel bír, vagy a mint mondhatjuk, az $f(x)$ polynom törzsszósztói véges számú kivétellel $n!+1$ alakúak legyenek. E tételnek corollariuma, hogy $n > 2$ esetére a (4) egyenlet összes gyökei képzetesek; e tényt sokkal egyszerűbb úton is lehet bebizonyítani;¹ egy másik corollarium az

$$m \equiv 0, \pmod{\varphi(n)} \quad (6)$$

congruentia fennállása, hol $\varphi(n)$ az ismeretes EULER-féle jel. Meg akarom mutatni egészen elemi úton e congruentia helyes-

¹ Mathematikai és Physikai Lapok XIV. 313—315. l. 1905.

ségét arra az esetre nézve, mikor $n = p^\alpha$ páratlan törzsszámhatvány. Mindenekelőtt

$$f(c_mx) = c_m(c_0c_m^{m-1}x^m + c_1c_m^{m-2}x^{m-1} + \dots + c_{m-1}x + 1),$$

ha tehát

$$c_ic_m^{m-1-i} = d_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, m-1),$$

akkor a

$$\Phi(x) = d_0x^m + d_1x^{m-1} + \dots + d_{m-1}x + 1$$

polynom törzsosztói véges számú kivétellel ismét $nt+1$ alakúak. Legyen a kivételes törzsosztók szorzata Q . Azonban a

$$A_0(xR)^m + A_1R(xR)^{m-1} + \dots + A_mR^m = R^m(A_0x^m + \dots + A_m) \quad (\text{I})$$

identitásból kitűnik, hogy a

$$\Psi(x) = d_0x^m + d_1Rr^{m-1} + \dots + d_{m-1}R^{m-1}x + R^m$$

polynomnak $\overline{Q}R$ -hez relativ prim törzsosztói $nt+1$ alakúak. Itt R tetszésszerűen rationális egész számot, \overline{Q} pedig Q -nak R -hez relativ prim részét jelenti. Válaszszuk már most R -et primitív gyöknek (mod. n) és azonfelül legyen d_0Q -hoz relativ prim, azaz

$$(R, d_0Q) = 1.$$

Válaszszuk továbbá

$$x = nT\overline{Q}x, \text{ sign. } x^m = \text{sign. } d_0;$$

$$(\overline{x}, RQ) = 1, \quad (T, R) = 1.$$

Ha már most azt teszszük fel, hogy

$$m \not\equiv 0 \pmod{\varphi(n)};$$

akkor x elég nagy absolut értékeinél volna

$$0 < \Psi(nT\overline{Q}x), \quad \Psi(nT\overline{Q}x) \not\equiv 1 \pmod{n},$$

$$(\Psi(nT\overline{Q}x), nTQR) = 1,$$

a miből következik, hogy a $\Psi(x)$ és így az eredeti $f(x)$ polynomnak végtelen sok törzsosztója van, mely nem $nt+1$ alakú. A most bebizonyított tételnek közvetlen folyománya az $n=p^\alpha$ -

hoz tartozó primitív körosztási egyenlet irreducibilitása. Ha ugyanis $q \neq p$ páratlan törzsszám és

$$f(x) = \frac{x^{p^\alpha} - 1}{x^{p^{\alpha-1}} - 1} = x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + \dots + x^{p^{\alpha-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{q},$$

akkor

$$x^{p^\alpha} - 1 \equiv 0 \pmod{q};$$

de az

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^{p^{\alpha-1}(p-1)} - 1) + (x^{p^{\alpha-1}(p-2)} - 1) + \dots + (x^{p^{\alpha-1}} - 1) + p = \\ &= (x^{p^{\alpha-1}} - 1) f_1(x) + p \end{aligned}$$

identitás következtében

$$x^{p^{\alpha-1}} - 1 \not\equiv 0 \pmod{q},$$

a miből

$$q - 1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha};$$

és így az irreducibilitás következik. Az

$$m \equiv 0 \pmod{\varphi(n)}$$

corollariumot még a számtani haladvány elemi elméletére is lehet alkalmazni. Ugyanis elemi úton belátható,¹ hogy

$$\frac{x^{p^\alpha} - 1}{x^{\frac{\varphi(p^\alpha)}{2}} (x^{p^{\alpha-1}} - 1)} = A_0 \left(x + \frac{1}{x} \right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} + \dots + A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}},$$

A_i racionális egész, és hogy a

$$f'(x) = A_0 x^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} + \dots + A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}$$

polynom törzsszostói véges számú kivétellel $nt \pm 1$ alakúak.

Mint hogy e polynom foka $\frac{\varphi(n)}{2}$, végtelen sok $nt - 1$ alakú törzsszostója van. Elemi úton található az az ismeretes tény is, hogy az $f'(x) = 0$ egyenlet irreducibilis. Ugyanis az I^+ tételnek egy speciális esete a következő. Arra nézve, hogy a

$$f(x) = c_0 x^m + \dots + c_n$$

polynom törzsszostói véges számú kivétellel $nt \pm 1$ alakúak legye-

¹ Mathematikai és Physikai Lapok XI. 313—317. l. 1902.

nek, szükséges és elegendő, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet bármely gyöke által meghatározott számtest az n -edik primitív egységgyökök tartományában foglalt legnagyobb valós testet tartalmazza. Ennek corollariuma az

$$m \equiv 0 \pmod{\varphi(n)}$$

congruentia, melynek helyessége $n = p^a$ páratlan törzsszám-hatvány esetére az előbbi módon bebizonyítható. Megjegyzem, hogy ha az

$$m \equiv 0 \pmod{\varphi(n)} \quad (6)$$

congruentia tetszés szerinti n esetére egyszerű módon volna belátható, akkor a DIRICHLET-féle tétel nemcsak az I. SCHUR¹ által elintézett új speciális esetekre, hanem az összes $nt + l$, $l^2 \equiv 1 \pmod{n}$ haladványokra egyszerűen volna bebizonyítható; ugyanis a körosztási számtestek elméletéből tüstént következik oly $\frac{\varphi(n)}{2}$ -edfokú racionális egész együtthatójú polynomok létezése, melyeknek törzsosztói véges számú kivétellel vagy $nt + l$, vagy $nt + l$ alakúak.

Az előbb adott irreducibilitási bebizonyítások azért tartatnak igényt némi érdekre, mert az $f(x) = 0$ egyenlet e tulajdonságát a polynomnak \pmod{q} való viselkedéséből következtetik. Ha a

$$f(x) = c_0 x^m + \dots + c_m \equiv 0 \pmod{q}, \quad c_i \text{ racionális egész}$$

congruentia racionális gyökeinek számosságát (helyes multiplícitással számítva) $\nu(q)$ -val jelöljük, akkor az előzőket, valamint KRONECKERnek az ABEL-féle egyenletekre vonatkozó alaptételét figyelembe véve, a következőket mondhatjuk ki.

Ha véges számú kivétellel

$$\nu(q) = \begin{cases} 0 \\ m \end{cases}$$

és nem mindig következik be az utóbbi, akkor

¹ Über die Existenz unendlich vieler Primzahlen etc. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, XI. 40—50. I. 1912.

a) törzsszámú m esetében $f(x) = 0$ irreducibilis körosztási egyenlet; végtelen sok törzsszám van, melyre nézve $f(x) \pmod{q}$ irreducibilis;

β) összetett m esetében az irreducibilis tényezők zérussal egyenlítő oly GALOIS-féle egyenleteket adnak, melyek *ugyanazt* a számtestet határozzák meg.

5. Más alkalmazásokra és megjegyzésekre nézve idézett cikkeimre utalok, csak azt akarom megemlíteni, hogy az idézett helyen összetett testekre bebizonyított tétel kivétel nélkül érvényes, mert egy összetett számtest discriminánsa azokkal és csak azokkal a törzsszámokkal osztható, melyek a componensek közül valamelyik discriminánsában fellépnek. A tétel a következő.

A K_1 és K_2 testekből összetett számtestben azok és csak azok a racionális törzsszámok bonthatók fel különböző elsőfokú primideálok szorzatára, melyek úgy a K_1 , mint a K_2 testben hasonló tulajdonsággal bírnak.

Érdekes, hogy e tétel *tisztlán* a DEDEKIND-féle szabályból is levezethető, ha azt a maga teljességében¹ kiaknázzuk. Megjegyzem, hogy a tétel *mutatis mutandis* relativ testekre is átvihető. Bebizonyítására nem terjeszkedem ki, hanem áttérek a relativ GALOIS-féle testek összetételére, ebben az esetben eléggé általános tételeket fogok nyerni.

2. §. Relativ Galois-féle testek összetétele.

1. Valamely I tartományban legyenek adva a G_1 , G_2 relativ GALOIS-féle testek, a melyeknek relativ fokai n_1 illetőleg n_2 . A belőlük összetett $G = k(G_1, G_2)$ számtest ismét relativ GALOIS-féle test, fokát jelöljük n -nel. Legyen továbbá p a I tartomány valamely törzsmennyisége; ismeretes, hogy a szóban forgó testekben a következő alakú felbontások érvényesek: a G_1 testben

$$p = (p'_1 p'_2 \dots p'_{e_1})^{g_1},$$

a hol p_i különböző f_1 -edfokú törzsideálokat jelent, a G_2 -ben

$$p = (p''_1 p''_2 \dots p''_{e_2})^{g_2}$$

¹ Eddig a tételnek mindig csak egy részét alkalmaztuk.

a hol p_i' különböző f_2 -edfokú törzsideálokat jelent és végre G -ben

$$p = (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_e)^g,$$

a hol az egymástól különböző \mathfrak{P}_i törzsideálok f -edfokúak. A következő tételeket fogjuk bebizonyítani.

I. A g számok között a

$$\begin{aligned} g &\equiv 0 \pmod{g_i}, & (i=1, 2) \\ g_1 g_2 &\equiv 0 \pmod{g} \end{aligned}$$

összefüggések állanak fenn, ezekből

$$g = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)} t.$$

E formulában (g_1, g_2) a g_i számok legnagyobb pozitív közös osztóját jelenti, a

$$t, \frac{(g_1, g_2)}{t}$$

számok pozitív rationális egész számok.

I⁺) Érvényesek a

$$\begin{aligned} f &\equiv 0 \pmod{f_i}, & (i=1, 2) \\ f_1 f_2 \frac{(g_1, g_2)}{t} &\equiv 0 \pmod{f} \end{aligned}$$

relációk. Abban a speczialis esetben, mikor

$$(g_1, g_2) = (f_1, f_2) = 1,$$

az I., I⁺)-ból

$$g = g_1 g_2, \quad f = f_1 f_2$$

következik. Ez az eset mindig fennforog, ha n_1 és n_2 relatív primek, ebben az esetben még

$$n = n_1 n_2,$$

és így az

$$n = e f g, \quad n_1 = e_1 f_1 g_1, \quad n_2 = e_2 f_2 g_2$$

relációk folyományaképpen

$$e = e_1 e_2.$$

II. Ha

$$g_1 = g_2 = 1,$$

akkor

$$g = 1, \quad f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

III. Ha a \mathfrak{P}_i törzsideál «tehetetlenségi csoportja» ciklikus (a mi HILBERT szerint az általános eset),¹ akkor

$$g = \frac{g_1 g_2}{(g_1, g_2)}.$$

Az I. tételt WEBER² bebizonyította, a III. tétel — legalább abban az esetben, mikor Γ a racionális számok tartománya — kiolvasható HENSEL-nek amaz általános vizsgálataiból, melyeket egy értekezés-sorozatban összetett tartományok discriminánsairól publikált.³ A többi tétel újnak látszik.

2. Mindenekelőtt egy csoportelméleti segédtevélt fogunk bebizonyítani. Legyen \mathfrak{Q} tetszőleges q -adrendű véges csoport, melynek \mathfrak{Q} egy q -adrendű alcsoportja, legyenek továbbá $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ a \mathfrak{Q} -nak oly invariáns alcsoportjai, melyeknek legnagyobb közös osztójuk az egység. Ha már most \mathfrak{A}_1 illetőleg \mathfrak{A}_2 az \mathfrak{A}_1 illetőleg \mathfrak{A}_2 -nek α_1 illetőleg α_2 -edrendű alcsoportjai, ha továbbá \mathfrak{A}_1 és \mathfrak{A}_2 mindketten \mathfrak{Q} -nak alcsoportjai, akkor

$$\bar{q} \equiv 0 \pmod{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (1)$$

Abban az esetben, midőn α_1, α_2 relativ primek, állításunk trivialis; az általános esetben bontsuk szét a \mathfrak{Q} -csoportot sym-bolikusan a következő módon:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}_1 \bar{\mathfrak{Q}}_1 \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1 \bar{\mathfrak{Q}}_2 \mathfrak{A}_2 + \dots,$$

a hol a $\bar{\mathfrak{Q}}_i$ elemek a \mathfrak{Q} csoportnak $(\text{mod. } \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ incongruens ele-

¹ HILBERT: Grundzüge einer Theorie des GALOISSCHEN Zahlkörpers. Göttinger Nachrichten 1894, pp. 224—236. Minthogy a tehetetlenségi csoport a test csoportjának invariáns alcsoportja, azért az i indextől független.

² H. WEBER: Zur Theorie der zyklischen Zahlkörper. Math. Annalen Bd. LXVII. 1909. A dolgozat 5. §-a.

³ Az $n = n_1 n_2$ speczialis esetben már a hivatkozott dolgozatok elsejéből kiolvasható a tétel. HENSEL: Über Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen. Journal f. r. u. a. Math. Bd. CV. 1889, pp. 329—344.

meit képviselik. Præmissáink szerint a

$$\mathfrak{A}_1, \quad Q\mathfrak{A}_2Q^{-1}$$

csoportok az egységen kívül közös elemmel nem bírnak, ha Q a \mathfrak{Q} csoport bármely eleme. Így tehát ismert tételek szerint minden $\mathfrak{A}_1Q\mathfrak{A}_2$ complexus a_1a_2 számú különböző elemet állít elő, vagyis csakugyan

$$\bar{q} \equiv 0 \pmod{a_1a_2}. \quad (1)$$

3. Jelöljük a G test csoportját \mathfrak{G} -vel, a G_1, G_2 testek tartozzanak a \mathfrak{G}_1 illetőleg \mathfrak{G}_2 alcsoportokhoz; ezek, mint ismeretes, invariáns alcsoportok, melyeknek az egységen kívül nincs közös elemük. A \mathfrak{P}_i törzsideálhoz tartozzanak a \mathfrak{H} felbontási és a $\bar{\mathfrak{H}}$ tehetetlenségi csoportok; ezeknek rendjei, mint ismeretes, f, g , illetőleg g -vel egyenlők. A DEDEKIND-féle¹ szabály, mely megadja valamely törzsmennyiség felbontását egy relativ GALOIS-féle test tetszésszerű alarendelt tartományában, speczialis esetünkben a

$$g = g_ia_i, \quad f_i = \frac{fa_i}{h_i} \quad (i=1, 2) \quad (2)$$

összefüggéseket szolgáltatja, a hol az a_i , illetőleg h_i számok tárgyi jelentése a

$$(\mathfrak{G}_i, \bar{\mathfrak{H}}) \text{ illetőleg } (\mathfrak{G}_i, \mathfrak{H})$$

csoportok legnagyobb közös alcsoportjának rendje. Minthogy $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ a \mathfrak{G} csoportnak relativ prim invariáns alcsoportjai, azért a 2) alatt bebizonyított segédttétel következtében

$$g \equiv 0 \pmod{a_1a_2}, \quad fg \equiv 0 \pmod{h_1h_2}. \quad (3)$$

4. A (2) és (3) relatiókból könnyen kimutatható I, I^+ helyessége. Ugyanis

$$g \equiv 0 \pmod{g_i}, \quad (i=1, 2)$$

továbbá

$$g_1g_2 = g \frac{g}{a_1a_2};$$

¹ DEDEKIND: Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten, 1894, pp. 272—277.

ennek következtében

$$g_1 g_2 \equiv 0. \pmod{g}$$

A h_i tárgyi jelentéséből kitűnik, hogy $\frac{h_i}{a_i}$ racionális egész szám és így

$$f \equiv 0 \pmod{f_i}, \quad (i=1, 2)$$

továbbá

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &= \frac{f^2 a_1 a_2}{h_1 h_2} = \frac{f^2 g^2}{g_1 g_2 h_1 h_2} = f \cdot \frac{g_1 g_2 t}{(g_1, g_2)} \cdot \frac{f g}{h_1 h_2} \cdot \frac{1}{g_1 g_2}; \\ f_1 f_2 \frac{(g_1, g_2)}{t} &= f \frac{f g}{h_1 h_2}; \end{aligned}$$

tehát

$$f_1 f_2 \frac{(g_1, g_2)}{t} \equiv 0. \pmod{f}$$

5. Az eddigiekből következik, hogy g akkor és csak akkor egyenlő 1 -gyel, ha

$$g_1 = g_2 = 1. \quad (4)$$

Ha (4)-et felteszszük, akkor

$$f_i = \frac{f}{h_i}, \quad (i=1, 2). \quad (4^*)$$

Ismeretes, hogy esetünkben a \mathfrak{H} csoport ciklikus csoport. Ebből és ama tényből, hogy a

$$(\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}), \quad (i=1, 2)$$

csoportok legnagyobb közös osztói relatív prímekek, következik

$$(h_1, h_2) = 1. \quad (4^{**})$$

Ámde

$$f = \frac{f_1 h_2}{(f_1, f_2)} T,$$

a hol T racionális egész szám és így

$$h_1 = \frac{f_2}{(f_1, f_2)} T, \quad h_2 = \frac{f_1}{(f_1, f_2)} T.$$

Ebből és (4^{**})-ból következik, hogy

$$T = 1, \quad f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)},$$

a mivel II. be van bizonyítva. Ha a \mathfrak{G} csoport ciklikus, hasonló módon adódik a

$$g = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}$$

összefüggés.

6. Ha az f , g , n számok ismeretesek, akkor e -t is megkaphatjuk,

$$e = \frac{n}{fg}.$$

Az n számról ismeretes a következő. Ha \bar{G} a G_1 és G_2 tartományok legnagyobb közös tartománya a F -ra vonatkozólag ν -edfokú test, akkor

$$n = \frac{n_1 n_2}{\nu}.$$

E ténynek egyszerű bebizonyítását kapjuk, ha figyelmünket az $\frac{n}{n_i}$ -edrendű \mathfrak{G}_i ($i=1, 2$) invariáns alcsoportokra fordítjuk.

Minthogy ezek relativ primek és invariánsok, a

$$\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$$

complexus csoportot alkot, az elemek számossága

$$\frac{n^2}{n_1 n_2} = \frac{n}{n_1} \frac{n}{n_2}.$$

Másoldalról a \bar{G} test épen a $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ alcsoportozhoz tartozik, tehát

$$\frac{n}{\nu} = \frac{n^2}{n_1 n_2}, \quad n = \frac{n_1 n_2}{\nu}.$$

Még megmutathatjuk, hogy

$$\nu e \equiv 0, \quad (\text{mod. } e_1 e_2). \quad (5)$$

Ugyanis az

$$1 = \frac{fg}{f_i g_i h_i}$$

összefüggésből következik, hogy

$$\frac{e}{e_i} = \frac{n}{n_i h_i}, \quad (i=1, 2)$$

a miből

$$\frac{e^2}{e_1 e_2} = \frac{n^2}{n_1 n_2 h_1 h_2} = \frac{n}{\nu h_1 h_2} = \frac{efg}{\nu h_1 h_2};$$

és így

$$\nu e \equiv 0, \quad (\text{mod. } e_1 e_2). \quad (5)$$

A h_i tárgyi jelentéséből látható, hogy $\frac{e}{e_i}$ racionális egész szám.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 november 15.-én tartott üléséből.)

GRAPHOK ÉS ALKALMAZÁSUK A DETERMINÁNSOK ÉS A HALMAZOK ELMÉLETÉRE.

KÖNIG DÉNES-től.

E dolgozat a matematika három disciplinájába tartozó problémákat tárgyal; ezek: halmazelmélet, determinánselmélet és *analysis situs*. E problémák közös tárgyalására a *graphok* elmélete szolgál összekötő kapocsul, a mely elmélet e problémák egy részének megoldásához is elvezet, és pedig oly megoldáshoz, melyet a geometriai szemlélhetőség tesz különösen áttekinthetővé. A *graphok* alkalmazása továbbá egymástól látszólag távolfekvő kérdések æquivalentiájának felismerésére is alkalmat ad.

1. §. Graphok.¹

Adva lévén bárhány pont, az ezekből kiválasztható némely pontpárt egy vagy több éllel összekötünk. Az így keletkező alakzat neveztetik általában *graph*nak. Egy *graph* (önmagában) *összefüggő*nek neveztetik, ha minden csúcsából minden csúcsába (minden éléből minden élébe) a *graph* élein el lehet jutni. Ha a *graph* nem összefüggő, egyértelműen «szétesik» önmagukban összefüggő részekre. E tény triviális voltában rejlik a *graphok* bizonyos alkalmazásainak előnye és egyszerűsítő volta. Ha minden csúcsba ugyanannyi él fut, a *graph reguláris* és az egy csúcsba összefutó élek számát a reguláris *graph* fokszámának

¹ V. ö.: PETERSEN: *Die Theorie der regulären Graphs*, Acta Mathematica, XV. k. (1891), p. 193—220.

nevezzük. Kitüntetett szerepet játszanak az úgynevezett *páros körüljárású* graphok; így nevezünk egy graphot, ha éleiből alkotható bármely zárt vonal páros számú élből áll (ilyen például a kocka élrendszere).

Egy graph akkor és csak akkor páros körüljárású, ha csúcsai oly módon oszthatók két csoportba, hogy csak különböző csoportbeliek vannak közvetlenül (egy éllel) összekötve?

Valóban, ha a csúcsok két ily csoportra oszlanak, akkor minden zárt vonal *váltakozva* az egyik s a másik csoportból való csúcsot tartalmaz s így páros számú élből áll. Ha viszont páros körüljárású a graph, akkor az élekből álló bármely úton váltakozva az egyik s a másik csoportba oszthatjuk a csúcsokat; ez az osztályozás csak akkor akadhatna meg, ha volna páratlan számú élből álló zárt vonala a graphnak.

(Ily módon a «nem összefüggő» és «páros körüljárású» graphok egészen symmetrikusan értelmezhetők. Ugyanis az össze nem függő graphok úgy is jellemezhetők, hogy csúcsaik úgy oszthatók két csoportba, hogy csak ugyanazon csoportbeliek vannak egy éllel összekötve.)

Ha egy reguláris graph bizonyos élei oly tulajdonságúak, hogy közülük a graph minden csúcsából pontosan k -számú indul ki, akkor ez élek összességét a graph *k -adfokú faktorának* nevezzük. Minden k -adfokú faktor maga is reguláris és pedig k -adfokú graph; csúcsai megegyeznek az eredeti graph csúcsaival. Egy reguláris graph *elsőfokú faktorát* tehát oly élek alkotják, melyeknek végpontjaiképen az eredeti graph minden csúcsa egyszer és csak egyszer lép fel. Ha az eredeti reguláris G graph n -edfokú, akkor egy k -adfokú G_k faktorában *nem* szereplő élek a G -nek egy $n-k$ -adfokú G_{n-k} faktorát alkotják. Ilyenkor PETERSEN-nel azt mondjuk, hogy G a G_k és G_{n-k} graphok szorzata:

$$G = G_k G_{n-k}$$

Éppen így értelmezhető egy graphnak kettőnél több faktorra való felbomlása is. A faktorok fokszámának összege mindig a felbontott graph fokszámát adja. Különösen fontos szerepet fog játszani egy reguláris graph elsőfokú faktorokra való felbontása.

Minden másodfokú graph egy vagy több (egymást és önmagukat nem metsző) zárt vonalból áll. Látnivaló, hogy ennek akkor és csak akkor van (s ekkor egyszersmind legalább két) elsőfokú faktora, ha minden zárt vonal páros számú élből áll.¹ E tétel általánosításaképen kimutatjuk, hogy

A) *Minden páros körüljárású reguláris graphnak van elsőfokú faktora.*

E tétel be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk a következőt, mely csak látszólag mond többet:

B) *Minden páros körüljárású reguláris k -adfokú graph k -számú elsőfokú faktor szorzatára bomlik.*²

Ez a tétel viszont közvetlen folyománya a következőnek:

C) *Ha egy páros körüljárású graph bármelyik csúcsába legfeljebb k -számú él fut, akkor minden éléhez oly módon lehet k -számú index valamelyikét hozzárendelni, hogy ugyanabba a csúcsba futó két élhez mindenkor két különböző index legyen rendelve.*

Ha a graph reguláris és k -adfokú és ilyen indexezés lehetséges, akkor ezzel a graph k -számú elsőfokú faktorra való felbomlása is megtörtént: a megegyező indexű élek adják az elsőfokú faktorokat, minthogy ez esetben bármely csúcsból kiinduló élek közt egyszersmind mind a k -fajta indexűnek elő kell fordulni. A B)-tétel valóban közvetlen folyománya tehát C)-nek. Míg azonban a B) (vagy A))-tételnél a teljes indukció felmondja a szolgálatot, addig e módszerrel a C)-tételnek következő bizonyítása adható.

Ha a graph éleinek a száma $\leq k$, tételünk természetesen helyes. Felteszszük tehát, hogy helyes, valahányszor e szám $< N$ és bebizonyítjuk az N -számú élből álló G graphra. Elhagyva G -nek egy tetszés szerinti e élet, mely például az A és B

¹ PETERSEN, id. h., 3. §.

² Páros foksám esetében e tétel közvetlen folyománya PETERSEN egy tételének, mely szerint minden párosfokú graph másodfokúak szorzatára bomlik (id. h., 9. §.). Nem volna nehéz a páratlan foksám esetét a páros foksám esetére visszavezetni. Egyszerűbb azonban az itt következő általánosabb eredményhez is vezető bizonyítás, melyben e két eset megkülönböztetése felesleges.

csúcsokat köti össze, oly (természetesen ugyancsak páros körúljárású) G' graph keletkezik, melynek élei feltevésünk szerint tételünknek megfelelőleg k -számú indexszel láthatók el. Elvégezve G' éleinek ilyen indexezését, lehetséges *először*, hogy van olyan index, mely sem A -ba, sem B -be futó élen nem fordul elő; ekkor ez az index juttatható az elhagyott e élnek és tételünk G -re nézve is igaz. Feltehető tehát, hogy a *másik* esettel van dolgunk, azaz: ha egy index A -ba futó élen nem fordul elő (s ilyen index van, mert A -ba s épp így B -be legfeljebb $k - 1$ él fut), akkor előfordul B -be futó élen és viszont. Legyen tehát «1» olyan index, mely A -ból kiindul és B -ből nem, «2» pedig olyan index, mely A -ból nem indul ki. Legyen most már AA_1 az A -ból kiinduló 1-es él. Esetleg kiindul A_2 -ből egy 2-es indexű A_1A_2 él, A_2 -ből esetleg egy 1-es indexű A_2A_3 él, majd A_3 -ból ismét egy 2-es indexű A_3A_4 él stb. Ezt a teljesen meghatározott eljárást folytatjuk az $AA_1A_2 \dots A_n$ út képzésére, a míg csak lehet. Ezen az $AA_1A_2 \dots$ úton nem juthatunk vissza A -ba, mert innen nem indul ki 2-es él, sem egy már előfordult A_i -be, mert az A_i -ből kifutó 1-es élt és 2-es élt már befutottuk. Nem jut ez az út végül B -be sem, mert csak 2-es indexű éllel juthatna (1-es nem indul ki B -ből) és ekkor ez az út A -ból B -be páros számú élből állna; hozzávéve ehhez az elhagyott e élt, páratlan számú élből álló zárt vonalát nyernők G -nek, a mi feltevésünkkel ellenkezik.

Az $AA_1A_2 \dots A_n$ tehát olyan nyílt út, mely önmagát nem metszi, B -be nem jut s melynek élei váltakozva az «1» és «2» indexeket viselik. Cseréljük most már fel ennek az útnak 1-es és 2-es indexeit, változtatlanul hagyva a többi él indexét. A G' graph éleinek ez az új indexezése is megfelel követelményünknek. Valóban igaz ez az A pontra, mert innen 2-es él nem is indult ki, igaz a közbülső A_i -kre, mivelhogy ezekben csak két index cserélődik fel, igaz végül az utolsó A_n pontra is, mert különben A_n -n túl is folytatható lett volna utunk. E cserével most már elérjük, hogy A -ba nem fut többé 1-es él, éppen úgy mint B -be, a melybe futó élek indexein nem történt változás. Az elhagyott e élnek tehát a csere után az 1-es index adható és így eredeti G graphunk helyes indexezése is megtörtént.

Ezzel C)-tételünk, tehát a B)- és az A)-tétel is be van bizonyítva.

Mielőtt vizsgálatainknak a determinánsok és a halmazok elméletével való kapcsolatára áttérnénk, megemlítjük, hogy a bebizonyított B)-tétel szoros vonatkozásban van magának az analysis situsnak egy sokat tárgyalt kérdésével, a térképszínezés problémájával.

A mindezideig bebizonyítatlan *négy szín tétele* szerint minden síkbeli térkép megyéi úgy festhetők négyféle színre, hogy közös határvonallal bíró megyék különböző szint nyerjenek. Belátható, hogy arra az esetre lehet szorítkozni, mikor a megyék határvonalai reguláris, harmadfokú graphot alkotnak és hogy ekkor a négy szín tétele *æquivalens*¹ TAIT tételével, mely szerint ily graph mindig három elsőfokú graphra bomlik szét. Természetesen nincs itt szó arról, hogy minden harmadfokú graph szétesnék elsőfokú faktorokra; hiszen egy graph csak akkor alkothatja egy síkbeli térkép határrendszerét, ha megvan a következő két tulajdonsága: 1. úgy rajzolható a síkra (gömbre), hogy (új) metszéspont nem lép fel és 2. minden éle egy az éleiből alkotott kettőspontnélküli zárt vonalhoz tartozik. E két megszorítás nélkül TAIT tétele nem is érvényes (bár TAIT maga megszorítás nélkül mondta ki, sőt evidensnek deklarálta tételét²), a mint az két példával³ bebizonyítható. Ha azonban a graph páros körüljárású, akkor B)-tételünk szerint ($k = 3$) e tétel minden megszorítás nélkül is helyes. Igaz, hogy ez a térképszínezés problémáját illetőleg semmi újat nem mond, mert, mint KEMPE⁴ kimutatta, ez esetben nemcsak négy, de már három szín is elegendő. Az általános kérdés megoldásához

¹ E vizsgálatok egybe vannak állítva például WERNICKE dolgozatában (Mathematische Annalen, LVIII. k., 1904, p. 413.).

² Philosophical Magazine (5), XVII. k., 1884, p. 30.

³ Az egyik PETERSENnek egy érdekes graphja (Intermédiaire des Math., V. k., 1898, p. 225), a másik egy SYLVESTER-féle ugyancsak 3-adfokú graph, mely PETERSEN többször említett dolgozatában mint 11. ábra van lenyomtatva.

⁴ American Journal of Mathematics, II. k., 1879, p. 193.

mindenesetre fontos volna az 1. tulajdonságú graphokat a graphok belső (kombinatorius) tulajdonságaival — és pedig lehető egyszerű módon — jellemezni, a hol EULER polyedertételének jut fontos szerep.⁴

2. §. Alkalmazás a determinánsokra.

A páros körüljárású graphok szoros kapcsolatba hozhatók az egész vagy valós elemekből alkotott determinánsok elméletével, és pedig a determinánsok oly tulajdonságaival, melyeknél a determináns «alternáló» volta (azaz az a tulajdonsága, hogy két sor vagy oszlop felcserélésével csak előjelét változtatja meg) nem játszik szerepet.

Foglalkozzunk mindenekeelőtt olyan

$$D = (a_{ik}) \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

determinánsokkal, melyeknek a_{ik} elemei nem negatív egész számok. A D quadratikusan matrixhoz a következő módon rendelhetünk egy páros körüljárású G graphot. A D sorainak bizonyos

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

oszlopainak pedig bizonyos

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

pontokat feleltetünk meg, mint a G csúcspontjait. Minden A_i -t minden B_k -val a_{ik} -számú éllel kötünk össze, hol a_{ik} zérus is lehet. Két A pontot, valamint két B pontot sohasem kötünk össze. A D megadásával ily módon teljesen meghatározott G graph valóban páros körüljárású, mert bármelyik zárt vonalán az A és B pontok váltakozva követik egymást. Minthogy az A_i -be vagy B_k -ba futó élek számát a D i -edik sorának, illetve k -adik oszlopának összege adja, azért a G akkor és csak akkor reguláris, ha D minden sorának és minden oszlopának ugyanakkora az összege. Minthogy továbbá sem két A , sem két B pont nincs

⁴ V. ö. ez Értesítő XXIX. kötetében (1911) megjelent két dolgozatomat.

egymással összekötve, azért látnivaló, hogy G minden elsőfokú faktora ily típusú:

$$A_1 B_{i_1}, \quad A_2 B_{i_2}, \quad \dots, \quad A_n B_{i_n}, \quad (K_i)$$

hol

$$(i_1, i_2, \dots, i_n)$$

az $1, 2, \dots, n$ számoknak valamely permutációját jelenti. Ez a (K_i) akkor és csak akkor adja valóban G -nek elsőfokú faktort, ha az

$$a_{1i_1}, \quad a_{2i_2}, \quad \dots, \quad a_{ni_n}$$

számok mindegyike, vagyis az

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

szorzat 0-tól különböző. E szorzat pedig nem egyéb, mint — előjelétől eltekintve — a D kifejtésének általános tagja. Mint-hogy A -tételünk szerint minden páros körüljárású reguláris graphnak van elsőfokú faktora, azért a következő determinánstételhez jutottunk:

D) *Ha egy nem negatív [egész számú] elemekből álló determináns minden sora és minden oszlopa ugyanazt a pozitív összeget adja, akkor van a determinánsnak legalább egy el nem tűnő tagja.*

A megelőző bizonyítás csupán egész számú elemek esetére vonatkozott, de könnyen belátható, hogy először raczionális, majd általában valós elemek esetére is érvényes marad e tétel. Negatív elemek esetére azonban e tétel már nem érvényes, a mint azt legegyszerűbben a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

determináns példája mutatja: ebben minden sorösszeg és oszlopösszeg 1 és mégis eltűnik a determinánsnak mind a hat tagja.

Foglalkozzunk még külön azzal az esettel, mikor a D minden el nem tűnő eleme 1-gyel egyenlő; ekkor minden sorösszeg és oszlopösszeg megegyezése úgy is kifejezhető, hogy minden

sorban és oszlopban ugyanannyi 0 van. Ez esetben továbbá a D -hez tartozó G graph különböző elsőfokú faktorainak a D más-más tagjai felelnek meg. Mivelhogy még a determinánstagok eltűnése vagy el nem tűnése nem függ az el nem tűnő determinánselemek értékétől, azért a B)-tétel a következő determináns-tételre vezet:

E) Ha egy determináns minden sorában és oszlopában pontosan k -számú el nem tűnő elem van, akkor legalább k -számú determinánstag nem tűnik el.

[E k -számú tag mindig úgy választható ki, hogy minden el nem tűnő determinánselem e k -számú tag egyikében és csakis egyikében forduljon elő.]

A mi azt a kérdést illeti, hogy mikor van ilyen determinánsnak pontosan k -számú és mikor több el nem tűnő tagja, világos hogy $k = 1$ esetében mindig $k = 1$ ilyen tag van; $k = 2$ esetében pedig belátható, hogy e tagok száma mindig 2-nek egy hatványa és pedig 2^v , hol v azoknak az önmagukban összefüggő részeknek a száma ($v \geq 1$), melyekre a másodfokú G graph szétesik. Már a $k > 2$ esete, azaz az a kérdés, hogy egy másodfokúnál magasabbfokú graphnak hány elsőfokú faktora van, sokkal bonyolultabb vizsgálatot kíván. Annyi bizonyos, hogy általában ama részek száma, melyekre a graph szétesik, a graph elsőfokú faktorainak a számát nem határozza meg.

Az E)-, illetőleg B)-tételnek végül még a következő formulázást adhatjuk:

F) Ha egy n^2 mezejű quadratikus táblán kn -számú figura úgy van elhelyezve (ugyanazon a mezőn több figura is lehet), hogy minden sorban és oszlopban pontosan k -számú figura fordul elő, akkor e konfiguráció mindig mint k -számú ugyan-csak n^2 mezejű oly konfiguráció egyesítése keletkeztethető, melyek mindegyikében egy-egy figura van minden sorban és minden oszlopban.

Analog fogalmazás adható a C)-tételnek is.

3. §. Végtelen graphok, és alkalmazás a halmazelméletre.

A graphok elméletének itt adott vizsgálata és alkalmazásai tulajdonképen semmiféle geometriai szemléletet nem követelnek. Graph helyett mindenkor bizonyos, a csúcsoknak megfelelő A, B, C, D, \dots elemekből alkotott

$$AB, CD, AE, \dots \quad (G)$$

párok halmazáról beszélhattünk volna, hol azonban ez utóbbi halmaz elemei bizonyos *multiplicitással* tekintendők, megfelelőleg annak, hogy ugyanazt a két csúcsot több él is összekötheti. Összes szerepelt geometriai fogalmainkat (összefüggő graph, reguláris graph, fokszám, zárt vonal, stb.) tisztán elvontan, e (G) halmazzal definiálhatjuk, a nélkül, hogy geometriai szemléletre kelljen hivatkozni. Fontos ez a megjegyzés azért, mert ennek belátása után a graphok «nyelv»-ét használhatjuk akkor is, mikor a fenti (A, B, C, D, \dots) és (AB, CD, AE, \dots) halmazok végtelenek, sőt bármilyen nagy számosságúak. Felesleges volna az ilyen *végtelen* graphokra a regularitást, a fokszámot, faktorait, zárt vonalait, stb. külön szigorúan definiálni. Talán csak azt szükséges ismételni, hogy összefüggőnek akkor nevezetük egy graph, ha bármely csúcsából bármely csúcsába véges számú¹ élen át el lehet jutni. Az az alapvető állítás, hogy *végtelen graph is egyértelműen bomlik önnagukban összefüggő részekre*, minden geometriai szemlélet nélkül szintén könnyen igazolható.

Az által most már, hogy a «csúcsok» halmazának számosságára semmiféle megszorítást sem teszünk, természetesen nagy mértékben bővítjük a graph fogalmát. Azt a megszorítást azonban most is megőrizzük, hogy csak olyan graphokkal fogunk foglalkozni, melyeknél *az egy csúcsból kifutó élek száma egy az illető graphra nézve fix felső korlát alatt marad*. E korlátozás

¹ Nem felesleges talán megjegyezni, hogy annak a kijelentésnek, hogy «egy csúcsból egy másikba végtelen sok élből álló út vezet», semmiféle értelem sem adható. Ezért itt a «véges számú élen át» kifejezés el is hagyható. A graph éleiből alkotott minden zárt vonal is *eo ipso* véges számú élből áll.

után a véges számú csúcsot (tehát véges számú élt) tartalmazó graphokon kívül — eddig csupán ilyen úgynevezett «véges» graphokról volt szó — csak még megszámlálhatóan végtelen sok csúcsot (tehát megszámlálhatóan sok élt) tartalmazó — s ezentúl «megszámlálható»-nak nevezendő — graphokkal kell foglalkoznunk. Ezt a következő körülmény teszi lehetővé:

G) *Minden összefüggő graph, melyben az egy csúcsból kifutó élek száma véges korlát alatt marad,¹ véges vagy megszámlálható.*

Valóban: legyen P egy ilyen graphnak bármelyik csúcsa és jelöljük h -val azt a felső korlátot, melynél több él egy csúcsból sem indul ki. Ekkor legfeljebb h -számú oly csúcs van, mely P -ből egyetlen éllel elérhető, legfeljebb h^2 oly csúcs van, mely P -ből két él befutásával elérhető, . . . , általában legfeljebb h^v -számú csúcs érhető el P -ből v -számú él befutásával. Ama csúcsok halmaza tehát, melyek P -ből véges számú él befutásával elérhetők, vagyis a graph összes csúcsainak halmaza, véges vagy megszámlálható.

A végtelen reguláris graphok között az elsőfokúak után, melyek csupa különálló élből állnak, természetesen a másodfokúak a legegyszerűbbek. Ezek szétesnek olyan részletgraphokra, melyek vagy zárt vonalak (véges számú éllel), vagy megszámlálhatóan sok élből álló s kétfelé «minden határon túl nyúló» nyílt vonalak. Ha még a graph páros körüljárású, akkor minden ilyen részletgraph látnivalóan két elsőfokú faktor szorzata, tehát² az eredeti graph is. Ily módon a 2-es fokszám esetében az A)- és B)-tételek végtelen graphokra is igazak. Hogy magasabbfokú végtelen graphokra is adjunk példát, megemlítjük, hogy a közönséges quadratikus síkrács egyik legegyszerűbb példája a páros körüljárású negyedfokú végtelen (összefüggő, tehát megszámlálható) graphoknak. Az analog térbeli alakzat pedig páros körüljárású hatodfokú végtelen graph.

¹ Elegendő volna feltenni, hogy az egy csúcsból kifutó élek száma véges.

² Ez a következtetés jogosulatlan olyan számára, ki a ZERMELO-féle *Auswahlprinzip*-et nem fogadja el.

A G)-tételnek, mely szerint minden graph véges vagy megszámlálható graphokra esik szét, különösen ott lesz szerepe, mikor a graphokat a halmazelméletre alkalmazzuk. E tétel alapján ugyanis problémánkat véges vagy megszámlálható halmaz esetére redukálhatjuk, a mint az a következőkben ki fog derülni.

Most ugyanis a graphok módszerét a következő BERNSTEIN-féle tétel¹ bebizonyítására (és e tétel bővítésére) akarjuk alkalmazni):²

Ha m és n két tetszős szerinti számosság és ν véges számot jelent, akkor a

$$\nu m = \nu n$$

kapcsolatból következik, hogy

$$m = n.$$

Ha az M és N halmazok számossága m , illetőleg n , akkor a $\nu m = \nu n$ egyenlőség azt mondja, hogy az a két halmaz, mely

¹ *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, Diss., Göttingen, 1901. p. 18—25 és *Mathematische Annalen*, LXI. k., 1905, p. 122—127. BERNSTEIN bizonyítása, még a $\nu = 2$ esetére is, mely eset tulajdonképpen egyedül van nála teljesen kidolgozva, rendkívül bonyolódott. A — tudunkkal — egyetlen könyv, mely BERNSTEIN e bizonyítását átvette (HOBSON: *Theory of functions of a real variable*, Cambridge, 1907, p. 159), kizárólag e $\nu = 2$ esettel foglalkozik. Az itt következő bizonyítás erre az esetre a tételt közvetlen szemléletképpen adja. E BERNSTEIN-féle tétel természetesen folyománya ZERMELO *Wohlordnungssatz*-ának. Bizonyításunk talán mégis érdekel bír olyan számára is, ki ZERMELO bizonyítását elfogadja, mindazonáltal, hogy bizonyításunkban az *Auswahlprinzip* használatát egyáltalán nem kerültük el. De mi csupán a halmazelmélet legegyszerűbb fogalmait (halmaz, elem, leképezés) használjuk és «rendezés» például bizonyításunkban nem szerepel.

² Az *æquivalentia*-tétel, melyet szintén BERNSTEIN bizonyított be először, szintén igen szemléletesen bizonyítható a graphok módszerével. Valóban az a legegyszerűbb bizonyítás, melyet KÖNIG GYULA adott e tételre (*Comptes Rendus*, CXLIII. k., 1906, p. 110, *Math. és Phys. Lapok*, XV. k., p. 253), lényegileg graphokat alkalmaz. De az itt fellépő egyszerű viszonyok (csupán másodfokú graphokról volna szó) nem teszik szükségessé a graphok terminológiájának használatát. Atyám itt adott módszerének alkalmazása a fenti BERNSTEIN-féle tétel bebizonyítására vezetett engem mindama vizsgálatokhoz, melyekről e dolgozatban szó van.

M -ből és N -ből az által keletkezik, hogy minden elemet ν különböző elemmel pótlunk, egymással æquivalens. A végtelen számosság fogalmának használata nélkül tehát a fenti tétel következőképen fogalmazható:

H) *Ha két halmaz megfordítható $(1, \nu)$ -vonatkozásban van egymáshoz, akkor a két halmaz æquivalens.*

Itt akkor mondjuk, hogy M az N -hez $(1, \nu)$ -vonatkozásban van, ha az M bármely elemének az N -nek ν -számú eleme felel meg; megjegyzendő azonban, hogy nem követeljük, hogy ez ν különböző elem legyen, a mennyiben az M és N egy-egy eleme közötti vonatkozásnak *multiplicitást* tulajdonítunk. Hogy most már az M -beli a elemnek N -ből ν -számú elem felel meg, azt — bővítve e mondás közvetlen jelentését — úgy értjük, hogy, ha a -nak az N -beli

$$b_1, b_2, \dots, b_\mu \quad (\mu \leq \nu)$$

elemek felelnek meg és e vonatkozások multiplicitása rendre

$$s_1, s_2, \dots, s_\mu,$$

akkor az M bármely a elemére nézve

$$s_1 + s_2 + \dots + s_\mu = \nu.$$

Megfordíthatónak most már M -nek N -hez való ily vonatkoztatását akkor mondjuk, ha e vonatkoztatás megfordítása, mely N elemeit vonatkoztatja M elemeire, ugyancsak $(1, \nu)$ -vonatkoztatás. A megfordítható $(1, \nu)$ -vonatkoztatás tehát oly tulajdonságú, hogy, ha általa az M -beli a -nak megfelelő N -elemek egyike: b , és e vonatkoztatás multiplicitása s , akkor a b -nek M -ből megfelelő elemek egyike: a és e vonatkoztatásnak is s a multiplicitása — és viszont. Ez a körülmény az oka annak, hogy az M és N halmazok megfordítható $(1, \nu)$ -vonatkoztatását, azaz a $\nu m = \nu n$ egyenlőség fennállását *igen szemléletesen ábrázolhatjuk egy páros körüljárársú reguláris graphfal*. A graph «csúcsai» az M elemei és az N elemei legyenek. Egy M -csúcsot annyi éllel kötünk össze egy N -csúccsal, a mekkora e két elem

(kölcsönös) vonatkoztatásának multiplicitása; két M -csúcsot, valamint két N -csúcsot nem kötünk össze egymással. Az így keletkező G graph valóban páros körüljárású, mert minden zárt vonalán az M - és N -csúcsok váltakozva követik egymást, és valóban reguláris, mert minden csúcsából ν -számú él indul ki.

Tudjuk (G)-tétel), hogy G véges és megszámlálható részletgraphokra esik szét. Legyen G_1 egy ilyen részletgraph, melynek csúcsai az M és N halmazok M_1 , illetve N_1 részlethalmazát alkotják. Ez utóbbi halmazok számossága legyen m_1 és n_1 . Ekkor

$$\nu m_1 = \nu n_1,$$

mert a baloldal is, a jobboldal is nem egyéb, mint a G_1 *éleinek a számossága*. Itt azonban m_1 és n_1 véges számot vagy ∞ -t jelent s minthogy BERNSTEIN tétele ez esetre triviális, innen következik, hogy

$$m_1 = n_1.$$

Felírva most már G minden részletgraphjára ezt az egyenlőséget és összegezve, kiderül valóban, hogy M és N számossága megegyezik.

Ezzel BERNSTEIN tétele máris ki van mutatva.

Nagy nehézségekbe ütközünk azonban, ha a H)-tételnek (BERNSTEIN tételének) következő bővítésére térünk át, melyet azonban — a mint itt mindjárt hangsúlyozni akarjuk — általánosságban *nem sikerült bebizonyítanunk*:

I) *Ha két halmaz megfordítható $(1, \nu)$ -vonatkozásban van egymáshoz, akkor olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba is hozhatók, mely a két halmaznak csak oly elemeit felelteti meg egymásnak, melyek az adott $(1, \nu)$ -vonatkoztatás által is egymásnak feleltek meg.*

Mivelhogy e megfordítható $(1, \nu)$ -vonatkoztatást szemléltető G graphban az a körülmény, hogy egy M - és egy N -elem ezáltal az $(1, \nu)$ -vonatkoztatás által egymásnak megfelel, úgy nyilvánul meg, hogy a megfelelő két csúcs közvetlenül össze van kötve, azért e tétel kimutatásához elegendő volna kimutatni, hogy a G graphnak

van elsőfokú osztója, vagyis azt, hogy az A)-tétel végtelen graphokra is igaz. (A G)-tétel alapján elegendő volna ezt megszámlálható graphokra bizonyítani.) Megjegyezzük, hogy fordítva is: D)-tételünk az A)-tételt végtelen graphokra is mint következményt vonja maga után, mert minden ν -edfokú páros körüljárású graph mint olyan graph keletkeztethető, mely két halmaz megfordítható $(1, \nu)$ -vonatkoztatását ábrázolja. Hiszen, mint láttuk, minden páros körüljárású graphban (akkor is, ha végtelen) úgy lehet a csúcsokat két csoportba osztani, hogy csak különböző csoportbeliek legyenek egy éllel összekötve.¹

Ezzel az D)-tételünk a tetszés szerinti (véges vagy végtelen) graphokra vonatkoztatott A)-tétellel teljesen æquivalensnek bizonyult. De æquivalens e két tétel a tetszés szerinti graphokra vonatkoztatott B) és C) tételekkel is. Ugyanis nemcsak C)-nek a B)- és B)-nek az A)-tétel folyománya, a mi végtelen graphokra épp olyan könnyen belátható, mint végesekre, hanem fordítva is A)-ból B) és B)-ből a C)-tétel levezethető. Csak ez az utóbbi kijelentés kíván részletes meggondolást. Bizonyítjuk tehát, hogy — véges és végtelen graphokra egyaránt —

a B)-tételből következik a C)-tétel.

Legyen G oly páros körüljárású graph, melynek minden csúcsába legfeljebb k -számú él fut. G -t a következő módon egészítjük ki egy új \bar{G} graphfá. G minden csúcsának megfelelőleg egy-egy új csúcsot veszünk fel s két új csúcsot annyi éllel kötünk össze, a hány él a nekik megfelelő két G -csúcsot összeköti. Továbbá minden G -csúcsot $k - a$ -számú éllel összekötünk a neki megfelelő új csúccsal, hol a az illető G -csúcsba futó G -beli élek száma. Egyéb csúcsokat és éleket nem vezetünk be. Az így létrehozott \bar{G} graph először is reguláris, mert minden csúcsába k -számú él fut, és másodszor páros körüljárású, a mi következőképen látható be. G páros körüljárású lévén, csúcsai úgy oszthatók két csoportra, I-re és II-re, hogy minden G -él különböző csoportbeli csúcsokat köt össze. Ha most még az új

¹ Össze nem függő graph esetében, mikor a két csoportba való osztás nincs egyértelműen megadva, e meggondolás is feltételezi a ZERMELO-féle *Auswahlprinzip*-et.

csúcsokat a szerint osztjuk I-be vagy II-be, hogy a nekik megfelelő G -csúcs II-be vagy I-be tartozik, akkor \bar{G} -ben is bármely él csak különböző csoportbeli csúcsokat köt össze. A B)-tételt elfogadva tehát a G graph k -számú elsőfokú faktorra bontható szét. Ha most már a G éleihez a szerint rendelünk k -számú index közül egyet-egyet, hogy e k -számú faktor közül melyikhez tartoznak, akkor látnivalóan a G graph oly indexezéséhez jutunk, mely a C)-tétel követelményeinek megfelel.

Most még végül azt akarjuk megmutatni, hogy az egymásközt æquivalenseknek bizonyult A)-, B)-, C)- és D)-tételeket elegendő volna arra az esetre bebizonyítani, mikor a fokszám (illetve C)-ben a k és D)-ben a ν): törzsszám. Ez közvetlen folyománya a következő tételnek:

K) Ha minden μ -edfokú és minden ν -edfokú páros körüljárású graphnak van elsőfokú osztója, akkor minden $\mu\nu$ -edfokú ily graphnak is van.

Fogadjuk el ugyanis e tétel feltételeit és legyen a $\mu\nu$ -edfokú G graphnak P egy csúcsa. P -t μ -számú P_1, P_2, \dots, P_μ csúccsal pótoljuk és a P -be futó $\mu\nu$ -számú élt P helyett e P_i -kbe vezetjük, olyan módon, hogy mind a μ -számú P_i -ben éppen ν -számú él fusson. Ezt elvégezve G minden csúcsára nézve, a $\mu\nu$ -edfokú G graphból egy ν -edfokú G_ν graph válik, mely ismét páros körüljárású, mert G_ν minden zárt vonalának egy ugyanannyi élből álló zárt vonala felel meg G -nek. Feltevésünk szerint tehát van G_ν -nek egy elsőfokú G_1 faktora. Ha most ismét minden (P_1, P_2, \dots, P_μ) csúcscsoportot egy P csúccsá egyesítünk, a mikor is G_ν ismét az eredeti G -be megy át, akkor G_1 a G -nek egy μ -edfokú G_μ faktorába megy át, mely, mint G része, maga is páros körüljárású. Feltevésünk szerint van tehát G_μ -nek elsőfokú faktora s ez természetesen elsőfokú faktora G -nek is, a mivel a K)-tétel be van bizonyítva.

[E bizonyítás első részének csaknem szóról-szóra való ismétlése különben a következő, részben általánosabb, eredményhez is elvezet:

Ha minden ν -edfokú páros körüljárású graphnak van k -adfokú faktora, akkor minden $\mu\nu$ -edfokúnak van μk -adfokú faktora.]

Minthogy minden másodfokú graph esetére a B)-tételt igaznak ismertük fel, azért a K)-tétel szerint a B)-tétel igaz, valahányszor a fokszám 2-nek hatványa. Az általános A)-, B)-, C)- és D)-tételek bebizonyítására azonban — mindamellet, hogy, mint láttuk, elegendő megszámlálható graphokra szorítkoznunk — módszereink, úgy látszik, nem elegendők (már a 3-as fokszám esetében sem). A C)-tételre adott bizonyításunkban szereplő teljes indukció mindenestre azonnal felmondja a szolgálatot, a mint a graphnak végtelen sok éle van.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 november 15.-én tartott üléséből.)

ADATOK A TRIMETHYLGALLUSALDEHYD ÉS A SYRINGAALDEHYD ISMERETÉHEZ.¹

MAUTHNER NÁNDOR-tól.

Mint hogy a trimethylgallusaldehyd² és a syringaaldehyd³ előbb közölt eljárásokkal könnyen előállítható, már hosszabb ideje kilátásba helyeztem⁴ a magnesiumorganikus vegyületeknek a trimethylgallusaldehydra való behatásának tanulmányozását, a mely vizsgálatokat más munkálatok miatt csak most fejezhettem be. E vizsgálatok arra az eredményre vezettek, hogy a magnesiumorganikus vegyületek és a trimethylgallusaldehyd között végbemenő reakció normális módon folyik le és a megfelelő sekundær alkoholok állanak elő. A magnesiummethyljodidnek a trimethylgallusaldehydre való behatásakor a 3, 4, 5-trimethoxyphenyl-methylcarbinol képződik. Ez utóbbi vegyület szerkezetét az által lehetett megállapítani, hogy a BECKMANN-féle reagenssel való oxydatio útján a 3, 4, 5-trimethoxyacetophenon képződött. E vegyület szerkezetét pedig már előzőleg⁵ két különböző synthesise útján megállapítottam. A magnesiumæthyljodid és a trimethylgallusaldehyd közötti reakcióban a 3, 4, 5-trimethoxyphenyl-æthylcarbinol keletkezett. Oxydatio útján e vegyületből a 3, 4, 5-trimethoxyphenylæthylketon képződött,

¹ A budapesti kir. m. tud. egyetem II. sz. chemiai intézetében készült dolgozat.

² F. MAUTHNER: Ber. 41, 920 (1908).

³ F. MAUTHNER: An. 395, 273, Mathematikai és Természettudományi Értesítő 31, 374 (1913).

⁴ Ber. 41, 2533 (1908).

⁵ Journ. f. pr. Chemie 82, 275 (1910).

melyet olajszerű állapotban nyertem és paranitrophenylhydrazonja útján jellemeztem. Ezenkívül még több, a trimethylgallusaldehydből leszármazó chalkon synthesisét is eszközöltem, mert a trimethylgallusaldehyd előreláthatólag a flavonok synthesise czéljából czélszerű kiindulási anyagnak lesz felhasználható. KOSTANECKI¹ eljárása szerint a trimethylgallusaldehydnek kondenzációjakor trimethylgallacetophenonnal alkoholos oldatban tömény nátronlúg behatására a 3', 4', 5', -3, 4, 5-hexamethoxychalkon képződött. A trimethylgallusaldehydnek acetoveratrollal való kondenzációjakor a fentebbi kísérleti körülmények között a 4', 5'-3, 4, 5-pentamethoxychalkon állott elő. E kísérletekkel kapcsolatban még a nitromethannak a trimethylgallusaldehyde és a syringaaldehydre való behatását vizsgáltam, a mely reakciónál nitrostyrolok² képződnek. A trimethylgallusaldehydnek nitromethannal való kondenzációjakor alkoholos lúgos közegben a 3, 4, 5-trimethoxynitrostyrol állott elő. Hasonlóképpen a syringaaldehydnél is ugyanez a reakció áll be, a nélkül, hogy a syringaaldehyd szabad hydroxylgyökét előzőleg az acetylgyökkel kellene helyettesíteni és a 4-oxy-3, 5-dimethoxynitrostyrol képződik.

KISÉRLETI RÉSZ.

3, 4, 5-trimethoxyphenylmethylecarbinol.

A trimethylgallusaldehydnek ætherben való nehéz oldhatósága miatt az aldehyd benzolos oldatát alkalmaztam és ezt hagytam az ætheres methylmagnesiumjodid-oldatra hatni.

1.5 gr magnesiumból, 9 gr jodmethylből és 60 cm³ absolut ætherből egy magnesiommethyljodid-oldatot állítunk elő. A lombikot jeges vízzel lehűtjük és 10 gr jól kiszáritott trimethylgallusaldehyd benzolos (50 cm³) oldatát csepegtető tölcser segítségével lassacskán hozzácsepegtetjük, miközben a lombikot erősen összerázzuk. Miután a reakcióelegyet még fél óra hosszat a vízfürdőn hevítettük, a lombik tartalmát jeges vízzel és híg kénsavval

¹ Ber. 31, 698 (1898); Ber. 32, 311 (1899).

² K. W. ROSENMUND: Ber. 42, 4778 (1909).

szétbontjuk. A folyadékot ætherrel kivonjuk és az ætheres oldatot az esetleg még jelenlevő kis mennyiségű változatlan trimethylgallusaldehyd eltávolítására előbb tömény, ezután pedig 10%-os natriumbisulfittal többször átrázzuk. Az ætheres oldatot híg natronlúggal rázzuk át és végül vízmentes natriumsulfattal szárítjuk. Az æthert lepároljuk és az olajszerű maradékot a vacuumban fractionálva destilláljuk. A vegyület színtelen olaj alakjában 11 mm nyomás alatt 179—180 C°-on destillál. Az analysis céljaira szolgáló anyagot még egyszer fractionáljuk.

Termelési hányad 65%.

0.1607 gr anyag adott: 0.3644 gr CO_2 -t, 0.1064 gr H_2O -t.

$C_{11}H_{16}O_4$ képlet alapján a számított értékek: $C = 62.26\%$, $H = 7.54\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 62.46\%$, $H = 7.35\%$.

Az analysis adatai alapján a termék összetételére nézve a 3, 4, 5-trimethoxyphenyl-methylcarbinolnak felel meg és szerkezetét azzal is lehetett bizonyítani, hogy chromsavval való oxydatio útján a 3, 4, 5-trimethoxyacetophenonná alakul át. Az így nyert termék azonosnak bizonyult az általam már előzőleg előállított trimethylgallacetophenonnal.

3.2 gr carbinolt 4.7 gr kaliumbichromatból, 3.9 gr tömény kénsavból és 30 cm³ vízből készített BECKMANN-féle keverékkel osszerázzunk, miközben külső hűtéssel gondoskodunk, hogy a hőmérséklet 60 C° fölé ne emelkedjen. A reactioelegy lehülése után ætherrel extraháljuk és az oldatot natriumsulfattal szárítjuk ki. Az oldószert ledestilláljuk, mire gyengén sárgás színű olaj marad vissza, a mely csakhamar megdermed. Az olajos alkotórészek eltávolítására agyagtányérra kenjük és a további tisztítás céljából ligroinból kristályosítjuk át. Az analysis, 72 C°-on észlelt olvadáspontja és nitrophenylhydrazonja által a már előzőleg általam ismertetett trimethylgallacetophenonnal azonosítottam.

0.16558 gr anyag adott: 0.3802 gr CO_2 -t, 0.0992 gr H_2O -t.

$C_{11}H_{14}O_3$ képlet alapján számított értékek: $C = 62.85\%$, $H = 6.66\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 62.54\%$, $H = 6.38\%$.

3, 4, 5-trimethoxyphenylæthylcarbinol.

A fentebbi vegyület előállításához 1·5 gr fémcs magnésiumból, 10 gr jodæthylből és 70 cm³ ætherből ismert módon magnésiumæthyljodidot készítünk. A jeges vízzel lehűtött reactioelegybe 10 gr trimethylgallusaldehyd benzolos (50 cm³) oldatát csepegtető tölesér segélyével hozzáadagoljuk, miközben a lombikot erősen összerázzuk.

A reactioelegyet még fél óra hosszat vízfürdön hevítjük, majd a lombik tartalmát jeges vízzel és hígított kénsavval szétbontjuk. A folyadékot ætherrel kioldjuk és az oldatot előbb tömény, majd híg natriumbisulfitoldattal többször átrázzuk. Az ætheres oldatot ezután híg natronlúggal mossuk és natriumsulfattal szárítjuk. Az æther lepárlása után a visszamaradt olajat a vacuumban fractionálva destilláljuk. A termék 11 mm nyomás alatt 184–185 C°-on destillál. Az analysishez használt terméket még egyszer fractionáljuk.

Termelési hányad 60%.

0·1514 gr anyag adott: 0·3538 gr CO₂-t, 0·1057 gr H₂O-t.

C₁₂H₁₈O₄ képlet alapján a számított értékek: C=63·71%, H=7·96%.

Kísérletileg talált értékek: C=63·71%, H=7·75%.

A vegyület szerkezetének megállapítására a fentebbi terméket oxydationak vetjük alá, miáltal a 3, 4, 5-trimethoxyphenylæthylketont nyerjük, a melyet nitrophenylhydrazonja alakjában különítünk el.

2·9 gr 3, 4, 5-trimethoxyphenylæthylcarbinolt 4·3 gr kaliumbichromatból, 25 cm³ vízből és 3·6 gr tömény kénsavból készített oldattal összerázzunk, miközben külső hűtéssel arra ügyelünk, hogy a hőmérséklet 60 C° fölé ne emelkedjen. A kihülés után az oldatot ætherrel kirázzuk és az ætheres oldatot natriumsulfattal szárítjuk. Az oldószer lepárlása után gyengén sárgás színű olaj marad vissza. Ez utóbbi terméket 20 cm³ 50%-os eczetsavban oldjuk és 2 gr paranitrophenylhydrazin 50%-os eczetsavas oldatával (20 cm³) elegyítjük. Rövid hevítés után a kondenzációs termék kiválik, melyet leszűrünk, szárítunk és alkoholból kristályosítunk át.

0.16229 gr anyag adott: 0.3589 gr CO_2 -t, 0.0813 gr H_2O -t.

0.1114 gr anyag adott: 11.8 cm³ N-t (22°, 756 mm).

$C_{18}H_{21}O_5N_3$ képlet alapján a számított értékek: $C=60.16\%$, $H=5.84\%$, $N=11.69\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C=60.11\%$, $H=5.47\%$, $N=11.93\%$.

A nitrophenylhydrazon vörösesbarna tüket alkot, a melyek 170—171 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkoholban és benzolban. Ligroinban a termék nehezen oldódik és petroleumætherben oldhatatlan.

3', 4', 5'- 3, 4, 5-hexamethoxychalcon

A fentebbi vegyület előállításához szükséges trimethylgallacetophenont¹ az előzőleg már megadott eljárás szerint állítjuk elő.

A kondenzációt következőképpen eszközöljük: 1.9 gr trimethylgallacetophenont és 1.8 gr trimethylgallusaldehydet 45 cm³ alkoholban oldunk. Közöséges hőmérsékleten 10 gr 50%-os natronlúgot adunk az oldathoz és éjjelen át meleg helyen állni hagyjuk, miközben a termék sárga lapocskákban kiválik. Hozadék 2 gr. A további tisztítás céljából a terméket hig alkoholból kristályosítjuk át.

0.1516 gr anyag adott: 0.3601 gr CO_2 -t, 0.0833 gr H_2O -t.

$C_{21}H_{24}O_7$ képlet alapján a számított értékek: $C=64.94\%$, $H=6.18\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C=64.71\%$. $H=6.10\%$.

A chalcon gyengén sárgás színű lapocskákban kristályosodik, a melyek 128—129 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkoholban, ætherben és benzolban. Meleg petroleumætherben a termék igen nehezen oldódik. Tömény kénsav vöröses színnel oldja.

¹ Journ. für prakt. Chemie 82, 278 (1910).

4', 5'- 3, 4, 5-pentamethoxychalkon.

Az alábbi kísérletekhez szükséges acetoveratrolt FRIEDEL és CRAFTS¹ eljárása szerint állítjuk elő.

A kondenzáció eszközlésére 1·1 gr acetoveratrolt és 1·2 gr trimethylgallusaldehydet 20 cm³ alkoholban oldunk fel. Ezután 5 gr 50%-os natronlúgot elegyítünk az oldathoz és másnapig a reactioelegyet meleg helyen állni hagyjuk, miközben a kondenzációs termék kiválik. A nyers terméket alkoholból kristályosítjuk át.

Hozadék 1·3 gr.

0·1604 gr anyag adott: 0·3940 gr CO₂-t, 0·0892 gr H₂O-t.

C₂₀H₂₂O₆ képlet alapján a számított értékek: C = 67·03%.
H = 6·14%.

Kísérletileg talált értékek: C = 66·99% ; H = 6·22%.

A vegyület világossárga lapocskákban kristályosodik, a melyek 131—132 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkoholban. Meleg petroleumæther a chalkont csak kevésé oldja. Tömény kénsavban a vegyület vérvörös színnel oldódik.

3, 4, 5-trimethoxynitrostyrol.

Az alábbi aldehideknek kondenzációját ROSENEMUND² adatainak megfelelőleg eszközöljük.

6 gr trimethylgallusaldehydet 80 cm³ tömény alkoholban oldunk és az oldathoz 4 gr nitromethant adunk. Az oldatot ezután hűtőkeverék segítségével —5 C°-ra hűtjük le és lassan 8 gr kaliumhydroxydból, 8 cm³ vízből és 20 cm³ alkoholból készített alkoholos kalioldatot adagolunk hozzá, miközben arra ügyelünk, hogy a hőmérséklet ne emelkedjen —5 C° fölé. A reactiokeveréket negyed órán át 0 C°-on hagyjuk állni, ezután 50 cm³ vízzel elegyítjük és néhány jégdarabot adunk hozzá. A lombik tartalmát keverés közben 100 cm³ tömény sósav és 300 cm³ víz lehűtött keverékébe öntjük, miközben a nitrostyrol

¹ GATTERMANN: Ber. 32, 1199 (1890).

² Loc. cit.

kiválik. Negyed órát állni hagyjuk, majd szűrjük, vízzel jól ki-mossuk és agyagtányéron szárítjuk ki. A további tisztítás cél-jából alkoholból kristályosítjuk át.

Termelés 80 %.

0.1360 gr anyag adott: 0.2754 gr CO_2 -t, 0.0675 gr H_2O -t.

0.1920 gr anyag adott: 9.0 cm³ N -t (14°, 770 mm).

$C_{11}H_{13}O_5N$ képlet alapján számított értékek: $C = 55.23\%$, $H = 5.43\%$, $N = 5.83\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 55.22\%$, $H = 5.54\%$, $N = 5.56\%$.

A styrol könnyen oldódik alkoholban és ætherben. Meleg ligroinban a termék könnyen oldódik, ellenben petroleumæther-ben csak igen nehezen. Sárga, 119–120 C°-on olvadó tükben kristályosodik. Tömény kénsav vörös színnel oldja.

4-oxy 3, 5-dimethoxynitrostyrol.

2 gr syringaaldehydet és 1 gr nitromethant feloldunk 5 cm³ alkoholban. A hűtőkeverék segélyével —5 C°-ra lehűtött oldat-hoz 2 gr kaliumhydroxydból, 2 cm³ vízből és 5 cm³ alkoholból készített oldatot elegyítünk, miközben a hőmérsékletet —5 C° fölé nem hagyjuk emelkedni. A reactioelegyet negyed órát a hűtő-keverékben hagyjuk állni, ezután 12 cm³ vizet és egynéhány jégdarabot adunk hozzá. Az oldatot keverés közben 25 cm³ tömény sósav és 75 cm³ víz lehűtött elegyébe folytatjuk, mi-közben a kondenzációs termék kiválik. A leszűrt kristályokat agyagtányéron szárítjuk és alkoholból kristályosítjuk át.

Hozadék 69 %.

0.1136 gr anyag adott: 0.2230 gr CO_2 -t, 0.0498 gr H_2O -t.

0.1325 gr anyag adott: 7.4 cm³ N -t (21°, 772 mm).

$C_{10}H_{11}NO_5$ képlet alapján a számított értékek: $C = 53.33\%$, $H = 4.88\%$, $N = 6.22\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 53.52\%$, $H = 4.87\%$, $N = 6.34\%$.

A vegyület sárga tükben kristályosodik, a melyek 115–116 C°-on olvadnak. A styrol könnyen oldódik alkoholban,

ætherben, benzolban és ligroinban. Petroleumætherben a termék melegen is csak kevésbé oldódik. Tömény kénsavban a vegyület ibolya színnel oldódik.

—3, 5-dimethoxy-4-acetoxy (α)-benzoyl-imino-fahéjsavanhydrid.

2 gr syringaaldehydet, 2·6 gr hyppursavat és 1·5 gr vízmentes natriumacetatot porcellánmozsárban jól összekeverünk, 6·5 cm³ ecetsavanhydridet adunk hozzá és 2 óra hosszat a vízfürdőn hevítjük. A reactioelegyet a lehülés után leszűrjük és alkohollal, majd vízzel jól kimossuk. A további tisztítás céljából a terméket alkoholból a kristályosítjuk át. Hozadék 1·8 gr. Mint az alábbi analysis igazolja, a kondenzációnál egyidejűleg a benzolgyűrűben levő hydroxylcsoporton egy acetylgyök lépett be.

0·1517 gr anyag adott: 0·3637 gr CO₂-t, 0·0657 gr H₂O-t.

0·1473 gr anyag adott: 5·25 cm³ N-t (18°, 766 mm).

C₂₀H₁₇O₆N képlet alapján a számított értékek: C=65·39%, H=4·63%, N=3·81%.

Kísérletileg talált értékek: C=65·37%, H=4·81%, N=4·13%.

Az azlacton citromsárga színű tüket alkot, a melyek 212—213 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik meleg alkoholban, benzolban és ligroinban. Petroleumætherben melegen is csak kevésbé oldódik. Tömény kénsav vörös színnel oldja.

E vizsgálatok kísérleti részét SZÖNYI GÉZA úr végezte.

A LINEÁRIS INTEGRO-DIFFERENTIÁL-EGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

SCHLESINGER LAJOS I. tagtól.

Bevezetés.

Jelentsenek x , a és b egy-egy n^2 elemből álló matrixot és jelentse xa a szokott módon komponált matrixot. Akkor az

$$xa = b, \quad (1)$$

vagy a részletesebb alakban írt

$$(x_{ik})(a_{ik}) = (b_{ik}) \quad i, k=1, 2, \dots, n \quad (1a)$$

egyenlet azt a feladatot fejezi ki, hogy az $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ értékek számíttassanak ki az

$$\sum_{\lambda=1}^n x_{i\lambda} a_{\lambda k} = b_{ik} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1b)$$

egyenletrendszerből, hol i az $1, 2, \dots, n$ értékeket veszi fel.

Hogy tehát az (1) jelű egyenletben a betűk matrixokat jelentenek, ez algebrai szempontból annyit jelent, hogy az n egyenletből álló és n ismeretlent tartalmazó

$$\sum_{\lambda=1}^n x_{\lambda} a_{\lambda k} = b_k \quad (1c)$$

lineáris egyenletrendszer n különböző b_1, b_2, \dots, b_n értékrendszerre nézve föloldandó.

Az (1) jelű lineáris egyenlet helyett tekintsük most már a

$$\frac{dx}{dz} = xa \quad (2)$$

lineáris differenciál-egyenletet, melyben a a z komplex változónak egy monogen függvényét jelenti.¹ Ha x és a matrixokat jelentenek, az egyenlet részletes alakja ez lesz:

$$\left(\frac{dx_{ik}}{dz} \right) = (x_{ik}) (a_{ik}), \quad (i, k=1, 2, \dots, n) \quad (2a)$$

Ez esetben tehát n^2 számú differenciál-egyenlet feloldásáról van szó, melyeket a

$$\frac{dx_{ik}}{dz} = \sum_{\lambda=1}^n x_{i\lambda} a_{\lambda k} \quad (i, k=1, 2, \dots, n) \quad (2b)$$

alakban írhatunk; végeredményben tehát az n ismeretlen függvényre vonatkozó

$$\frac{dx_k}{dz} = \sum_{\lambda=1}^n x_{\lambda} a_{\lambda k} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2c)$$

differenciál-rendszernek n különböző megoldását kell keresni.

Ha az (1c) és (2c) számú egyenletekben n minden határon túl nő, akkor legelsőben is kiadódnak a *megszámíthatóan* végtelen sok ismeretlenre vonatkozó analog problémák. A végtelen sok ismeretlenre vonatkozó végtelen sok lineáris egyenletek elméletét, melyet HILL, POINCARÉ, VON KOCH és újabban mások dolgoztak ki, itt csak megemlítjük; a lineáris differenciálegyenletek analog problémáját fönti, végtelen sok egyenletből álló és végtelen sok ismeretlen függvényt tartalmazó formájában v. KOCH tárgyalta²; viszont a «végtelened rendű» lineáris egyenletnek idetartozó, de speciálisabb kérdésével már EULER³ is foglalkozott és BOURLET⁴ kiemelte ez utóbbi problémának a distributív függvényműveletek tanával való kapcsolatát.

¹ A *teljes* egyenlet helyett a *homogen* egyenletet tárgyaljuk, mivel ismert módon az utóbbira vezethető vissza az általános eset tárgyalása.

² Öfversigt, Stockholm, 56, 1899. p. 395 s. köv.

³ Institutiones Calculi Integralis Vol. II, §§. 1195—1224., L. EULERI Opera Omnia, Series I, Vol. 12. (ed. ENGL et SCHLESINGER), p. 360 ff.

⁴ Annales scient. de l'École Normale Sup. 3. série, 14 (1897). p. 133.

VOLTERRA és FREDHOLM lineáris integrálegyenletek megoldására az integrálegyenletet határátmenet útján lineáris egyenletrendszerből származtatták; e határátmenettel (melynél az n számú ismeretlen helyébe *folytonos* változó lép) az (1c) jelű egyenletből az

$$\int_0^1 x(\lambda) a(\lambda, k) d\lambda = b(k), \quad (1d)$$

illetőleg, ha

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \alpha_{ik} \quad \delta_{ii}=1, \quad \delta_{ik}=0, (i \neq k)$$

tétetik, az

$$x(k) + \int_0^1 x(\lambda) a(\lambda, k) d\lambda = b(k) \quad (1e)$$

integrálegyenletek származnak, melyeket sorra első, illetőleg másodfajú integrálegyenletnek szoktak nevezni.

Ha ugyanezt a határátmenetet alkalmazzuk a (2c) jelű differenciál-rendszerre, a

$$\frac{dx(k)}{dz} = \int_0^1 x(\lambda) a(\lambda, k) d\lambda \quad (2d)$$

lineáris integrodifferenciál-egyenlethez jutunk; ebben tehát λ és k a 0 és 1 között variáló valós számokat, $a(\lambda, k)$ pedig a z complex változónak egy monogen függvényét jelenti, mely a λ, k és z változóknak folytonos függvénye.

Integrodifferenciál-egyenletekkel VOLTERRA 1909 óta foglalkozott¹; kiinduláspontja a vonalfüggvények voltak, nevezetesen az öröklékenység (hereditas) kérdéseivel való összefüggésben. Eredetileg VOLTERRA csak olyan egyenletekkel foglalkozott, melyekben az integrál felső határa változó (e szerint a (2d) egyenletben az integrál felső határa k volna 1 helyett); de már a BOREL-gyűjteményben megjelent «*Leçons sur les fonctions des lignes*» című könyvében,² valamint néhány egyidejűleg és ké-

¹ Az első idevonatkozó közlemény: Sulle equazioni integro-differenziali. Rendic. Accad. dei Lincei, serie 5, XVIII, 1910, 1° sem. p. 167—174.

² Paris, 1913. Lásd különösen a XIII. fejezetet, p. 189, stb.

sőbb megjelent dolgozatában ¹ állandó határú integrál is szerepel a problémákban; nevezetesen szerepel ² a

$$\frac{d f(\xi, a)}{da} = \int_0^1 \varphi(\xi, \eta) f(\eta, a) da \quad (V)$$

egyenlet is, mely a (2d) egyenletnek felel meg abban az esetben, mikor $a(\lambda, k)$ független z -től; ez egyenlet megoldása egy bizonyos transcendens függvény segítségével történik, melyről a VOLTERRA-féle *transcendens* neve alatt alább többször lesz szó. VOLTERRA ezeket az integro-differentiál-egyenleteket nem a fönt megbeszélt határátmenettel, hanem más úton származtatja. A (2d) jelű lineáris integráldifferentiál-rendszerből való származtathatóságát már 1911-ben tudtam és több ízben — például a cambridgei 1912. évi kongresszuson — szaktársakkal előszóval közöltem is egyet-mást. Általános felfogásom értelmében a lineáris integro-differentiálegyenleteknek (és más ezekkel szoros összefüggésben álló egyenleteknek) elmélete az analysisnek egy merőben új fejezetét alkotja; e theoria ép oly viszonyban van a lineáris differentiál-rendszereknek az elmúlt évtizedben általam kifejlesztett, VOLTERRA régebbi dolgozataihoz csatlakozó tanához, mint a minő viszonyban áll a lineáris integrálegyenletek elmélete a lineáris egyenletrendszerek elméletéhez.

E dolgozatban az új elmélet formális és quantitativ alapjait adom meg és alkalmazásképen rendszeresen megoldom az isotrop rugalmas gömbre vonatkozó integro-differentiál-egyenletet; ezt az egyenletet VOLTERRA állította fel 1910-ben és meg is oldotta az ő sajátos módszere segítségével.

I. Függvénytávolságok és függvénytartományok.

1. Az alábbiakban i, k, λ valós változókat jelentenek, melyek a 0 és 1 közötti összes értékeket felveszik; viszont x, y, z valamilyen, valós vagy complex változókat jelentenek. Az aláb-

¹ Sopra equazioni integr. diff. aventi i limiti costanti, Rendic. Lincei 1913, 2° sem. p. 43, 1914, 1° sem. p. 393.

² Lásd u. o., 1914, 1° sem. p. 394.

biakban tárgyalandó analitikai alakzatok közül a legegyszerűbb egy x -től és i -től függő mennyiség $a(x|i)$, mely tehát a $0 \leq i \leq 1$ intervallum minden i pontjához x -nek egy függvényét rendeli. Ezért az $a(x|i)$ mennyiséget *függvénytávolságnak* nevezzük; x a *variabilis*, i pedig a *helymutató* vagy *index*. Ha x csak valós értékeket vehet fel, a variabilis folytonos, differentiálható függvénytávolságairól, ha x complex értékeket is felvehet, a variabilis monogen, egyértékű függvénytávolságairól lesz szó. Ha a $a(x|i)$ független az x -től, «*constansok távolságja*»-ról beszélünk. Épp így függhet egy mennyiség több *változótól*, x, y, z -től és több *helymutatótól*: i, k, l, \dots -től. Az alábbiakban legtöbbször *egy* variabilis: x , és *két* helymutató: i és k fog szerepelni. Egy az x, i és k értékeitől függő $b(x|i, k)$ -t *függvénytartomány*-nak nevezzük; a $b(x|i, k)$ ugyanis az x variabilis függvényeinek oly csoportját adja, mely a négyzetes

$$0 \leq i \leq 1, \quad 0 \leq k \leq 1$$

tartomány minden pontjához az x -nek egy jól meghatározott függvényét rendeli. Ha valamely tulajdonság megvan az x variabilis összes $b(x|i, k)$ függvényeinél, azt fogjuk mondani, hogy e tulajdonság megvan a függvénytartományban is; beszélünk például differentiálható, monogén stb. függvénytartományokról. Ha $b(x|i, k)$ független x -től, «*constansok tartományá*»-ról fogunk beszélni.

Ez újszerű és — mint látni fogjuk — hasznos és fontos fogalmakat illetőleg számos érdekes kérdés vetődik fel; itt csak néhány egyszerű tételt vezetünk le, melyek a *complex x változó*-nak *monogen függvénytartományaira vonatkoznak*. Közvetlenül látható lesz, mikép lehet e tételeket az x monogen függvénytávolságaira specializálni.

2. Tekintsük az $(x - x_0)$ -nak egy hatványsorát, melynek együtt-hatói i -nek és k -nak függvényei, de x -től függetlenek. Legyen e sor:

$$a_0(i, k) + a_1(i, k)(x - x_0) + a_2(i, k)(x + x_0)^2 + \dots \text{in inf.} \quad (1)$$

és tegyük fel, hogy:

1. az (1) jelű sor convergál a $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq k \leq 1$ tartomány minden (i, k) értékpárja esetén egy

$$|x - x_0| \leq R$$

tartományban, hol R független i -től és k -től és értékei e tartományon belül véges felső határral bírnak.

2. az $a_0(i, k)$, $a_1(i, k)$, $a_2(i, k)$, ..., együtthatók az (i, k) négyzetes tartományában való folytonos függvényei.

Ilyen tulajdonságú sorokat könnyen lehet konstruálni, válaszszunk például egy racionális tört-függvényt, melynek nevezőjében x együtthatói fix számok, míg a számlálóban x együtthatói az i és k folytonos függvényei. Ha a függvényt sorba fejtjük egy oly $x = x_0$ hely körül, melyben a nevező nem nulla, a fönt leírt tulajdonságú sorhoz jutunk.

Az 1. és 2. tulajdonságokkal bíró (1) alakú sorokra áll a következő tétel:

Jelentse a_v az $a_v(i, k)$ abszolút értékének felső határát: akkor az

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \text{ in inf.} \quad (2)$$

hatványsor convergens az $|x - x_0| < R$ tartományban.

A tétel bizonyítása egyszerű. Mivel az (1) jelű sor az $|x - x_0| = R$ körön convergens, WEIERSTRASS ismert tétele alapján írható, hogy

$$|a_v(i, k)| < g(i, k) \cdot R^{-v},$$

hol $g(i, k)$ a sor abszolút értékének az $|x - x_0| = R$ kör mentén vett felső határa. Legyen g a $g(i, k)$ függvénynek az (i, k) -négyzetre vonatkozó felső határa; akkor tehát

$$|a_v(i, k)| < g \cdot R^{-v}.$$

Mivel $|a_v(i, k)|$ az i és k elemek folytonos függvénye és így felső határát csakugyan fel is veszi, írható, hogy

$$a_v < g \cdot R^{-v},$$

miből a kimondott tétel közvetlenül folyik.

3. E tételből következik: Az (1) jelű sor, mint az i, k indexek függvénye, a $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq k \leq 1$ négyzetben egyenlete-

sen *convergens és így i -re és k -ra vonatkozólag tagonként integrálható.*

Az (1) sornak (i, k) tartományon belül való egyenletes *convergentiája*, a mint látjuk, lényegesen annak a következménye, hogy a y felső határ létezik, a mi pedig ismét annak a folyománya, hogy az 1. föltevésben foglaltak szerint a sor értékei az (i, k) tartományon belül véges felső határral bírnak. E nélkül az (1) *convergentiája* eme (i, k) tartomány bármilyen kis részében sem tartozik egyenletesnek lenni, a mi HARTOGS-nak¹ egyik példájából kiténik.

Ha egy függvénytartomány olyan, hogy minden $z = z_0$ hely környezetében, a hol e függvénytartomány egyértékű, véges, folytonos, sorbábontása a $z - z_0$ hatványai szerint az 1. és 2. tulajdonságokkal bír, akkor azt mondjuk, hogy e függvénytartomány a z változóra nézve monogen és a helymutatókra vonatkozólag folytonos.

Ezek alapján tehát egy ily függvénytartománynál minden elem az egész (i, k) -négyzetben egyenletesen *convergal*, az indexekre vonatkozólag tagonként integrálható és az indexeknek folytonos függvénye.

Az alábbiakban, ha csak külön megjegyzés mást nem állapít meg, függvénytartományon vagy távolságon olyat fogunk érteni, mely a variabilisra vonatkozólag monogen és az indexre vonatkozólag folytonos. A variabilist tehát *complex*-nek tételezzük fel és ezentúl z -vel jelöljük.

4. Tekintsük meg most már a lineáris integro-differentiál-egyenleteknek azt a két alakját, melylyel a következőkben foglalkozni fogunk; ezek a függvénytávolságra vonatkozó egyenlet:

$$\frac{dx(z|k)}{dz} = \int_0^1 x(z|k) a(z|\lambda, k) d\lambda \quad (A)$$

és a függvénytartományra vonatkozó egyenlet:

$$\frac{dy(z|i, k)}{dz} = a(z|i, k) + \int_0^1 y(z|i, \lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda. \quad (B)$$

¹ Lásd F. HARTOGS: Mathem. Annalen 62 (1906) p. 11.

A következő fejezetben részletesen megbeszéljük e kétfajta egyenlet kölcsönös vonatkozását. Itt csak e fejezet 2. és 3. pontjaiban foglaltakhoz akarunk egy megjegyzést fűzni.

Mindkét egyenletben $a(z, i, k)$ -t az *együttható tartomány*-nak nevezzük; erről nemcsak azt tételezzük fel, hogy monogen z -ben és folytonos i -ben és k -ban, hanem hogy az egész z síkban egyértékű függvény, mely $z = z_0$ környezetében holomorph.

A III. fejezetben megmutatjuk, hogy ekkor (A) egy

$$x(z, k) = c_0(k) + c_1(k)(z - z_0) + c_2(k)(z - z_0)^2 + \dots \text{ in inf,}$$

alakú függvénytávolsággal, vagy (B) egy

$$y(z | i, k) = c_0(i, k) + c_1(i, k)(z - z_0) + c_2(i, k)(z - z_0)^2 + \dots \text{ in inf}$$

alakú függvénytartománnyal megoldható, hol e sorok a 2. pont 1. és 2. feltételeinek eleget tesznek, és ki fog adódni az is, hogy ugyanaz az e sorokból analitikai folytatás útján nyert sorok mindegyikére is áll és hogy ezek is eleget tesznek az (A), illetve (B) egyenletnek. Ily módon tehát ezeknek az integro-differentialis egyenleteknek monogen és a helymutatókra vonatkozólag folytonos megoldási távolságait, illetőleg megoldási tartományait nyerjük.

II. A határátmenet, mely az összegből az integrálhoz vezet.

5. Jelentsen $\varphi(i)$ egy a $0 \leq i \leq 1$ darabon definiált folytonos függvényt és n egy pozitív egész számot. Ha --- kissé eltérőleg a GAUSS-féle jelöléstől --- a pozitív, valós a számban foglalt legnagyobb egész számot

$$[a] - 1$$

jellel jelöljük, akkor

$$[ni] - 1 \leq ni < [ni],$$

tehát

$$i - \frac{[ni] - 1}{n} < \frac{1}{n}, \quad \frac{[ni]}{n} - i < \frac{1}{n},$$

úgy hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[ni] - 1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[ni]}{n} = i.$$

A $\varphi(i)$ folytonossága folytán tehát

$$\varphi(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{[ni]}{n}\right)^1$$

és éppen így írható az i és k indexek folytonos $f(i, k)$ függvényénél:

$$f(i, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{[ni]}{n}, \frac{[nk]}{n}\right).$$

Vizsgáljuk például a következő integrált:

$$\int_0^1 f(i, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Ez integrál i -nek folytonos függvénye, mely a következő alakban állítható elő:

$$\int_0^1 f(i, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{[ni]}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) \varphi\left(\frac{\lambda}{n}\right).$$

6. A $\varphi(i)$ függvényt determináló FREDHOLM-féle integrálegyenlet, ugyanis

$$\psi(i) = \varphi(i) + \int_0^1 f(i, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda \quad (\text{I})$$

közelítőleg megoldható azáltal, hogy a

$$\varphi\left(\frac{[ni]}{n}\right) = x_{[ni]}^{(n)} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{[ni]}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) x_{\lambda}^{(n)} \quad (\text{E})$$

¹ Ha n helyébe egy minden határon túl növekvő sor tagjait tesszük, például a $10^1, 10^2, \dots$ sor tagjait, akkor $\varphi\left(\frac{[ni]}{n}\right)$ értékek egy oly «hozzátartozó sort» adnak, mely a $\varphi(i)$ függvényt egyértelműen meghatározza. Érdekes volna megállapítani annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy valamikép például az $10^1, 10^2, \dots$ -hez hozzárendelt sor tényleg folytonos függvényt determináljon. Még megjegyezzük, hogy miközben i a $0 \dots 1$ intervallumot futja be, az $[ni]$ számok az $1, 2, \dots, n+1$ számok egy permutációját adják, miközben $n+1$ csak az $i=1$ esetben lép fel, úgy hogy valójában csak az $1, 2, \dots, n$ számok jönnek számításba.

egyenletrendszerből az $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ értékeket kiszámítjuk; ezek az értékek a megfelelő $\varphi(i)$ függvényértékeket adják előírt megközelítéssel, ha csak n elég nagy érték; ez a VOLTERRA és FREDHOLM-féle megoldási elv.

Hogy ez az eljárás csakugyan az integrálegyenletet megoldó függvényhez vezet, azt az (E) egyenletrendszer egyenes vizsgálatából lehet kimutatni, például az ismert HILBERT-féle eljárás szerint.¹ E bizonyítás lépései a következők: 1. kimutatjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{[ni]}^{(n)}$ létezik; e limes természetesen i -nek egy függvénye: $\varphi(i)$; 2. kimutatjuk, hogy $\varphi(i)$ folytonos és eleget tesz az integrálegyenletnek.

Kiadódik, hogy az (E) rendszer determinánsa a

$$\left| \delta_{gh} + \frac{1}{n} f\left(\frac{g}{n}, \frac{h}{n}\right) \right| \quad (2)$$

$g, h = 1, 2, \dots, n$

hol δ_{gh} a KRONECKER-féle symbolumot jelenti,² határérték felé convergál, ha n minden határon túl nő; e határértéket az $f(i, k)$ függvény FREDHOLM-féle determinánsának nevezzük; jelben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \delta_{gh} + \frac{1}{n} f\left(\frac{g}{n}, \frac{h}{n}\right) \right| = \text{Det. } f(i, k) = D_f \quad (3)$$

$g, h = 1, 2, \dots, n$

Ez a D_f természetesen i -től és k -től független, tehát constans szám, ha f csak i -től és k -től függ; ha azonban $f(i, k)$ a z variabilisnak függvénytartománya, akkor D_f függvénye z -nek. Ha pedig $f(i, k)$ a z complex változónak monogen függvénytartománya, akkor a FREDHOLM-determináns kifejtése³

$$D_f = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \begin{matrix} f(i_1, i_1) & \dots & f(i_1, i_p) \\ f(i_p, i_1) & \dots & f(i_p, i_p) \end{matrix} \right| di_1 \dots di_p \quad (4)$$

¹ Grundzüge einer allg. Theorie der Integralgleichungen, Leipzig, 1912. Lásd például KOVALEWSKI, Determinanten, Leipzig, 1909, pg. 455 stb.

² Vagyis $\delta_{gh} = 0$, ha $g \neq h$ és $\delta_{gg} = 1$.

³ Lásd FREDHOLM, Acta Mathem. 27 (1903), p. 365., v. ö. KOVALEWSKI, l. c. pg. 462.

egyenletesen convergens a z regularitási tartományában és az (i, k) négyzetben, mert a sor tagjainak abszolút értéke kisebb, mint az

$$1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{p})^p}{p!} M^p \quad (5)$$

sor megfelelő tagjai, hol M egy (az i, k és z -től független) felső határa az $f(i, k)$ értékeknek. Ezek szerint WEIERSTRASS ismert tétele alapján következik, hogy D_f a z -nek monogen függvénye, mely az $f(i, k)$ regularitási tartományában szintén regularis.

7. Vizsgáljuk most a függvénytartományra vonatkozó (B) jelű egyenletet:

$$\frac{dy(z|i, k)}{dz} = a(z|i, k) + \int_0^1 y(z|i, k) a(z|\lambda, k) d\lambda \quad (B)$$

A FREDHOLM-féle (I) jelű egyenletnek megfelel az (E) jelű egyenletrendszer a 6. pontban; analog módon a fönti (B) egyenletnek megfelel a következő lineáris differenciál-rendszer:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(y_{[ni], [nk]}^{(n)}) &= a\left(z \mid \frac{[ni]}{n}, \frac{[nk]}{n}\right) + \\ &+ \sum_{\lambda=1}^n y_{[ni], \lambda}^{(n)} \frac{1}{n} a\left(z \mid \frac{\lambda}{n}, \frac{[nk]}{n}\right); \end{aligned} \quad (D)$$

e rendszer az n^2 számú

$$y_{\lambda, \mu}^{(n)} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

függvényekre vonatkozik.

Az

$$\frac{1}{n} a\left(z \mid \frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{n}\right) = a_{\lambda\mu}^{(n)}(z) \quad (7)$$

jelölés alkalmazása után a (D) rendszer a következő alakot veszi fel:

$$\frac{dy_{\lambda\mu}^{(n)}}{dz} = n a_{\lambda\mu}^{(n)}(z) + \sum_{\nu=1}^n y_{\lambda\nu}^{(n)} a_{\nu\mu}^{(n)}(z). \quad (D')$$

Legyen végül

$$y_{\lambda\mu}^{(n)} + n\delta_{\lambda\mu} = nx_{\lambda\mu}^{(n)}, \quad (8)$$

akkor $x_{\lambda\mu}^{(n)}$ egy integrálmatrixa¹ a

$$\frac{dx_{\mu}^{(n)}}{dz} = \sum_{\nu=1}^n x_{\nu}^{(n)} a_{\nu\mu}^{(n)}(z) \quad (e')$$

differentiálrendszernek, mely

$$\frac{d}{dz} (x_{[nk]}^{(n)}) = \sum_{\lambda=1}^n x_{\lambda}^{(n)} \frac{1}{n} a \left(z \mid \frac{1}{n}, \frac{[nk]}{n} \right) \quad (e)$$

alakban írva, épp oly módon felel meg a

$$\frac{dx(z|k)}{dz} = \int_0^1 x(z|\lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda \quad (A)$$

integrálegyenletnek, mint a (L) jelű rendszer a (B) jelű egyenletnek.

Ha $c_1^{(n)}, \dots, c_n^{(n)}$ tetszésszerű konstansok, akkor, mint ismertes, az (e) rendszer általános megoldása

$$x_{\mu}^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^n c_{\lambda}^{(n)} x_{\lambda\mu}^{(n)} \quad (9)$$

alakban írható, feltéve, hogy az $x_{\lambda\mu}^{(n)}$ függvények valóban integrálmatrixot alkotnak, vagyis az

$$|x_{\lambda\mu}^{(n)}| \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

determináns nem azonosan zéró. Az (e) rendszer minden más $X_{\lambda\mu}^{(n)}$ integrálmatrixa az $x_{\lambda\mu}^{(n)}$ matrix által az

$$X_{\lambda\mu}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^n c_{\lambda\nu}^{(n)} x_{\nu\mu}^{(n)} \quad (11)$$

formában állítható elő, hol $(c_{\lambda\nu}^{(n)})$ egy n^2 konstansból álló matrix, melynek determinánsa nem zéró. Ha tehát

$$Y_{\lambda\mu}^{(n)} = (X_{\lambda\mu}^{(n)} - \delta_{\lambda\mu}) n$$

¹ Vagyis n lineárisan független megoldás rendszere. V. ö. SCHLESINGER: Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig, 1908.

és

$$y_{\lambda\mu}^{(n)} = c_{\lambda\mu}^{(n)} - \delta_{\lambda\mu} n$$

a (D) rendszernek két integrálmatrixa, akkor köztük fennáll a következő relatio:

$$Y_{\lambda\mu}^{(n)} + n\delta_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^n c_{\lambda\nu}^{(n)} (y_{\nu\mu}^{(n)} + n\delta_{\nu\mu}),$$

melyet a

$$c_{\lambda\mu}^{(n)} = \gamma_{\lambda\mu}^{(n)} + \delta_{\lambda\mu}$$

jelölés bevezetése után

$$Y_{\lambda\mu}^{(n)} = n\gamma_{\lambda\mu}^{(n)} + y_{\lambda\mu}^{(n)} + \sum_{\nu=1}^n \gamma_{\lambda\nu}^{(n)} y_{\nu\mu}^{(n)} \quad (12)$$

alakban írhatunk. A (C) rendszer általános megoldása tehát (9) és (8) tekintetbe vételével ez lesz:

$$n c_{\lambda\mu}^{(n)} = n c_{\lambda\mu}^{(n)} + \sum_{\lambda=1}^n c_{\lambda\mu}^{(n)} y_{\lambda\mu}^{(n)}. \quad (13)$$

8. Tegyük fel, hogy a $(z|i; k)$ monogen függvénytartomány, mely a z_0 helynek

$$|z - z_0| < R \quad (14)$$

környezetében holomorph.¹ Akkor tehát a (7) egyenletek által adott $c_{\lambda\mu}^{(n)}(z)$ függvények ugyanabban a környezetben holomorphok és a lineáris differenciálegyenletek (c) rendszerének — jól ismert tételek szerint — van oly, a (14) tartományban holomorph $c_{\lambda\mu}^{(n)}$ integrálmatrixa, mely a $z = z_0$ pontban az $(n\delta_{\lambda\mu})$ matrixra redukálódik. Ha a FREDHOLM-egyenletnél követett eljárás módjára megcsináljuk az $n \rightarrow \infty$ -nek megfelelő határátmenetet, nehézség nélkül látjuk, hogy az

$$y_{\lambda\mu}^{(n)} = c_{\lambda\mu}^{(n)} - n\delta_{\lambda\mu}$$

függvények egy $y(z|i, k)$ függvénytartományt határoznak meg, melyre nézve

¹ A következő megfontolások érvényesek az $a(z|i, k)$ függvénytartomány analitikai jellegét kevésbé megszorító föltevések alapján is; az egyszerűség kedvéért megelégszünk azzal, hogy a szövegben foglalt erősebben korlátozó föltevéseket alkalmazzuk.

$$y\left(z\left|\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{n}\right.\right)=y_{\lambda\mu}^{(n)}; \quad (15)$$

és így

$$y(z|i, k)=\lim_{n \rightarrow \infty} y_{[ni] [nk]}^{(n)}. \quad (16)$$

E függvénytartomány a (14) tartományban holomorph, eleget tesz a (B) egyenletnek és értéke zéró a $z=z_0$ pontban; ezért azt a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} y(z|i, k)=0 \quad (17)$$

kezdőfeltétel által determinált megoldási tartománynak nevezzük.

Az $x_{\lambda\mu}^{(n)}$ integrálmatrix determinánsa nem tűnik el identikusan; értéke ¹:

$$|x_{\lambda\mu}^{(n)}|=e^{\int_{z_0}^z \sum_{\nu=1}^n a_{\nu\nu}^{(n)}(z) dz}. \quad (18)$$

Ha ez utóbbi egyenletben megcsináljuk a határátmenetet, akkor az egyenlet baloldalán (a (3), (8) és (15) egyenletek értelmében)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{\lambda\mu}^{(n)}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \delta_{\lambda\mu} + \frac{1}{n} y\left(z\left|\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{n}\right.\right) \right| = \text{Det. } y(z|i, k), \quad (19)$$

$\lambda, \mu=1, 2, \dots, n$

vagyis a határérték az $y(z|i, k)$ FREDHOLM-féle determinánsa, jobboldalt az exponenssel a (7) egyenlet alapján a következő változás történik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n a_{\nu\nu}^{(n)}(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{n} a\left(z\left|\frac{\nu}{n}, \frac{\nu}{n}\right.\right) \int_0^1 a(z|i, i) di.$$

Ilykép a teoriánk szempontjából nagyfontosságú következő egyenlethez jutunk:

$$\text{Det. } y(z|i, k) = e^{\int_{z_0}^z dz \int_0^1 a(z|i, i) di}, \quad (F')$$

mely tehát azt mondja, hogy a megoldást adó $y(z|i, k)$ függvénytartománynak FREDHOLM-féle determinánsa eleget tesz a következő elsőrendű differenciál-egyenletnek:

¹ Lásd JACOBI, Werke, t. IV., pg. 403, Berlin, 1886.

$$\frac{dA}{dz} = \int_0^1 a(z|i, i) di \cdot A. \quad (F')$$

Ebből következik, hogy *e* determináns az $a(z|i, k)$ *coefficiens*-nek holomorphia-tartományában sehol sem zéró. Hogy *e* tartományban a determináns holomorph, következik a fönt (l. 6. pont) tett megjegyzésből.

Egyik hallgatóm a vezetésem alatt álló seminariumban megmutatta, hogy az (F') egyenletben kimondott tétel a — JACOBI-féle (18) jelű egyenlet nélkül is — közvetlenül igazolható a FREDHOLM-determináns (4) jelű alakja alapján.

9. A következőkben mindenekelőtt a (B), illetve az (A) egyenlet általános megoldását fogjuk a fönti számban nyert *partikuláris* $y(z|i, k)$ megoldásból előállítani, és pedig úgy, hogy a (12) és (13) jelű formulákban $n \rightarrow \infty$ -nek megfelelő határmenetet csinálunk.

A (12) formulában jelentsen $|\gamma_{\lambda\mu}^{(n)}|$ egy n^2 elemből álló matrixot, melynek

$$|\gamma_{\lambda\mu}^{(n)} + \delta_{\lambda\mu}| \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots, n$$

determinánsa zérótól különböző. Veszünk egy folytonos constans tartományt: $\gamma(i, k)$ -t és írjuk:

$$\gamma_{\lambda\mu}^{(n)} = \frac{1}{n} p \left(\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{n} \right). \quad (19)$$

Akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma_{\lambda\mu}^{(n)} + \delta_{\lambda\mu}| = \text{Det. } \gamma(i, k). \\ \lambda, \mu = 1, 2, \dots, n$$

Fel fogjuk tehát tételezni, hogy a $\gamma(i, k)$ FREDHOLM-féle determinánsa nem identikusan nulla.

Az $n \rightarrow \infty$ -nek megfelelő határátmenetnél a (12) jelű egyenlet jobb oldala a következőt adja:

$$\gamma(i, k) + y(z|i, k) + \int_0^1 \gamma(i, \lambda) y(z|\lambda, k) d\lambda \quad (21)$$

és *e* kifejezés oly függvénytartományt ad, mely, mint könnyen látható, a (B) egyenletnek eleget tesz; a kifejezés értéke a $z = z_0$

pontban éppen $\gamma(i, k)$. E függvénytartomány FREDHOLM-féle determinánsát kiszámíthatjuk vagy úgy, hogy az

$$|X_{\lambda\mu}^n| = |c_{\lambda\mu}^{(n)}| \cdot |r_{\lambda\mu}^{(n)}|$$

relációban n -t minden határon túl növeljük, vagy úgy, hogy az (I'') differenciálegyenletet vesszük alapul; kiadódik, hogy a kérdéses determináns a

$$\text{Det. } \gamma(i, k) \cdot \text{Det. } y(z|i, k) \quad (22)$$

szorzat.

A következő fejezetben egyenes számítással kimutatjuk, hogy a (21) jelű kifejezés, ha $\gamma(i, k)$ egy «tetszésszerű» constanstartományt jelent, a (I) egyenletnek általános megoldó függvénytartománya. A IV. fejezetben megmutatjuk, hogy mi a *compositiós* jelentése a (21) alatti formulának.

Hogy a (13) egyenletben a határátmenetet megcsinálhassuk, veszünk egy folytonos $c(k)$ constanstávolságot; legyen

$$c_{\lambda\mu}^{(n)} = c\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{n}\right). \quad (23)$$

Akkor a (13) egyenlet jobb oldala n -nel való osztás után az $n \rightarrow \infty$ -nek megfelelő határátmenetnél ezzé lesz:

$$c(k) + \int_0^1 c(\lambda) y(z|\lambda, k) d\lambda. \quad (24)$$

Nehézség nélkül megmutatható, hogy e kifejezés az (A) egyenletet kielégíti. A következő fejezetből kiviláglani fog, hogy e kifejezés (A) legáltalánosabb megoldását adja, ha $c(k)$ «szabadon választott» constanstávolságot jelent.

III. A tartományra vonatkozó egyenlet analitikus elméletének alapvonalai.

10). Legyen a

$$\frac{dy(z|i, k)}{dz} = a(z|i, k) + \int_0^1 y(z|i, \lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda \quad (B)$$

egyenletben az $a(z|i, k)$ coefficientstartomány a 3. értelmében

monogén, az i, k helymutatókra nézve folytonos és a z_0 -nak $|z - z_0| \leq R$ környezetében sorba fejtve; legyen sora:

$$a(z|i, k) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v(i, k) (z - z_0)^v. \quad (1)$$

Megkíséreljük a (1) egyenletnek eleget tenni az

$$y(z|i, k) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v(i, k) (z - z_0)^v \quad (2)$$

sor által. Elsőben is helyettesítés által a következő identitás adódik:

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{\infty} \nu c_v(i, k) (z - z_0)^{\nu-1} \sum_{v=0}^{\infty} a_v(i, k) (z - z_0)^v + \\ & + \sum_{v=0}^{\infty} (z - z_0)^v \int_0^1 [c_0(i, \lambda) a_v(\lambda, k) + c_1(i, \lambda) a_{v-1}(\lambda, k) + \dots + \\ & + c_v(i, \lambda) a_0(\lambda, k)] d\lambda; \end{aligned}$$

majd ebből a következő recursív formula:

$$\begin{aligned} & (\nu + 1) c_{\nu+1}(i, k) = \\ & = a_\nu(i, k) + \int_0^1 [c_0(i, \lambda) a_\nu(\lambda, k) + \dots + a_0(\lambda, k) c_\nu(i, \lambda)] d\lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

($\nu = 0, 1, 2, \dots$)

Válasszuk a kezdő tagot különösképen úgy, hogy

$$c_0(i, k) = 0, \quad (4)$$

akkor a recursív formula a következő egyszerűbb alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} & (\nu + 1) c_{\nu+1}(i, k) = \\ & = a_\nu(i, k) + \int_0^1 [c_1(i, \lambda) a_{\nu-1}(\lambda, k) + \dots + c_\nu(i, \lambda) a_0(\lambda, k)] d\lambda; \end{aligned} \quad (3')$$

($\nu = 1, 2, \dots$)

alább kitűnik, hogy a (4) egyenlet által létesített korlátozás nem lényeges. A $c_1(i, k), c_2(i, k), \dots$ együtthatók (3') szerint az i, k indexnek folytonos függvényei.

Legyen már most

$$|a_\nu(i, k)| \leq a_\nu,$$

hol tehát a_ν a folytonos $|a_\nu(i, k)|$ függvény felső határát jelenti.

Legyen

$$(\nu+1)\varepsilon_{\nu+1} = \alpha_{\nu} + \varepsilon_1 \alpha_{\nu-1} + \dots + \varepsilon_{\nu} \alpha_0, \quad \varepsilon_1 = \alpha_0; \quad \nu=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

akkor a (3') alatti reductióból következik, hogy

$$|c_{\nu}(i, k)| \leq \varepsilon_n. \quad (6)$$

Az

$$\alpha_0 + \alpha_1(z-z_0) + \dots \text{ in inf.}$$

sor convergál, (l. a 2. sz. pontot) a $|z-z_0| < R$ körben; az

$$1 + \varepsilon_1(z-z_0) + \dots \text{ in inf.}$$

sor az (5) jelű formula szerint az

$$e^{\int_{z_0}^z [\alpha_0 + \alpha_1(z-z_0) + \dots] dz}$$

függvény sora, tehát szintén convergál a $|z-z_0| < R$ körben. Ezért, tekintve a (6) jelű egyenlőtlenséget, a

$$y(z|i, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}(i, k) (z-z_0)^{\nu} \quad (7)$$

sor convergál, ha $|z-z_0| < R$ és a 2. sz. pontban foglalt 1. és 2. föltételeket kielégíti; e convergentia tehát az egész (i, k) -négyzetben egyenletes. Így a (7) sor a (B) egyenlet egy megoldó függvénytartományát adja, melynek értéke a $z=z_0$ pontban zéró és a mely holomorph a $|z-z_0| < R$ körben.

11. Jelentse most $Y(z|i, k)$ a (B) egyenlet *valamilyen* $z-z_0$ környezetében értelmezett megoldását. A (7) által definiált $y(z|i, k)$ a $Y(z|i, k)$ -val

$$Y(z|i, k) = y(z|i, k) + c(z|i, k) + \int_0^1 c(z|i, \lambda) y(z|\lambda, k) d\lambda \quad (8)$$

alakú összefüggésben van. Az (F) tétel értelmében (l. 8. pont) az $y(z|i, k)$ FREDHOLM-féle determinánsa a $|z-z_0| < R$ körben nullától különböző. A (8) alatti egyenlet, mely a z_0 adott környezetének egy z értékénél és az i index egy értékénél FREDHOLM-féle integrál-egyenlet, melynek magva $y(z|\lambda, k)$ és mely a $c(z|i, k)$ függvényre nézve föloldható. E megoldásnak FREDHOLM által megadott formájából közvetlenül látható, hogy a (8) egyen-

let által determinált $c(z|i, k)$ függvénytartomány z szerint differenciálható. Differenciáljuk hát a (8) egyenletet z szerint és tegyük a

$$\frac{aY(z|i, k)}{dz} \text{ és } \frac{dy(z|i, k)}{dz}$$

helyett a (B) egyenlet szerint velük egyenlő értékeket, mikor is a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Y(z|i, \lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda &= \int_0^1 y(z|i, \lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda + \frac{dc(z|i, k)}{dz} + \\ &+ \int_0^1 \frac{dc(z|i, \lambda)}{dz} y(z|\lambda, k) d\lambda + \int_0^1 c(z|i, \lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda + \\ &+ \int_0^1 c(z|i, \lambda) \int_0^1 y(z|\lambda, \mu) a(z|\mu, k) d\mu d\lambda; \end{aligned}$$

ha az utolsó tagot alkotó kettős integrálban az integratio változóit fölcseréljük és a (8) egyenletet tekintetbe vesszük, a következő egyenlethez jutunk:

$$0 = \frac{dc(z|i, k)}{dz} + \int_0^1 \frac{dc(z|i, k)}{dz} y(z|\lambda, k) d\lambda. \quad (9)$$

Mivel $y(z|i, k)$ FREDHOLM-féle determinánsa nem zéró, a (9) egyenletből következtethető,¹ hogy

$$\frac{dc(z|i, k)}{dz} = 0,$$

vagyis

$$c(z|i, k)$$

z -től független. Ezzel meg van mutatva, hogy

$$y(z|i, k) + c(i, k) + \int_0^1 c(i, k) y(z|\lambda, k) d\lambda \quad (10)$$

a (B) egyenlet legáltalánosabb megoldása, ha $c(i, k)$ szabadon választott függvénye i -nek és k -nak. A (10) jelű kifejezés FREDHOLM-féle determinánsa² a

¹ Lásd KOWALEWSKI idézett könyvét; pg. 488.

² U. o. pg. 467. (V. ö. a 9. ponttal.)

$$\text{Det } c(i, k) \cdot \text{Det } y(z | i, k)$$

szorzat; ha tehát $c(i, k)$ -nak FREDHOLM-féle determinánsa nem nulla, akkor (10)-nek determinánsa is $|z - z_0| < R$ esetben nullától különböző; csak ilyen esetben fogjuk a (10) jelű kifejezést a (B) egyenlet *megoldási tartományának* nevezni.¹

A (2) jelű tetszésszerű $c_0(i, k)$ -val kezdődő sor által előállított megoldás tehát a $z - z_0$ pontban eltűnő $y(z | i, k)$ megoldás segítségével a

$$c_0 | i, k) + y(z | i, k) + \int_0^1 c_0(i, \lambda) y(z | \lambda, k) d\lambda \quad (11)$$

módon fejezhető ki, a mi a (3) és (3') alatti formulák segítségével közvetlenül is megmutatható. A $c_0(i, k)$ -t a $z - z_0$ helyhez tartozó *kezdőtartománynak* nevezzük; ennek megadása után a (B) egyenlet megoldása egyértelműleg adva van. Egy megoldás akkor és csak akkor lesz *megoldási tartomány*, ha a kezdőtartomány FREDHOLM-féle determinánsa zérótól különböző. Hogy megoldási tartományt kapjunk, a mely az 1. pont 1. 2. követelményeinek eleget tesz, a kezdőtartományt az i és k index folytonos függvényeképp kell választanunk.²

12. Vizsgáljuk ezek után a megelőző pontban tárgyalt, a z_0 pont környezetében sorbafejtett megoldási tartománynak *analitikai folytatását*. E vizsgálatnál az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az $a(z | i, k)$ együtthatótartomány az egész z -síkon egyértékű.

Legyen $z - z_1$ az oly érték, melyre nézve $(z_1 - z_0) < R$ és legyen

$$\bar{y}(z | i, k) = \sum_{v=0}^{\infty} c'_v(i, k) (z - z_1)^v \quad (12)$$

az a sor, mely a $|z - z_0| < R$ körben érvényes (2) alatti sorból a WEIERSTRASS-tól eredő

$$z - z_0 = z - z_1 + z_1 - z_0$$

¹ A megoldási *tartomány* tehát teljesen megfelel a lineáris differenciál-rendszer integrál *matrix*-ának. V. ö. SCHLESINGER, Vorlesungen, pg. 23.

² Egészen hasonló módon bizonyítható, hogy a II. fejezet (24) jelű kifejezése az (A) egyenlet *általános* megoldását adja.

helyettesítés alkalmazásával és $z - z_1$ hatványai szerint való rendezéssel előáll, mely tehát biztosan convergál, ha

$$|z - z_1| < R - |z_0 - z_1|.$$

Ebben a tartományban

$$\bar{y}(z|i, k) = y(z|i, k),$$

úgy, hogy ott az $\bar{y}(z|i, k)$ mindenesetre megoldási tartomány.

Legyen továbbá $\eta(z|i, k)$ ama megoldási tartomány, mely $z = z_1$ -ben eltűnik, akkor ennek sorbantartása $z - z_1$ hatványai szerint ugyanabban a tartományban convergens, úgy hogy ott (11) szerint fönnáll a

$$\bar{y}(z|i, k) = c'_0(i, k) + \int_0^1 c'_0(i, \lambda) \eta(z - \lambda, k) d\lambda$$

alakú vonatkozás. Ebből következik, hogy a $\bar{y}(z|i, k)$ sora ugyanabban a tartományban convergens, a hol $\eta(z|i, k)$, azaz abban a $z - z_1 < R_1$ körben, a melyben $a(z|i, k)$ holomorph; hogy továbbá a (12) sor e körben a 2. számú pontban 1 és 2-vel jelzett tulajdonságokkal bír, és hogy a (B) egyenletnek eleget tesz.

A (2) alatti sorból analytikai folytatással eredő monogen függvény tehát oly függvénytartományt alkot, mely a 3. pont értelmében monogen és a helymutatókra nézve folytonos, mely az $a(z|i, k)$ regularitási tartományban szintén regularis és mely a (B) integrodifferentiálegyenletet kielégíti. Ámde az $a(z|i, k)$ regularitási tartományán belül az (F') tétel értelmében a (2) sorból eredő monogen függvénytartomány FREDHOLM-féle determinansa zérótól különböző és így e függvénytartomány az $a(z|i, k)$ egész holomorphiatartományában a (B) egyenlet egy *megoldási tartományját* adja. Oly z helyen tehát, melyen a megoldás holomorph, de az együtthatótartomány nem az, a megoldás FREDHOLM-féle determinansa szükségkép eltűnik. Az ilyen pontot a (B) egyenlet egy *nem lényegesen singuláris*, vagy *mellékpontjának* nevezzük.

13. A megoldási tartomány és a coefficients-tartomány holomorphia-területei közt való összefüggést legjobban az által vizsgálhatjuk, ha az $a(z|i, k)$ együtthatót egy megoldási függ-

vénymtartomány által igyekszünk kifejezni. E célból emlékeztetnünk kell a FREDHOLM-féle integrálegyenlet elméletében szereplő fogalomra: az *integrálegyenlet megoldó magvának* fogalmára.¹

Legyen a

$$\psi(i) = \varphi(i) + \int_0^1 a(i, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda \quad (\text{I})$$

integrálegyenlet magvának, $a(i, k)$ -nak nullától különböző FREDHOLM-féle determinánsa. Irjuk ez egyenlet megoldását a

$$\varphi(i) = \psi(i) + \int_0^1 a(i, \lambda) \psi(\lambda) d\lambda \quad (\text{II})$$

alakban; akkor $a(i, k)$ az (I) egyenlet megoldó magvaé s éppígy $a(i, k)$ a (II) egyenleté. A (I) és (II) egyenletek viszonya kölcsönös, épp úgy, mint az $a(i, k)$ és $a(i, k)$ magvak viszonya.

A magvak közt levő viszonyt formulában is kifejezhetjük úgy, hogy $\varphi(i)$ -nek a (II) szerinti értékét (I)-be, vagy $\psi(i)$ -nek (I) szerinti értékét (II)-be helyettesítjük; ekkép kapjuk az

$$a(i, k) + a(i, k) + \int_0^1 a(i, \lambda) a(\lambda, k) d\lambda = 0 \quad (\text{III})$$

és

$$a(i, k) + a(i, k) + \int_0^1 a(i, \lambda) a(\lambda, k) d\lambda = 0 \quad (\text{IV})$$

relatiókat.

Az $a(i, k)$ és $a(i, k)$ közötti viszony transcendens analogonja az $(a_{ik} + \delta_{ik})$ és az invers

$$(a_{ik} + \delta_{ik}) = (a_{ik} + \delta_{ik})^{-1}$$

matrixok viszonyának, a mire a következő fejezetben még részletesen visszatérünk. Ez analogia kapcsán az $a(i, k)$ és $a(i, k)$ constanstartományokat egymáshoz inversnek mondjuk. Egy már fentebb (l. 11. pont) használt tétel szerint,² tekintve a (III) vagy (IV) egyenletet, az $a(i, k)$ -hoz és $a(i, k)$ -hoz tartozó FREDHOLM-

¹ Lásd pl. KOWELEWSKI idézett könyvét; 183. §, 474. old.

² KOWALEWSKI, u. o. 467. o.

determinánsok szorzata egyenlő a nulla FREDHOLM-determinánsával, vagyis

$$\text{Det. } a(i, k) \cdot \text{Det } a(i, k) = 1.$$

Az invers tartományt

$$a(i, k) = \frac{Da \left(\begin{smallmatrix} k \\ i \end{smallmatrix} \right)}{Da} \quad (\text{VI})$$

alakban állíthatjuk elő,¹ hol Da az $a(i, k)$ FREDHOLM-determinánsa és $Da \left(\begin{smallmatrix} k \\ i \end{smallmatrix} \right)$ e determinánsnak (i, k) -hoz tartozó *minor*-ját jelenti. Ez előállításból kitűnik, hogy ha $a(i, k)$ a z -nek monogen függvénytartománya, az invers $a(i, k)$ is monogen lesz, és pedig $a(i, k)$ bizonyára holomorph lesz ott, hol $a(i, k)$ az és Da értéke nem nulla.

Legyen most $y(z|i, k)$ a (B) egy megoldási tartománya és $\eta(z|i, k)$ az invers tartomány, úgy hogy tehát a

$$\phi(i) = \varphi(i) + \int_0^1 y(z|i, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda \quad (13)$$

és

$$\varphi(i) = \phi(i) + \int_0^1 \eta(z|i, \lambda) \phi(\lambda) d\lambda \quad (14)$$

egyenletek mindegyike a másiknak feloldása. Ha a (13) egyenletben

$$\varphi(i) = a(z|i, k),$$

akkor a (B) egyenlettel való összevetésből következik, hogy

$$\phi(i) = \frac{dy(z|i, k)}{dz}.$$

Ez esetben tehát a (14) egyenlet így szól:

$$a(z|i, k) = \frac{dy(z|i, k)}{dz} + \int_0^1 \eta(z|i, \lambda) \frac{dy(z|\lambda, k)}{dz} d\lambda \quad (15)$$

és ezzel a coefficientst előállítottuk a megoldó függvénytarto-

¹ U. o. 467, 477. o.

mánynyal. A (15) egyenlet az $n \rightarrow \infty$ -nek megfelelő határártménettel is nyerhető az

$$(a_{\lambda\mu}^{(n)}) = (x_{\lambda\mu}^{(n)})^{-1} \cdot \left(\frac{dx_{\lambda\mu}^{(n)}}{dz} \right)$$

egyenletből, mely az (e') lineáris differenciál-rendszernél a coefficients-matrixot előállítja egy integrálmatrix segítségével.

14. Ha egy $y(z|i, k)$ megoldási tartományról egy másikra térünk át, a (15) egyenlet bal oldala nem változik. Az átmenet, mint fönt kimutattuk, a (10) jelű

$$c(i, k) + y(z|i, k) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(z|\lambda, k) d\lambda$$

mívelet által történik; ezért a (15) jobboldalán álló kifejezés tehát a (10) jelű operatio egy invariánsát adja. Mielőtt a (10) jelű mívelet formális tulajdonságainak tárgyalására térnénk, theoriánkban való analytikus jelentését akarjuk kiemelni.

Legyen $z=p$ oly hely, melynek környezetében $a(z|i, k)$ bár egyértékű, de nem holomorph; lehet például $z=p$ az $a(z|i, k)$ függvénytartománynak pólusa; ennek környezetében $a(z|i, k)$ így írható:

$$a(z|i, k) = \frac{A_g(i, k)}{(z-p)^g} + \frac{A_{g-1}(i, k)}{(z-p)^{g-1}} + \dots + \frac{A_1(i, k)}{z-p} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(i, k) (z-p)^{\nu}, \quad (16)$$

hol az $A_{\nu}(i, k)$ és $a_{\nu}(i, k)$ constans-tartományok.

Képzeljük az $a(z|i, k)$ egy $z=z_0$ regularitási helyére nézve a megoldási $y(z|i, k)$ tartományt definiálnak; $y(z|i, k)$ a $z=z_0$ helyen egy $c_0(i, k)$ kezdőtartományra redukálódik; kövessük $y(z|i, k)$ analytikai folytatását valamely oly zárt út mentén, mely a $z=p$ pontot megkerüli.

Akkor az $y(z|i, k)$ tartomány egy más, de z_0 bizonyos környezetében ugyancsak holomorph $\bar{y}(z|i, k)$ tartományba ment át és így

$$\bar{y}(z|i, k) = c(i, k) + y(z|i, k) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(z|\lambda, k) d\lambda, \quad (17)$$

hol $c(i, k)$ egy bizonyos constans-tartományt jelent. Az $\bar{y}(z|i, k)$ kezdőtartománya a $z = z_0$ pontban

$$\bar{c}_0(i, k) = c(i, k) + c_0(i, k) + \int_0^1 c(i, \lambda) c_0(\lambda, k) d\lambda; \quad (18)$$

és mivel a 12. pont fejtegetései szerint $\bar{y}(z|i, k)$ újra *megoldási tartomány*, a $\bar{c}_0(i, k)$ FREDHOLM-determinánsa nem lehet zéró. Ámde egy többször alkalmazott tétel szerint

$$\text{Det. } \bar{c}_0(i, k) = \text{Det. } c(i, k) \cdot \text{Det. } c_0(i, k)$$

és így a (17) jelű operációban fellépő constans-tartománynak, $c(i, k)$ -nak FREDHOLM-determinánsa nem zéró. Ugyanezek a megfontolások érvényesek minden analitikai folytatásra, ha csak annak mentén $a(z|i, k)$ eredeti értékéhez tér vissza; ha például $a(z|i, k)$ általán egyértékű — mint föltételeztük —, az okoskodás érvényes *minden* zárt útra nézve. Vegyük a z_0 -on áthaladó összes zárt utakat, melyek az $a(z|i, k)$ holomorphia-területen belül folytonos deformációval egymásba át nem vihetők; ezek összessége megszámlálható halmazt alkot. Ennek megfelel a $c(i, k)$ kezdő tartományok egy megszámlálható halmaza, melyek (17)-be helyettesítve adják azt a megoldási tartományt, melybe az eredeti $y(z|i, k)$ a megfelelő zárt úton való analitikai folytatásánál átmegy. A (17) jelű operációk összessége ilyképen megszámlálható *csoportot* alkot, ugyanis a megoldási tartománynak: $y(z|i, k)$ -nak monodromia-csoportját.

Ilyképen szükségessé válik a (17) operációkra nézve a *compositió*nak, *inverzió*nak stb. fogalmait megállapítani. Ez lesz tárgya a következő fejezetnek.

KISÉRLET A FUNCTIONÁLSZÁMÍTÁS RENDSZERES MEGALAPOZÁSÁRA.

DIENES PÁL-tól.

Első rész : Functionál előállítás integrállal.

I. FEJEZET.

Az idevágó vizsgálatok összefoglalása.

1. *A functionál fogalma.* Alig pár évtizede, hogy az elméleti physika szükségletei megadták az első lökést a számhoz számot rendelő függvényfogalom túlhaladására. A physika tényei ugyanis csak némi erőszak árán írhatók le egyes számértékek egymáshoz rendelésével, jobb elméleti műszer volna kifejezésükre az oly összerendelés, melyben valamely egy vagy több változós függvény összes értékei határoznának meg egyetlen számot. Például hővezető test egyik belső pontjában a hőmérséklet függ a testet határoló felület valamennyi pontjának a hőmérsékletétől és hőegyensúly esetén ez utóbbi adatok által — a hővezetés törvényein keresztül — meg is van egyértelműleg határozva. A tömegvonzás, vagy mágnes-elektromos állapotban lévő testek egymásra-hatása is összegeződés: a resultans mindig tömegeloszlásnak, azaz többváltozós függvény összes értékeinek függvénye. Az eredmény — egyetlen szám vagy vector — csak akkor van meghatározva, ha megadjuk egy függvény összes értékeit bizonyos tartományban. Matematikai mesterkedésekkel ¹ sikerült ugyan eddig majd mindig kifejezni a problémát közön-

¹ Például elektromos áram physikailag abszurd szétbontásával elemi áramokra.

séges, mondjuk pontfüggvények segítségével, közönséges vagy partiális differenciálegyenletek integrálásába szorítva be a számköznyi értéktől való függést, de éppen az kezd most kiderülni, hogy egyszerűbb és teljesebb eredményt érünk el sokszor, ha nem élünk ezzel a visszavezetéssel. Példa rá a DIRICHLET-probléma és az integrálegyenletek.¹ Nem tévesztendő össze ez az újabb meghatározásmód a közönséges értelemben vett függvényfüggvényével, $f[\varphi(x)]$ kifejezéssel, hol a $\varphi(x)$ ismerete egyetlen pontban elegendő az összetett kifejezés értékének meghatározására ugyanabban a pontban.

Az imént vázolt összefüggés legegyszerűbb példája

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrál. Itt hiába ismerem $f(x)$ értékét valamelyik pontban a és b között, abból semmit sem tudok következtetni az integrál értékére. Nélkülözhetetlen szükségünk van e végből az $f(x)$ függvény menetének ismeretére az egész (a, b) számközben. Ugyanigy

$$\int_a^x f(x) dx = F(x)$$

kifejezésnél, pedig ez függvényhez rendel függvényt, ugyanis $f(x)$ -hez $F(x)$ -et s így eléggé hasonlítani látszik $f[\varphi(x)]$ kifejezéshez, hol szintén függvény van rendelve függvényhez.

Functionálnak (fonctionnelle) *nevezünk minden meghatározásmódot, hol a meghatározandó matematikai kifejezés minden egyes számértékét egy vagy több függvény egész számhalmazban felvett összes értékei határozzák meg.* A meghatározandó matematikai kifejezés lehet egyetlen szám, mint például a határozott integrál vagy függvény mint a határozatlan integrál. Látni fogjuk, hogy nem esik az általánosság rovására, ha csupán az első esetre szoritkozunk. Egyelőre tehát csak oly functio-

¹ VOLTERRA: Leçons sur les fonctions de lignes 1913, Paris (Borel-Collectio) és VOLTERRA: Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrro-différentielles. Paris, 1913, (Borel-Collectio) kérdésünket főleg a fizikai alkalmazás szempontjából tárgyalja.

nálokat veszünk vizsgálat alá, mik számot rendelnek számhalmaznyi függvényértékhez, jelben:

$$U\left(f(x)\right)_{a}^b \text{ vagy röviden } U(f),$$

ha félreértéstől nem kell tartanunk.

Sőt az így körülhatárolt functionálosztályt is megszorítjuk azzal a kikötéssel, hogy egyelőre¹ csak folytonos functionált veszünk szemügyre. *Folytonos*-nak mondjuk $U(f)$ functionált, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f_n) = U(f)$$

mihelyt $f_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen tart $f(x)$ felé.

2. *Jelen közlemény célja.* A matematikai fogalomalkotás érdekes esetével állunk itt szemben. Logikailag pontosan körülhatároltuk a szükségesnek mutakozó fogalmat — a folytonos functionálét — mint például annak idején a complex változós függvények közül az analitikai függvényét. Ez a körülhatárolás azonban, bármilyen pontos legyen is, nem adja a matematikus kezébe a fogalmat; szét kell ezt még bontanunk egyszerű fogalmakra, ez utóbbiakat úgy választva, hogy vizsgálandó fogalmunk természetes analogiái ismerős matematikai fogalmakkal minél inkább napfényre jussanak; csak ezáltal tehetjük részletes matematikai vizsgálódás tárgyává, mint a hogy az analitikai függvények tanulmányozásának kulcsa is ily szerkezeti analogiákon alapuló fogalmi elemzés, a complex számok bevezetése s az ezeket a függvényeket jellemző integrálos vagy TAYLOR-soros kifejezés megállapítása volt.

A functionálra legelsősorban felteendő tehát az a kérdés, hogy a függvény összes értékeihez egyellen számot rendelő művelet milyen matematikailag meghatározott műveletek összessége. E szerkezeti probléma megoldásával válik a functionál fogalma a matematikai tudományok szerves részévé, ez által kerül kezeink közzé, lehet szigorú és kimerítő tanulmányozás tárgya. Ezt a problémát hívjuk a functionálok előállítás- (repre-

¹ Az utolsó pontig.

sentatio) problémájának. S a functionál-elméletben megindult vizsgálódásoknak csakugyan éppen ez az egyik fő-témája (a másik a functionálok egymásból való leszármaztatása, deriválása, mely a differentialegyenleteknek megfelelő functionális deriváltú egyenletekhez vezet).

Nemcsak a kérdés megkönnyítése, de elméleti okok is arra készítették a vizsgálódókat, hogy a folytonos functionálok egyetemében osztályokat különítsenek el, még pedig lehetőleg fokozódó összetettség szerint. A legelső osztályt a *lineáris functionálok* alkotják, mik folytonosságuk mellett még *additívek* is, azaz minden $f_1(x)$ és $f_2(x)$ függvényre

$$U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2)$$

egyenlőségnek tesznek eleget s így folytonosságuk miatt általánosabban bárminő valós szám is c_1 és c_2

$$U(c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)) = c_1 U(f_1(x)) + c_2 U(f_2(x))$$

egyenletnek.

Magasabb osztályokat alkotnak a majd később sorra kerülő *functionálpolinomok* és *holomorph functionálok*. Kiderül azonban a következőkből, hogy bár egyrészt a leglényegesebb nehézségek már a lineáris functionálok tárgyalásánál is fellépnek s így az osztályozás a kérdés megkönnyítésében nem döntő befolyású, másrészt, hogy elméleti szempontból a felosztás különböző fokú functionál-polynomokra és egyéb folytonos functionálokra mégis kikerülhetetlen.

Az eddig minden erre vonatkozó eredményben előforduló megszorítást azonban a független függvény-változó tartományát illetőleg, mely szerint a functionálnak csak a folytonos függvényekhez rendelt számértékeit vették szemügyre, nem a dolog természete, hanem egyedül a felelet megkönnyítése kívánta; oly műveletekkel foglalkoztak tehát, melyek folytonos függvények összes értékeihez rendelnek egyetlen számot. Hogy ez a megszorítás mennyire nem felel meg a functionál természetének, az már a legegyszerűbb példából, a határozott integrál esetéből világos, mely szakadásos függvényekhez is rendel számot, sőt ha LEBESGUE-integrálra gondolunk, nincs is semmi

szerkezeti különbség a folytonos és nem-folytonos függvények integráljai között s eddig matematikailag nem is sikerült olyan szakadós függvényt megadni, a melyhez ez a művelet ne rendelne számot. Nem is lenne könnyű feladat olyan műveletet kijelölni, mely kizárólag a folytonos függvények összes értékeihez rendelne számot. Ezenfölül nem egy példa az eddigi vizsgálatokból világosan mutatja azt, hogy a bizonyítások lényegesen egyszerűsödnek, áttekinthetőbbek lesznek, mihelyt szakadós függvényekhez rendelt értékeket is veszünk figyelembe. Hasonlattal élve, a functionál-elméletben ma még olyan a helyzet, mintha a legközönségesebb függvényeknek, például a polynomoknak is csak racionális x helyen felvett értékeit vizsgálnók s az irracionális x -ekhez rendeltéket mellőznök.

Jelen közlemény célja az integrálfogalom olyan általánosítása, mely lehetővé teszi a folytonos functionálok előállítását a függvény-változó minden értékére, tekintet nélkül tehát a független változóképz szereplő $f(x)$ függvény minőségére. Az első fejezetben a szükséges fogalmak bevezetésével kapcsolatban összefoglaljuk és bizonyos pontokban kiegészítjük az eddig elért idevágó eredményeket, a második fejezet tárgya az új integrálfogalom felépítése, a harmadikban pedig megadjuk a felvetett problémának, a folytonos functionál teljes előállításának egész általános megoldását és e megoldás néhány önként adódó alkalmazását.

3. *Lineáris functionál előállítása.* Erre vonatkozólag HADAMARD ¹ a következő tételt bizonyította be. Adva lévén $U(f)$ functionál, meghatározható olyan folytonos $\Psi(x, \mu)$ függvény, hogy minden folytonos $f(x)$ függvényre nézve

$$U(f) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_a^b \Psi(x, \mu) f(x) dx.$$

Azaz minden lineáris functionál előállítható mint integrálsorozat határértéke.

¹ HADAMARD: Sur les opérations fonctionnelles. C. R. 1903. t. 136, p. 351. és HADAMARD: Leçons sur le calcul des variations. 1910. Paris t. 1, 280—312.

Bizonyítás. Az integrált summa-limesnek gondolva s tekintetbe véve, hogy $U(f)$ folytonos és additív, rögtön láthatjuk, hogy ha

$$z(x) = \int_{\beta}^{\gamma} f(x, a) da,$$

akkor

$$U(z(x)) = \int_{\beta}^{\gamma} U(f(x, a)) da.$$

Legyen másrészt $F(x)$ a valós tengely minden pontján pozitív, szabályos, korlátolt és legyen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 1; \text{ például } F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Képezzük

$$v(x, \mu) = \int_a^b f(u) \mu F[\mu(u-x)] du$$

függvényt. Bebizonyítjuk, hogy

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} v(x, \mu) = f(x).$$

Osszuk az integrált három részre,

$$\int_a^b = \int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b;$$

A $\mu(u-x) = t$, $\mu du = dt$ átalakítást végezve, az elsőnél

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f\left(x + \frac{t}{\mu}\right) F(t) dt = f(x + \theta\varepsilon) \int_{-\varepsilon\mu}^{+\varepsilon\mu} F(t) dt. \quad |\theta| < 1$$

Nulla felé tartó ε -ok adva lévén, μ -t úgy választjuk, hogy $\varepsilon\mu$ végtelen felé tartson, például $\mu = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Így ez a rész $-\varepsilon$ -nal 0 felé menve $f(x)$ felé tart, még pedig egyenletesen, mert a szorzó integrál független x -től s a folytonosság, ha teljes, mindig egyenletes.

A másik két rész 0 felé tart, például

$$\left| \int_{x+\varepsilon}^b \mu f(u) F[\mu(\mu-x)] du \right| < \int_{\varepsilon\mu}^{\infty} \left| f\left(x + \frac{t}{\mu}\right) \right| F(t) dt < \max. |f(x)| \cdot \int_{\varepsilon\mu}^{\infty} F(t) dt;$$

és $\int_{\varepsilon\mu}^{\infty} F(t) dt$ 0 felé tart, mert $\int_0^{\infty} F(t) dt$ létezik.

Hozzuk be végül

$$\Psi(a, \mu) = U(\mu F[\mu(a-x)]) = \mu U(F[\mu(a-x)])$$

menyiséget, mely csak az adott $U(f)$ functionáltól függ és nem az $f(x)$ -től, melyre alkalmazzuk. Fix μ -re Ψ folytonos függvénye a -nak, mert U folytonos functionál s így az első megjegyzés szerint

$$\int_a^b U(f(a) \mu F[\mu(a-x)]) da = U(v(x, \mu)),$$

azaz U folytonossága következtében

$$U(f(x)) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_a^b f(a) \Psi(a, \mu) da,$$

a mit bizonyítanunk kellett.

4. *Folytonos functionál előállítás.* Nem lineáris, de folytonos functionálok esetére FRÉCHET általánosította az előbbi tételt.¹ *Folytonos functionál folytonos függvényekre felvett értékkészlete előállítható mint integrálösszegek határértéke.*

Legyenek ugyanis

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

a folytonos $f(x)$ függvény FOURIER-számai.² Minden ezekből alkotott $P(a_0, a_1, \dots, a_n)$ polynom az $f(x)$ függvénynek már oly

¹ FRÉCHET: Sur les fonctionnelles continues. Annales de l'École Normale 1910. t. 28 p. 192—216.

² Tiszta cosinus-os sorra alakítva.

functionálja, mely integrálösszegek határáként fejezhető ki. Ha ugyanis $P(a_0, a_1, \dots, a_n)$ p -ed rendű homogén polynom

$$P(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum A a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = p)$$

akkor

$$P(a_0, a_1, \dots, a_n) = \\ = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi K(x_1, x_2, \dots, x_p) f(x_1) f(x_2) \dots f(x_p) dx_1 dx_2 \dots dx_p,$$

a hol

$$K(x_1, x_2, \dots, x_p) = \\ \sum A \left(\frac{2}{\pi}\right)^p \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha_0} \cos x_{\alpha_0+1} \cos x_{\alpha_0+2} \dots \cos x_{\alpha_0+\alpha_1} \cos 2x_{\alpha_0+\alpha_1+1} \dots \cos nx_p.$$

A kérdést megoldjuk tehát, ha $U(f)$ functionált előállítjuk mint $P_i(a_0, a_1, \dots, a_n)$ functionálok határértékét. A FOURIER-sorok elméletéből azonban tudjuk, hogy minden folytonos $f(x)$ függvényt egyenletesen megközelít a

$$\sigma_n(x) = \frac{(n+1) \frac{a_0}{2} + na_1 \cos x + (n-1)a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx}{n+1}$$

sorozat.¹ Az $U(f)$ folytonossága miatt $U(\sigma_n(x))$ az a_0, a_1, \dots, a_n számok közönséges és pedig folytonos függvénye, a WEIERSTRASS-tétel szerint tehát van olyan $P_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ polynomsorozat, hogy

$$|U(\sigma_n(x, a_0, a_1, \dots, a_n)) - P_n(a_0, a_1, \dots, a_n)| < \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

de másrészt

$$|U(\sigma_n(x, a_0, a_1, \dots, a_n)) - U(f(x))| \dots \varepsilon'_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon'_n = 0$$

s így tényleg

$$U(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

¹ FEJÉR: Über die Fourierschen Reihen. Mathematische Annalen 1904. 58. köt. 51. old. és Mathematikai és Fizikai Lapok, XI. k. 49—68. és 97—123., 1902.

Részletesen kiírva tehát

$$\begin{aligned}
 U(f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} & \left[K_n^{(0)} + \int_0^\pi K_n^{(1)}(x_1) f(x_1) dx_1 + \right. \\
 & + \int_0^\pi \int_0^\pi K_n^{(2)}(x_1, x_2) f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2 + \dots + \\
 & \left. + \int_0^\pi \dots \int_0^\pi K_n^{(r_n)}(x_1, x_2, \dots, x_{r_n}) f(x_1) \dots f(x_{r_n}) dx_1, \dots, dx_{r_n} \right].
 \end{aligned}$$

5. *Lineáris functionál előállítása STIELTJES-integrállal.*
 A HADAMARD-FRÉCHET-féle előállítás még annyiban szorulhat kiegészítésre, hogy az előállító formula — integrál-limes — nem kizárólag az előállítandó functionálok formája: minden hasonló szerkezetű integrál-limes nem szükségképen folytonos functionál. S ez nem csekély fontosságú dolog, mert ha oly műveletsorozatot tudunk kijelölni, mely szükségképen az előállítandó osztályba tartozó functionál és másrészt ennek az osztálynak minden tagja kifejezhető a kijelölt műveletsorozattal, akkor ennek a műveletsorozatnak minden tulajdonsága egyszerűsind a vizsgált osztályba tartozó functionál tulajdonsága is és így az utóbbiak tanulmányozása szigorúan körülhatárolt matematikai feladattá lett.

Lineáris functionálokra RIESZ FRIGYES oldotta meg az előállítás eme teljesebb feladatát, még pedig a STIELTJES nevét viselő integrál segítségével.¹ Ez utóbbi alatt a következőt értjük. Legyen adva a folytonos $f(x)$ és a korlátolt változású $\alpha(x)$ és képezzük az (a, b) számköz egyik $[x_1 = a, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1} = b]$ felosztására

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)]$$

összeget, hol ξ_i az i -edik köz egyik pontja. Könnyű belátni, hogy a beosztásokat sűrítve, az s_n véges határérték felé tart s hogy ez független attól, hogy milyen beosztásokkal mentünk a

¹ FR. RIESZ: Sur les fonctionnelles linéaires. C. R. 1909. t. 149, p. 974.

határra, csak a legnagyobb köz limese is 0 legyen. Az így nyert limes az $f(x)$ STIELTJES-integrálja $\alpha(x)$ szerint véve:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Ha $\alpha(x) = x$, visszaesünk a közönséges integrálra.

RIESZ tétele szerint minden $U(f)$ lineáris functionálhoz tartozik olyan korlátolt változású $\alpha(x)$, hogy bármilyen folytonos $f(x)$ -re

$$U(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Érdekessége még ennek az előállításnak, hogy csak egy határmenetet involvál, míg az előbbiek kettőt.

A tétel bizonyítása, épen szabatosága folytán, kissé szövevényesebb, mint az előbbi két tételé s így csak utalunk a leg-egyszerűbbre.¹ Általánosítása akármilyen folytonos functionálra nem oly érdekes, mint az ezeknél kevésbé általános, de a lineáris functionálok osztályát mégis messze túlhaladó functionálpoly-
nomokra, melyeknek nagy szerep jut a következőkben s így legfontosabb tulajdonságait már most előadjuk.

6. *Functionálpolyinom.* Tudjuk, hogy valamennyi folytonos (sőt LEBESGUE szerint mérhető) függvény közül csakis a lineáris függvények azok, a melyek egész számköz bármely két x_1, x_2 pontjára eleget tesznek a

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

függvényegyenletnek. Ugyanígy² valamennyi folytonos (sőt mérhető) függvény közül egyedül az n -ed fokú polynomok azok, a melyek egész számköz bármely $n+1$ ($x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$) pontjára nézve eleget tesznek

¹ FR. RIESZ: Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires. Annales de l'École Normale 1914, p. 1.

² FRÉCHET: Une définition fonctionnelle des polynomes. Nouvelles Annales des Mathématiques, IV. série, T. IX., p. 145—162, 1909.

$$\begin{aligned}
 f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}) - \sum_n f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}) + \\
 + \sum_{n-1} f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_{n-1}}) - \dots + \\
 + (-1)^n \sum_1 f(x_i) + (-1)^{n+1} f(0) = 0
 \end{aligned} \quad (A)$$

függvényegyenletnek, hol \sum_k azt jelenti, hogy venni kell az x_1, x_2, \dots, x_{n+1} számok összes k osztályú combinatióit s az így nyert tagok összegezendők.

Több-változós függvények esetében a fenti formula imígy módosul. A p változótól függő folytonos függvények közül egyedül az összes változóiban együttesen n -ed fokú polynomok azok, a melyek azonosan, azaz bármilyen

$x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(n+1)}; x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(n+1)}; \dots; x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, \dots, x_p^{(n+1)}$ értékesoportnál, eleget tesznek az

$$\begin{aligned}
 f(x_1^{(1)} + \dots + x_1^{(n+1)}, x_2^{(1)} + \dots + x_2^{(n+1)}, \dots, x_p^{(1)} + \dots + x_p^{(n+1)}) - \\
 - \sum_n f(x_1^{(i_1)} + \dots + x_1^{(i_n)}, x_2^{(i_1)} + \dots + x_2^{(i_n)}, \dots, x_p^{(i_1)} + \dots + x_p^{(i_n)}) + \\
 + \sum_{n-1} f(x_1^{(i_1)} + \dots + x_1^{(i_{n-1})}, \dots, x_p^{(i_1)} + \dots + x_p^{(i_{n-1})}) - \dots + \\
 + (-1)^n \sum_1 f(x_1^{(i_1)}, \dots, x_p^{(i_1)}) + (-1)^{n+1} f(0, \dots, 0) = 0.
 \end{aligned} \quad (A_1)$$

egyenletnek.

A polynomnak e függvényegyenlettel adott definitióját lehet legegyszerűbben áttenni a functionálokra: ¹ n -ed fokú functionál-polynomnak hívunk minden folytonos functionált, mely eleget tesz

$$\begin{aligned}
 U(f_1 + f_2 + \dots + f_{n+1}) - \sum_n U(f_{i_1} + f_{i_2} + \dots + f_{i_n}) + \\
 + \sum_{n-1} U(f_{i_1} + f_{i_2} + \dots + f_{i_{n-1}}) + \dots + (-1)^n \sum_1 U(f_{i_1}) + \\
 + (-1)^{n+1} U(0) = 0
 \end{aligned} \quad (B)$$

azonosságnak, hol $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n+1}(x)$ az (a, b) számközben vagy valamely fixált E halmazon értelmezett egyértelmű és korlátolt, de különben tetszésszerű függvények.

¹ FRÉCHET «Sur les fonctionnelles continues» című idézett értekezésében.

Homogén az n -ed fokú $U(f)$, ha minden c és $f(x)$ -re nézve $U(cf(x)) = c^n U(f(x))$.

Minden homogén functionálpolinom korlátolt oly értelemben, hogy

$$|U(f)| \leq A |f|^n, \quad (1)$$

hol $|a|$ az $|a|$ értékészlet felsőkorlátja, bármely matematikai kifejezés is legyen az a .

Nézzük előbb ama függvények osztályát, melyek eleget tesznek

$$|f(x)| \leq 1$$

egyenletnek s tegyük fel, hogy állításunkkal ellentézőleg lennének oly $f_i(x)$ függvények, hogy

$$|U(f_i)| > A_i, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \infty. \quad (2)$$

Vegyük most szemügyre

$$\left| U\left(\frac{f_i(x)}{A_i^{\frac{1}{2^n}}}\right) \right| = \frac{1}{A_i^{\frac{1}{2^n}}} |U(f_i)| > A_i^{\frac{1}{2^n}} \quad (2')$$

értéksorozatot. Ennek limese (2) szerint $i = \infty$ -nél végtelen. Másrészt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f_i(x)}{A_i^{\frac{1}{2^n}}} = 0,$$

mert

$$|f(x)| < 1,$$

és

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_i^{\frac{1}{2^n}} = \infty,$$

s így $U(f)$ folytonossága miatt és mert homogén volta folytán $U(0) = 0$, kell, hogy

$$\lim_{i \rightarrow \infty} U\left(\frac{f_i(x)}{A_i^{\frac{1}{2^n}}}\right) = 0$$

legyen, a mi ellentmond (2')-nek. Van tehát olyan A , hogy

$$|U(f)| < A,$$

mihelyt

$$|f(x)| \leq 1.$$

Nézzük most $U(f)$ értékeit arra a függvényosztályra nézve, melynek értékei $-M$ és $+M$ közt vannak.

$$U(f) = M^n U\left(\frac{f}{M}\right);$$

s így

$$|U(f)| \leq M^n A,$$

a mit éppen bizonyítani akartunk.

7. *Functionálpolinom szétbontása homogén polynomok összegére.* A bizonyításokban nagy szerepet játszik a functionálpolinomok következő tulajdonsága. Legyenek adva tetszőszerinti korlátolt $f_1(x), \dots, f_p(x)$ függvények és c_1, \dots, c_p állandók. Ha $U(f)$ n -ed fokú functionál, akkor

$$U(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_p f_p)$$

kifejezés, mint a c_1, c_2, \dots, c_p számok függvénye, ezeknek legfeljebb n -ed fokú polinomja: $v(c_1, c_2, \dots, c_p)$. Bizonyítás: $U(f)$ folytonossága miatt $v(c_1, \dots, c_p)$ okvetlen folytonos függvénye c_1, c_2, \dots, c_p változóknak. Másrészt $U(f)$ n -ed fokú lévén, (B) ki van elégítve minden korlátolt f_1, f_2, \dots, f_p függvénycsoportra nézve s így

$$\varphi_i(x) = c_1^{(i)} f_1(x) + \dots + c_p^{(i)} f_p(x), \quad (i=1, 2, \dots, n+1)$$

függvénycsoportra nézve is. Ezekre felírva (B) azonosságot, tekintettel arra, hogy

$$\begin{aligned} & U(\varphi_{i_1} + \varphi_{i_2} + \dots + \varphi_{i_k}) = \\ &= U((c_1^{(i_1)} + \dots + c_1^{(i_k)}) f_1 + \dots + (c_p^{(i_1)} + \dots + c_p^{(i_k)}) f_p) = \\ &= v(c_1^{(i_1)} + \dots + c_1^{(i_k)}, \dots, c_p^{(i_1)} + \dots + c_p^{(i_k)}), \end{aligned}$$

kapjuk hogy

$$\begin{aligned} & v(c_1^{(1)} + \dots + c_1^{(n+1)}, \dots, c_p^{(1)} + \dots + c_p^{(n+1)}) - \\ & - \sum_n v(c_1^{(i_1)} + \dots + c_1^{(i_n)}, \dots, c_p^{(i_1)} + \dots + c_p^{(i_n)}) + \dots + \\ & + (-1)^n \sum_1 v(c_1^{(i_1)}, \dots, c_p^{(i_1)}) + (-1)^{n+1} v(0, \dots, 0) = 0; \end{aligned}$$

s ez az (A_1) egyik esete s így $v(c_1, \dots, c_p)$ valóban n -d fokú polinom.

Alapvető tulajdonsága a functionálpolinomoknak, hogy a közönséges polynom mintájára növe fokszámú homogen részek összege gyanánt írható.

Bizonyítás. Legyen $U(f)$ p -ed fokú. A fentiek szerint $U(cf)$ p -ed fokú polynom c -ben:

$$U(cf) = u_0 + u_1 c + \dots + u_p c^p.$$

Az u_k számok természetesen $f(x)$ functionáljai; bebizonyítjuk, hogy u_k éppen k -ad fokú és homogén. Oldjuk meg e végből

$$U(if) = u_0 + u_1 i + \dots + u_p i^p, \quad (i=1, 2, \dots, p+1)$$

egyenleteket az u_k számokra nézve:

$$u_k = A_1^{(k)} U(f) + A_2^{(k)} U(2f) + \dots + A_{p+1}^{(k)} U((p+1)f), \quad (4)$$

hol az A számok U és f -től függetlenek, mivel

$$A_1^{(k)} + 2^i A_2^{(k)} + \dots + (p+1)^i A_{p+1}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq i \\ 1, & \text{ha } k = i \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásai.

Látható azonban (4) alakból, hogy u_k folytonos és legfeljebb p -ed fokú functionálpolinom $f(x)$ -ben; mint ilyet jelöljük $H_k(f)$ jellel. Irjuk fel még, hogy állandó γ -ra nézve

$$U((c\gamma)f(x)) = U(\gamma[cf(x)]),$$

azaz hogy

$$H_0 + c\gamma H_1(f) + \dots + c^p \gamma^p H_p(f) = H_0 + \gamma H_1(cf) + \dots + \gamma^p H_p(cf).$$

De ez bármilyen γ -ra nézve csak úgy állhat fenn, ha

$$H_k(cf) = c^k H_k(f).$$

Bebizonyítandó még, hogy $H_k(f)$, melyről már kiderült, hogy homogén és hogy fokszáma nem nagyobb, mint p , éppen k -ad fokú functionálpolinom. Itt azonban el kell tértünk FRÉCHET bizonyításától, mert a tételt a továbbiak érdekében nemcsak folytonos, hanem tetszésszerű függvény-változóra nézve is meg kell állapítanunk. Állítsuk elő e végből $f(x)$ -et mint véges számú különböző értékből összetett függvények határfüggvényét. Legyen

$$\phi_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{az } e \text{ halmaz pontjaiban,} \\ 0 & \text{egyebütt;} \end{cases}$$

s legyen

$$\dots l_{-n}, \dots, l_{-1}, l_0, l_{+1}, \dots, l_{+n}, \dots, [\lim_{n=\infty} |l_{\pm n}| = \infty] \quad (0)$$

a valós számok oly sora, melynél

$$|l_{i+1} - l_i| < \delta,$$

hol δ előre megadott tetszésszerűen kis pozitív szám s legyen végül e_i ama pontok halmaza, melyre nézve

$$l_i \leq f(x) < l_{i+1}.$$

Ekkor

$$f_n = \sum_{i=1}^n l_i \phi_{e_i}(x)$$

olyan függvény, hogy minden vizsgált x értéknél $|f - f_n| < \delta$. Vegyünk most a valós számoknak sűrűbb O_2 beosztását, úgy hogy $|l_{i+1} - l_i| < \delta_2$. Ekkor $|f - f_{n_2}| < \delta_2$. És így tovább:

$$\lim_{r=\infty} f_{n_r}(x) = f(x).$$

Nézzük a valós számoknak O ($l_{-n}, \dots, l_{-1}, l_0, l_1, \dots, l_{+n}$) s az (a, b) számköz o (e_{-n}, \dots, e_n) beosztását. Az e_i halmazokat fixálva, $H_k(f_n)$ közönséges értelemben vett $2n$ változós, még pedig folytonos, a változók korlátolt értékeire korlátolt függvény, mely ezenkívül eleget tesz $f(cl_{-n}, \dots, cl_{+n}) = c^k f(l_{-n}, \dots, l_{+n})$ feltételnek s így k -ad fokú polinomja l_{-n}, \dots, l_{+n} változóknak. Azonban $H_k(f_n)$ esetére írva fel (B) azonosságot (n helyébe k -t téve), éppen (A_1) azonosságot kapjuk s így $H_k(f_n)$ eleget tesz (B) feltételnek. Áttérve most már $f_{n_1}, \dots, f_{n_r}, \dots$ függvényekre, ugyanez okoskodás szerint $H_k(f_{n_r})$ eleget tesz B azonosságnak s így, folytonos lévén, kell, hogy ez a határon is megtörténjék. Ez utóbbit formálisan úgy igazolhatjuk, hogy az azonosságban véges K számú tag lévén, r -rel oly messze mehetünk, hogy azon túl

$$|B(f) - B(f_{n_r})| < \delta,$$

hol egy pillanatra a (B) azonosság baloldalát $B(f)$ -fel jelöltük, azaz

$$|B(f)| < \delta,$$

s δ tetszőszerinti kicsiny, tehát pontosan $B(f) = 0$. $H_k(f)$ tehát valóban k -ad fokú és pedig homogén functionál.¹

Végül (3) egyenlet $c = 1$ esetre felírva adja

$$U(f) = H_0 + H_1(f) + \dots + H_p(f);$$

s ez a kívánt eredmény.²

II. FEJEZET.

Az integrálfogalom általánosítása.

8. *Lineáris halmazfüggvény.* Az integrálfogalom szükséges általánosítását a halmazfüggvény fogalmának bevezetésével eszközöljük. Halmazfüggvénynek hívunk minden összerendelést halmaz vagy halmazok és valós szám között, melynél fogva tehát az egyszersmindenkorra megadott E halmazból vett minden halmazhoz (vagy E_1, E_2, \dots megadott halmazokból vett minden halmazegyetteshez) tartozik egyetlen véges pozitív vagy negatív szám. Jelben például $\alpha(c), \alpha(c, \varepsilon), \dots$, hol c és ε a meghatározás alapjául szolgáló E halmaz, illetve E, η halmazok akár melyik pontthalmaza, illetőleg pontthalmazpárja. E, η etc. pedig az egész valós tengely, vagy annak egyik halmaza, például számköze.

Additív a halmazfüggvény, ha E -ből vett bármelyik közös pont nélküli e_1 és e_2 halmazra³

$$\alpha(e_1 + e_2) = \alpha(e_1) + \alpha(e_2).$$

Ebből tüstént következik véges számú közös pont nélküli halmazra:

¹ A használt módszer, mely szakadásos függvények bevezetésével könnyít feladatán, mélyen jellemzi a folytonos functionálokat, mert ez által válik érezhetővé az átmenet véges számú változóból continuum-jellegű változóba. Meglepő használhatósága és egyszerűsége folytán gyakorta fog szerepelni megfontolásainkban.

² Folytonos függvényváltozó esetére l. FRÉCHET «Sur les fonctionnelles continues» cz. idézett értekezését.

³ $e_1 + e_2$ halmaz az e_1 és e_2 halmazok együttese. A $+$ jelt csak közös pont nélküli halmazok egyesítésére fogjuk használni.

$$a(e_1 + e_2 + \dots + e_n) = a(e_1) + a(e_2) + \dots + a(e_n).$$

Lineáris (első fokú) a halmazfüggvény, ha additív és korlátolt

$$|a(e)| < A.$$

minden E -ből vett e halmazra. Triviális példa: legyen $a(e) = 1$, ha c pont benne van e -ben; $a(e) = 0$, ha c pont nincs benne e -ben. Ilyen halmazfüggvény lenne továbbá a LEBESGUE által szabatosan megfogalmazott mértékproblémát megoldó $m(e)$.

Adott e halmazt osszunk fel e_1, e_2, \dots, e_n közös pont nélküli halmazokra úgy, hogy e minden pontja benne legyen valamelyik e_i halmazban s csak egyikben; és képezzük $\sum_{i=1}^n |a(e_i)|$ «variáció»-t. A pozitív $a(e_i)$ -ket külön összeadva, az additivitás folytán valami $a(e')$ értékhez jutunk, a negatívakat összeadva $a(e'')$ értékhez s így

$$\sum_{i=1}^n |a(e_i)| < 2A$$

függetlenül a beosztásoktól, sőt az e halmaztól is. Legyen $A(e)$ az e valamennyi felosztásából nyert variációk felső korlátja. Világos, hogy

$$|a(e)| \leq A(e) < 2A.$$

Bebizonyítjuk másrészt, hogy

$$A(e_1 + e_2) = A(e_1) + A(e_2); \quad (5)$$

s így $A(e)$ lineáris halmazfüggvény, mit az $a(e)$ -hez tartozó variációfüggvénynek vagy $a(e)$ majoráns függvényének is hívhatunk.

e_1 és e_2 akármelyik beosztása egyszersmind az $e_1 + e_2$ -nek is beosztása, tehát

$$A(e_1 + e_2) \leq A(e_1) + A(e_2).$$

Vegyünk másrészt olyan o_i beosztássorozatot, melyre képzett variációk az $A(e_1 + e_2)$ által jelölt szám felé tartanak (ilyen beosztássorozat léte a felső korlát definíciójából következik). Ha az o_i beosztással $e_1 + e_2$ nem lenne e_1 és e_2 részre is osztható, helyettesítsük o_i -t o'_i beosztással, mely utóbbi az o_i osztás és e_1 meg e_2 -re osztás egyesítése. Az o'_i beosztással képzett variáció nem lehet kisebb, mint az o_i beosztással képzett, mert emennek továbbosztása s így az o'_i osztássorozattal megint a felső korláthoz $A(e_1 + e_2)$ -hez jutunk. Ámde o'_i két részre osztható: 1. az

e_1 halmaz ω_1 osztása, 2. az e_2 halmaz ω_2 osztása, s így a megfelelő variatio szintén két megfelelő részre esik szét. Világos ebből, hogy a most kijelölt, $A(e_1 + e_2)$ felé tartó variatio-sorozat minden tagja egy e_1 -re képzett meg egy e_2 -re képzett variatio összege s így

$$A(e_1 + e_2) = A(e_1) + A(e_2),$$

a mit a fentivel egybevetve épen (5) egyenletet kapjuk.

8. $\alpha(e)$ szerint vett integrál. Legyen adva $\alpha(e)$ lineáris halmazfüggvény és az E halmazon definiált egyértékű $f(x)$ függvény. Tegyük fel először, hogy

$$0 \leq f(x) \leq A, \quad \alpha(e) \geq 0$$

és nézzük a LEBESGUE-integrál analógiájára a $0 - A$ értékek l_0, l_1, \dots, l_n beosztását, hol $l_0 = 0$, $l_n = A$ és $|l_{i+1} - l_i| < \delta$. Legyen végül e_i az olyan x pontok halmaza, hol $l_i \leq f(x) < l_{i+1}$ és képezzük a pozitív tagokból álló

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} l_i \alpha(e_i), \quad S_n = \sum_{i=0}^n l_i \alpha(e_{i-1})$$

összegeket. A képzés szerint

$$S_n > s_n,$$

mert ugyanaz az $\alpha(e_i)$ az s_n -ben l_i -vel, S_n -ben pedig l_{i+1} -gyel van szorozva. A $0 - A$ értékrendszer előbbi beosztását sűrítve s_n nő, S_n fogy, különbségükre nézve pedig áll az egyenlőtlenség

$$S_n - s_n < \delta [\alpha(e_0) + \alpha(e_1) + \dots + \alpha(e_n)] = \delta \alpha(l). \quad (6)$$

Az s_n és S_n sorozatnak van tehát és pedig közös limese, midőn a beosztásokat mindinkább sűrítjük, úgy hogy a legnagyobb $l_{i+1} - l_i$ számköz is 0 felé tartson. Könnyen láthatjuk, hogy más beosztással menve a határra, ugyancsak az előbbi limest kapjuk, feltéve természetesen itt is, hogy a legnagyobb $|l_{i+1} - l_i|$ is nulla felé tart.

Legyen tehát adva egy nem-folytatolagos beosztás-sorozat; az ezekre képzett s_n kisebb, mint akármelyik S_n , mert az S_n beosztását egyesítve s_n beosztásával, s_n nagyobbodott, S_n kisebbedett s az új s_n még mindig kisebb, mint az új S_n . Másrészt azonban (6) megint fennáll s így van limesök s ez közös, sőt

éppen az, a mit az imént folytatólagos beosztással kaptunk. Az így nyert egyetlen limes az $f(x)$ korlátolt függvénynek $a(e)$ szerint vett integrálja:

$$\int_E f(x) da(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} l_i a(e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n l_i a(e_{i-1}).$$

Ha $f(x)$ nem mindig pozitív, de korlátolt, $-M \leq f(x) \leq M$, akkor $-M$ és $+M$ között eszközöljük az $l_{-n}, \dots, l_{-1}, l_0, l_{+1}, \dots, l_{+n}$ beosztásokat megint úgy, hogy $|l_{i+1} - l_i| < \delta$. Az s_n , illetőleg az S_n összeg két részre — köztük egy tisztán negatív tagokból álló részre — esik szét, melyekre külön-külön okoskodhatunk a fenti módon; csak (6) egyenlőtlenség helyébe lép:

$$|S_n - s_n| < 2\delta a(E);$$

s így látjuk, hogy külön-külön is van limesük, tehát összegüknek is. Ha meg $a(e)$ nem mindig pozitív, írhatjuk, hogy

$$a(e) = \frac{A(e) + a(e)}{2} - \frac{A(e) - a(e)}{2} = a_1(e) - a_2(e),$$

hol már $a_1(e) \geq 0$, $a_2(e) \geq 0$ és s_n, S_n megint két részre esik, miknek a fentiek szerint külön is van limesük s így különbségüknek is, csak (6) egyenlőtlenség helyébe

$$|S_n - s_n| < 2\delta [a_1(E) + a_2(E)] = 2\delta A(E) \quad (7)$$

lép. E szerint a vizsgált limes, vagyis $f(x)$ függvénynek $a(e)$ szerint vett integrálja van minden E -ben megdefiniált egyértékű korlátolt $f(x)$ függvényre nézve akármilyen lineáris $a(e)$ esetében.

Nyilvánvaló, hogy ez az integrál folytonos $f(x)$ esetében STIELTJES-integrálra redukálódik, mérhető $f(x)$ esetében pedig, ha még $a(e) = m(e)$, LEBESGUE-integrálra; az új integrál mindkét régit speciális esetként foglalja magában s így azok együttes általánosításául tekintendő.

10. A lineáris integrál tulajdonságai. A fenti definitió kibővítjük még

$$\int_b^a f(x) da(e) = - \int_a^b f(x) da(e)$$

egyenlőséggel. Az így megdefiniált integrál főbb tulajdonságai a következők.

1. Ha E_1 és E_2 halmaznak nincs közös pontja.

$$\int_{E_1+E_2} f(x) da(e) = \int_{E_1} f(x) da(e) + \int_{E_2} f(x) da(e). \quad (8)$$

Ez magában foglalja

$$\int_a^b f(x) da(e) + \int_b^c f(x) da(e) = \int_a^c f(x) da(e)$$

egyenletet, ha b pontot csak az egyik számközhöz számítjuk hozzá.

Bizonyítás. Legyen e'_i az E_1 és e''_i az E_2 ama halmazának jele, hol $f(x)$ értéke l_i és l_{i+1} között van, vagy l_i -vel egyenlő. Ekkor

$$s'_n = \sum_i l_i \alpha(e'_i), \quad s''_n = \sum_i l_i \alpha(e''_i);$$

és

$$s_n = \sum_i l_i \alpha(e'_i + e''_i) = \sum_i l_i \alpha(e'_i) + \sum_i l_i \alpha(e''_i);$$

s így a határra menve éppen (8) egyenlőséget kapjuk.

$$2. \int_E f(x) d[\alpha_1(e) + \alpha_2(e)] = \int_E f(x) d\alpha_1(e) + \int_E f(x) d\alpha_2(e), \quad (9)$$

mint ez a megfelelő s_n -nek kiírásakor tüstént látható $\alpha(e)$ additív-sága folytán.

$$3. \int_E [f(x) + \varphi(x)] da(e) = \int_E f(x) da(e) + \int_E \varphi(x) da(e). \quad (10)$$

Evidens az egyenlőség, ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ véges számú értékből álló függvények. Legyen az általános esetben az $f(x) + \varphi(x)$ függvényre vonatkozó részletösszeg s_n , az $f(x)$ -re vonatkozó s'_n , a $\varphi(x)$ -re vonatkozó s''_n ; e'_i ama pontok halmaza, hol $l_i \leq f(x) < l_{i+1}$, e''_i azoké a pontoké, hol $l_i \leq \varphi(x) < l_{i+1}$. Legyen végül

$$f(x) - \sum_i l_i \psi_{e'_i}(x) = \delta(x), \quad \varphi(x) - \sum_i l_i \psi_{e''_i}(x) = \delta'(x),$$

hol $|\delta(x)| < \delta$, $|\delta'(x)| < \delta$ minden x pontban s így

$$f(x) + \varphi(x) - \sum_i l_i [\psi_{e'_i}(x) + \psi_{e''_i}(x)] = \delta(x) + \delta'(x).$$

Világos, hogy $f'_n(x) = \sum_i l_i \psi_{e'_i}(x)$ függvénynek $\alpha(e)$ szerinti

integrálja éppen s'_n , $f''_n(x) = \sum_i l_i \phi''_{e'_i}(x)$ integrálja éppen s''_n , végül $f_n(x) = \sum_i l_i [\phi_{e'_i}(x) + \phi_{e''_i}(x)] = f'_n + f''_n$ integrálja éppen s_n s így

$$\begin{aligned} \left| \int_E f(x) da(e) - \int_E f'_n(x) da(e) \right| &< 2\delta A(E), \\ \left| \int_E \varphi(x) da(e) - \int_E f''_n(x) da(e) \right| &< 2\delta A(E), \\ \left| \int_E [f(x) + \varphi(x)] da(e) - \int_E f_n(x) da(e) \right| &< 4\delta A(E). \end{aligned}$$

Mivel pedig

$$\int_E f'_n(x) da(e) + \int_E f''_n(x) da(e) = \int_E f_n(x) da(e),$$

mert a szereplő függvények véges számú értékből állanak, az előbbiek szerint ugyanez az egyenlőség $8\delta A(E)$ megközelítéssel fennáll f , φ és $f+\varphi$ között is. δ azonban tetszésszerűen, egyenlőségünk tehát szigorúan fennáll.

4. Ha az együttesen korlátolt $f_n(x)$ függvények határ-függvénye $f(x)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) da(e) = \int_E f(x) da(e), \quad (11)$$

feltéve, hogy $f_n(x)$ egyenletesen tart $f(x)$ felé. Bizonyos n indexen túl ugyanis $|f(x) - f_n(x)| < \delta$ s így

$$\left| \int_E f(x) da(e) - \int_E f_n(x) da(e) \right| = \left| \int_E [f(x) - f_n(x)] da(e) \right| < 2\delta A,$$

mert s_n összeget nagyobbítjuk, ha $|f(x) - f_n(x)|$ helyébe δ -t teszünk és ugyanakkor az a szorzót abszolút értékével helyettesítjük. A δ -t azután kiemelve, a pozitív $a(e)$ -k összege egy $a(e')$ értéket, a volt negatív $a(e)$ -k egy $a(e'')$ értéket adnak s így abszolút értékük összege kisebb, mint $2A$.

11. *Bilineáris halmazfüggvény és a vele képzett bilineáris integrál.* Az $a(e, \varepsilon)$ kétváltozós halmazfüggvény additív, ha külön az e és külön az ε változóban az; korlátolt, ha van olyan A szám, hogy minden e és ε értékre nézve $|a(e, \varepsilon)| < A$. Ha egyszerre additív és korlátolt, akkor *bilineáris halmazfüggvény* névvel illetjük.

Legyen adva $\alpha(e, \varepsilon)$ bilineáris halmazfüggvény és $f(x)$, $\varphi(x)$, egyelőre azzal a kikötéssel, hogy

$$0 \leq f(x) \leq M, \quad 0 \leq \varphi(x) < M.$$

Képezzük a 0 és M közötti számértékek $l_0, l_1, l_2, \dots, l_n$ beosztását úgy, hogy $|l_{i+1} - l_i| < \delta$ és ezzel az

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} l_i l_k \alpha(e_i, \varepsilon_k) \quad \text{és} \quad S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n l_i l_k \alpha(e_{i-1}, \varepsilon_{k-1}) \quad (s)$$

összeget, hol a már szokott módon, e_i az E ama pontjainak halmaza, melyre nézve $l_i \leq f(x) < l_{i+1}$ és ε_k az η ama pontjaié, melyre nézve

$$l_k \leq \varphi(x) < l_{k+1}.$$

Ha $\alpha(e, \varepsilon) \geq 0$ minden értékre, akkor tüstént látható, hogy a beosztások sűrítésével (n növekedtével) s_n nő, S_n fogy és hogy kisebb, mint akármelyik S_n , végül

$$S_n - s_n < 3M\delta\alpha(E, \eta), \quad (12)$$

mert a különbségben az $\alpha(e_i, \varepsilon_k)$ szorzója

$$l_{i+1}l_{k+1} - l_i l_k = (l_{i+1} - l_i)(l_{k+1} + l_k) + \\ + l_i l_{k+1} - l_{i+1} l_k < (l_{i+1} - l_i)(l_{k+1} + l_k) + l_{i+1}l_{k+1} - l_{i+1}l_k;$$

és így

$$l_{i+1}l_{k+1} - l_i l_k < 2M\delta + M\delta = 3M\delta;$$

az $l_{i+1}l_{k+1} - l_i l_k$ helyébe mindenütt $3M\delta$ -t téve s ezt kiemelve, az ottmaradt összeg $\sum_i \sum_k \alpha(e_i, \varepsilon_k) = \alpha(E, \eta)$. A δ tetszésszerűen lévén, s_n és S_n összegeknek van tehát, még pedig közös limesük.

Azt is könnyen láthatjuk, hogy ez a limes független az l_0, l_1, \dots, l_n beosztástól, melyen át a határra mentünk, feltéve, hogy a legnagyobb $|l_{i+1} - l_i|$ számköz is 0 felé tart. Legyen adva ugyanis $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots$ beosztássorozat. Ha ezek nem egymás sűrítései, képezzük $B_1 = b_1$, $B_2 = b_1 + b_2$, a b_1 és b_2 egyesített beosztása, $B_3 = b_1 + b_2 + b_3$, stb. sorozatot. Az előbbi beosztással nyert s_n mind kisebb valamennyi új beosztással nyert S_n -nél és a régi beosztással nyert S_n mind nagyobb az új s_n összegeknél; de minden δ -hoz tartozó beosztásra nézve áll (12)

egyenlőtlenség s így az első és második beosztássorozattal nyert limes azonos. Elég tehát egymás sűrítéseiből álló beosztássorozatokot nézni. Legyen b'_i, b''_i két ilyen beosztás. Az előbbi megfontolás szerint mindegyikkel nyert limes azonos $b'_i + b''_i$ egyesített beosztással nyert limessel s így egymással is.

Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ korlátoltak, de nem mindenütt pozitívok, a negatív beosztások adnak a fentihez teljesen analog összeget, hol minden tag pozitív s így a limes léte is külön is biztosítva van, továbbá egy másik összeget, hol $f(x)$ pozitív és $\varphi(x)$ negatív s így minden tag negatív, végül egy összeget, hol $f(x)$ negatív és $\varphi(x)$ pozitív s így minden tag negatív. Egy helyett tehát négy összegünk van, de a fentiek szerint külön is van mindegyiknek limese s így összegüknek is.

Az így megállapított határértéket hívjuk $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvények $\alpha(e, \varepsilon)$ szerint vett integráljának:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_E \int_{\eta} f(x_1) \varphi(x_2) d\alpha(e, \varepsilon).$$

12. Vegyük most azt az általános esetet, mikor $\alpha(e, \varepsilon)$ nem mindig pozitív (negatív), de korlátolt, és képezzük $\sum_{i=1}^n |\alpha(e, \varepsilon_i)|$ variatiót. A pozitív tagokat külön, a negatívakat külön összeadva. látjuk, hogy ez a variatio az e -től függetlenül kisebb mint $2A$, mert a pozitív tagok együtt, $\alpha(e, \varepsilon)$ linearitása folytán, nem egyebek, mint $\alpha(e, \varepsilon)$ egyik értéke; ugyanígy a negatívak. Legyen $B_1(\varepsilon)$ az ε bármely beosztásával nyert variatiók felső korlátja, minden E -ből való e -t tekintetbe véve. Ugyanígy legyen $B_2(e)$ az e -re képzett $\sum_{i=1}^n |\alpha(e_i, \varepsilon)|$ variatiók felső korlátja akármilyen ε -ra. Az $A(e, \varepsilon) = \frac{B_2(e) + B_1(\varepsilon)}{2}$ majoráns függvénye $\alpha(e, \varepsilon)$ -nak, mert világos, hogy $B_1(\varepsilon) \geq |\alpha(e, \varepsilon)|$, $B_2(e) \geq |\alpha(e, \varepsilon)|$ s így $A(e, \varepsilon) \geq |\alpha(e, \varepsilon)|$, bármi legyen is e és ε a E halmazból.

Másrészt $A(e, \varepsilon)$ külön az e és külön az ε változóban additív. Bizonyítás: $B_1(\varepsilon + \eta) \geq B_1(\varepsilon) + B_1(\eta)$, mert ε és η minden beosztása egyszersmind $\varepsilon + \eta$ halmaznak is beosztása. Ha pedig van oly beosztás és e seregem, melylyel $B_1(\varepsilon + \eta)$ felé tartok, akkor ezt a beosztást még sűrítve (ugyanaz e -k mel-

lett) ε és η halmazokra osztással, csak nagyobbíthatom a vizsgált összegeket s így $B_1(\varepsilon + \eta)$ felé ε és η beosztásain át megyek, tehát

$$B_1(\varepsilon + \eta) < B(\varepsilon) + B_1(\eta);$$

azaz

$$B_1(\varepsilon + \eta) = B_1(\varepsilon) + B_1(\eta).$$

Ugyanígy

$$B_2(e_1 + e_2) = B_2(e_1) + B_2(e_2).$$

Továbbá $A(e, \varepsilon) \leq 2A$. Minden bilineáris $a(e, \varepsilon)$ halmazfüggvényhez tartozik tehát egy sehol sem negatív bilineáris $A(e, \varepsilon)$ azzal a tulajdonsággal, hogy $A(e, \varepsilon) > |a(e, \varepsilon)|$. $A(e, \varepsilon)$ az $a(e, \varepsilon)$ majoráns függvénye.

Most azonban írhatjuk

$$a(e, \varepsilon) = \frac{A(e, \varepsilon) + a(e, \varepsilon)}{2} - \frac{A(e, \varepsilon) - a(e, \varepsilon)}{2} = a_1(e, \varepsilon) - a_2(e, \varepsilon),$$

hol $a_1(e, \varepsilon) \geq 0$, $a_2(e, \varepsilon) > 0$ a változók minden értékére. Ennek segítségével s_n két összeg különbségére bomlik; az egyikben $a(e, \varepsilon)$ helyébe $a_1(e, \varepsilon)$ lép, a másikban $a_2(e, \varepsilon)$ s így a fentiek szerint külön is van limes, ha a beosztásokat végtelenül sűrítjük, tehát együtt is.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_E \int_{\eta} f(x_1) \varphi(x_2) da(e, \varepsilon)$$

integrál van tehát minden korlátolt $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvényre nézve minden bilineáris $a(e, \varepsilon)$ esetében.

13. Az így értelmezett bilineáris integrál főbb tulajdonságai a következők.

1. Ha E_1 és E_2 közös pont nélküli halmazok,

$$\begin{aligned} & \int_{E_1 + E_2} \int_{\eta} f(x_1) \varphi(x_1) da(e, \varepsilon) = \\ &= \int_{E_1} \int_{\eta} f(x_1) \varphi(x_2) da(e, \varepsilon) + \int_{E_2} \int_{\eta} f(x_1) \varphi(x_2) da(e, \varepsilon), \end{aligned} \quad (13)$$

mert s_n összegben l_{ik} mellett a baloldali integrálnál $a(e'_i + e''_i, \varepsilon_k)$ áll, ha e'_i -vel jelezzük E_1 ama pontjainak halmazát, hol $l_i \leq f(x) < l_{i+1}$ és e''_i -vel E_2 ama pontjainak halmazát, hol $l_i \leq f(x) < l_{i+1}$; a jobb oldalon pedig ugyancsak l_{ik} mellett az

első integrálnál $\alpha(e'_i, \varepsilon_k)$, a másikonál $\alpha(e''_i, \varepsilon_k)$ áll s így, $\alpha(e, \varepsilon)$ additivitása folytán, (13) tényleg fennáll.

Természetesen ugyanígy

$$\begin{aligned} \int_{E_{\eta_1 + \eta_2}} f(x_1) \varphi(x_2) d\alpha(e, \varepsilon) &= \int_{E_{\eta_1}} f(x_1) \varphi(x_2) d\alpha(e, \varepsilon) + \\ &+ \int_{E_{\eta_2}} f(x_1) \varphi(x_2) d\alpha(e, \varepsilon). \\ 2. \int_{E_{\eta}} f(x_1) \varphi(x_2) d[\alpha_1(e, \varepsilon) + \alpha_2(e, \varepsilon)] &= \\ = \int_{E_{\eta}} f(x_1) \varphi(x_1) d\alpha_1(e, \varepsilon) + \int_{E_{\eta}} f(x_1) \varphi(x_1) d\alpha_2(e, \varepsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

Bizonyítás, mint lineáris integrál esetében.

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_{\eta}} f_n(x_1) \varphi_n(x_2) d\alpha(e, \varepsilon) = \int_{E_{\eta}} f(x_1) \varphi(x_2) d\alpha(e, \varepsilon) \quad (15)$$

mihelyt $f_n(x_1)$ és $\varphi_n(x_2)$ egyenletesen tart $f(x_1)$ és $\varphi(x_2)$ felé.

Bizonyítás: Ha $f_n(x)$ és $\varphi_n(x)$ az $f(x)$ és $\varphi(x)$ véges számú értékből álló megközelítő függvényei, akkor

$$\int_{E_{\eta}} f_n(x_1) \varphi_n(x_2) d\alpha(e, \varepsilon)$$

nem egyéb, mint az $f(x)$ és $\varphi(x)$ -nek $\alpha(e, \varepsilon)$ szerinti integráljához tartozó egyik s_n és így elég messze eső n -en túl

$$\left| \int_{E_{\eta}} f(x_1) \varphi(x_2) d\alpha(e, \varepsilon) - \int_{E_{\eta}} f_n(x_1) \varphi_n(x_2) d\alpha(e, \varepsilon) \right| < 12\delta MA,$$

bármilyen kicsiny is az előre megadott δ , úgy hogy

$$|f(x) - f_n(x)| < \delta, \quad |\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \delta.$$

Ha pedig $f_n(x)$ és $\varphi_n(x)$ nem ilyen specziális függvényekből álló sorozat, de egyenletesen $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, akkor $f_n(x)$ és $\varphi_n(x)$ függvényeket megközelítjük $f'_n(x)$ és $\varphi'_n(x)$ véges számú értékből álló függvényekkel, úgy hogy

$$|f_n(x) - f'_n(x)| < \delta, \quad |\varphi_n(x) - \varphi'_n(x)| < \delta.$$

Ekkor

$$\left| \int_{E_{\eta}} f_n(x_1) \varphi_n(x_2) d\alpha(e, \varepsilon) - \int_{E_{\eta}} f'_n(x_1) \varphi'_n(x_2) d\alpha(e, \varepsilon) \right| < 12\delta MA;$$

Az $f'_n(x)$ és $\varphi'_n(x)$ határfüggvényei azonban $f(x)$ és $\varphi(x)$, tehát

$$\left| \int_{E_\eta} \int f(x_1) \varphi(x_2) da(e, \varepsilon) - \int_{E_\eta} \int f'_n(x_1) \varphi'_n(x_2) da(e, \varepsilon) \right| < 12\delta MA$$

s így

$$\left| \int_{E_\eta} \int f(x_1) \varphi(x_2) da(e, \varepsilon) - \int_{E_\eta} \int f_n(x_1) \varphi_n(x_2) da(e, \varepsilon) \right| < 24\delta MA,$$

hol δ tetszőszerint kicsiny, és ez volt a bizonyítandó tulajdonság.

$$\begin{aligned} 4. \quad & \int_{E_\eta} \int [f_1(x_1) + f_2(x_1)] \varphi(x_2) da(e, \varepsilon) = \\ & = \int_{E_\eta} \int f_1(x_1) \varphi(x_2) da(e, \varepsilon) + \int_{E_\eta} \int f_2(x_1) \varphi(x_2) da(e, \varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

A bizonyítás szakasztott úgy megy, mint lineáris integrál esetében. Ha $f_1(x)$ és $f_2(x)$ véges számú értékből álló függvények, $\varphi(x)$ -nek véges számú lineáris integrálját kapjuk mindkét oldalon, miknek szorzói, $a(e, \varepsilon)$ additivsága folytán, megegyeznek egymással; így erre az esetre (16) fennáll. De $f_1(x)$ és $f_2(x)$ függvényeket mindig egyenletesen megközelíthetjük ilyen, véges számú értékből álló $f_{1,n}(x)$ és $f_{2,n}(x)$ függvényekkel, úgy hogy

$$|f_1(x) - f_{1,n}(x)| < \delta, \quad |f_2(x) - f_{2,n}(x)| < \delta.$$

Ha pedig $f_1(x)$ és $f_2(x)$ helyett $f_{1,n}(x)$ és $f_{2,n}(x)$ függvényeket vesszünk, (16) mindegyik integrálja helyébe ezektől legfeljebb $12\delta MA$ mennyiséggel különböző integrálokat kapunk. Ezekre azonban (16) ki van elégítve s így $f_1(x)$ és $f_2(x)$ függvényekre is legfeljebb $24\delta MA$ különbséggel; δ tetszőszerint kicsiny lévén, az egyenlőség egész pontosan fennáll.

14. Polylineáris halmazfüggvények és integrálok. A bilineáris halmazfüggvényekről és integrálokról mondottak szószerint átvihetők véges számú halmazváltozótól függő $a(e^1, e^2, \dots, e^k)$ úgynevezett polylineáris függvényre, mely mindegyik változóban külön additív és egészében korlátolt.

Legfontosabb az integrálfogalom megfelelő általánosítására a majoráns halmazfüggvény léte, az előbbi eljárás azonban szószerint áthozható véges számú halmazváltozó esetére is. Így jutunk el a

$$\int_{E_1} \int_{E_2} \dots \int_{E_k} f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_k(x_k) da(e^1, e^2, \dots, e^k) \quad (17)$$

polylineáris integrál fogalmához, mely a következőkben alapvető fontosságú. Négy alaptulajdonsága ismét csak a bilineáris integrál megfelelő tulajdonságainak észszerű átírása. Fontos eset lesz számunkra az, hol mind a k függvény ugyanaz integrálási tartományukkal egyetemben:

$$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_k(x) = f(x); E_1 = E_2 = \dots = E_k = E;$$

és hol $a(e^1, e^2, \dots, e^k)$ bármely két halmazváltozójának symmetrikus függvénye, például

$$a(e^3, e^1, e^3, \dots, e^k) = a(e^1, e^2, e^3, \dots, e^k).$$

Az ilyen

$$\int_E \int_E \dots \int_E^{(k)} f(x_1) \dots f(x_k) da(e^1, e^2, \dots, e^k) \quad (18)$$

integrált $f(x)$ k -adfokú integráljának nevezzük. Ez hasonlít leginkább $f(x)$ régi értelemben vett k -szoros integráljához.

III. FEJEZET.

Functionálpolinom és folytonos functionál előállítása.

15. *Lineáris functionálok.* Legyen $U(f)$ homogén lineáris functionál, meghatározva az összes egyértékű függvényekre E halmazon. A $\phi_e(x)$ függvényekhez rendelt értékei összességükben

$$U(\phi_e(x)) = a(e) \quad (19)$$

halmazfüggvényt adják. Ha e_1 és e_2 halmazoknak közös pontjuk nincs,

$$U(\phi_{e_1+e_2}(x)) = U(\phi_{e_1}(x) + \phi_{e_2}(x)) = U(\phi_{e_1}(x)) + U(\phi_{e_2}(x)),$$

azaz

$$a(e_1 + e_2) = a(e_1) + a(e_2).$$

Továbbá

$$|\phi_e(x)| \leq 1,$$

mert csak 0 és 1 értékből áll s így

$$|U(\phi_e(x))| < A,$$

azaz $\alpha(e)$ halmazfüggvény korlátolt, s e két tulajdonságot egybevetve, *lineáris*.

Képezzük az E halmazra definiált bármilyen korlátolt függvényre nézve

$$\int_E f(x) d\alpha(e) \quad (20)$$

integrált és közelítsük meg $f(x)$ függvényt a szokott módon

$$f_n(x) = \sum_i l_i \psi_{e_i}(x)$$

függvényt sorozattal. Azt állítjuk, hogy

$$U(f_n) = s_n,$$

hol s_n a (20) integrálnak n -edik részlet-összege. Ugyanis $U(f)$ additivitása folytán

$$U(f_n) = U\left(\sum_i l_i \psi_{e_i}(x)\right) = \sum_i l_i U(\psi_{e_i}(x)) = \sum_i l_i \alpha(e_i) = s_n.$$

De $U(f_n)$ folytonos functionál s így

$$U(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f_n),$$

azaz

$$U(f) = \int_E f(x) d\alpha(e).$$

Minden homogén lineáris functionálhoz tartozik tehát egy $\alpha(e)$ lineáris halmaz-függvény azzal a tulajdonsággal, hogy $f(x)$ szerint vett integrálja éppen az $f(x)$ függvényhez rendelt functionál-érték, bármelyik E halmazon értelmezett egyértékű korlátolt függvény is $f(x)$.

Fordítva, bárminő lineáris halmaz-függvény legyen is $\alpha(e)$, minden E halmazon értelmezett korlátolt $f(x)$ függvénynek van szerinte vett integrálja s a (10) pont szerint eleget tesz

$$\int_E [f_1(x) + f_2(x)] d\alpha = \int_E f_1(x) d\alpha + \int_E f_2(x) d\alpha$$

főltételnek, azaz additív functionálja $f(x)$ függvénynek, továbbá

$$\left| \int_E f(x) d\alpha \right| < A \|f\|,$$

tehát korlátolt s így folytonos is. Világos továbbá, hogy (20) integrál az $f(x)$ függvény-változó *homogén* lineáris functionálja:

$$\int_E cf(x) da = c \int_E f(x) da.$$

A két eredményt egybevetve mondhatjuk, hogy (20) *integrál a homogén lineáris functionál tipikus formája.*

16. *Quadraticus functionálok.* Legyen most adva $U(f)$ homogén másodfokú (quadraticus) functionál és nézzük az

$$U(f+\varphi) - U(f) - U(\varphi) = 2V(f, \varphi)$$

két függvény-változós functionált. Először is

$$V(f, \varphi) = V(\varphi, f),$$

tehát V symmetrikus; másrészt

$$V(f_1+f_2, \varphi) = V(f_1, \varphi) + V(f_2, \varphi)$$

s így az első változóban — symmetriája folytán a másodikban is — additív. Folytonos is, mert három folytonos functionál összege. Az ilyen functionált bilineárisnak mondjuk. Fontos tulajdonsága még, hogy

$$V(f, f) = U(f);$$

ugyanis

$$U(f+f) - U(f) - U(f) = 4U(f) - 2U(f),$$

tehát valóban

$$2U(f) = 2V(f, f).$$

A bilineáris functionál tehát általánosabb, mint a homogén másodfokú s így annak előállításával foglalkozunk. Képezzük megint

$$V(\psi_e(x), \psi_\epsilon(x)) = \alpha(e, \epsilon)$$

két változós halmaz-függvényt. Mint fentebb, itt is rögtön látható, hogy α symmetrikus, korlátolt és mindegyik változóban additív. Alkossuk meg tehát

$$\int_E \int_\eta f(x_1) \varphi(x_2) d\alpha(e, \epsilon)$$

bilineáris integrált és most is jelöljük s_n jellel az (s) összeget és legyen

$$f_n(x) = \sum_i l_i \phi_{e_i}(x), \quad \phi_n(x) = \sum_k l_k \phi_{\varepsilon_k}(x)$$

az $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvényhez egyenletesen tartó sorozat. Megint fennáll

$$V(f_n, \varphi_n) = s_n$$

egyenlőség, mert

$$\begin{aligned} & V\left(\sum_i l_i \phi_{e_i}(x), \sum_k l_k \phi_{\varepsilon_k}(x)\right) = \\ &= \sum_i \sum_k l_i l_k V(\phi_{e_i}(x), \phi_{\varepsilon_k}(x)) = \sum_i \sum_k l_i l_k a(e_i, \varepsilon_k); \end{aligned}$$

s így

$$V(f, \varphi) = \int_E \int_E f(x_1) \varphi(x_2) d\alpha(e, \varepsilon). \quad (21)$$

S ha

$$\varphi(x) = f(x), \quad U(f) = \int_E \int_E f(x_1) f(x_2) d\alpha(e, \varepsilon).$$

Minden bilineáris vagy másodfokú functionálhoz tartozik olyan $a(e, \varepsilon)$ halmazfüggvény, mely szerint integrálva $f(x)$, $\varphi(x)$ vagy $f(x)$ függvényt, éppen a hozzájuk, illetve hozzá rendelt functionálértéket kapjuk. A levezetés érvényes minden E halmazon definiált egyértékű korlátolt $f(x)$, $\varphi(x)$ vagy $f(x)$ függvényre nézve.

Fordítva, minden

$$\int_E \int_E f(x_1) f(x_2) d\alpha(e, \varepsilon) = U(f) \quad (22)$$

integrál homogén quadratikus functionál. A 13. pontban kifejtett tulajdonságai alapján ugyanis additív és korlátolt. Másrészt, ha A a felső korlát, azaz ha $|U(f)| < A$, mihelyt $|f(x)| \leq 1$, akkor

$$|U(f - f_n)| < A\delta^2,$$

mihelyt $|f(x) - f_n(x)| < \delta$, mert

$$\left| U\left(\frac{f - f_n}{\delta}\right) \right| = \left| \frac{1}{\delta^2} U(f - f_n) \right| < A;$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f - f_n) = 0.$$

Végül

$$U(f - f_n) - [U(f) - U(f_n)] = 2U(f) - 2V(f, f_n);$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [U(f_n) - V(f, f_n)] = U(f) - V(f, f) = 0,$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f_n) = U(f),$$

s így $U(f)$ folytonos is, azaz csakugyan homogén quadratikus functionálja $f(x)$ változónak. Az (22) integrál tehát tipikus formája a quadratikus functionáloknak.

17. Harmadfokú functionálok. Az általános k -ad fokú functionálpolinomok részletes kiírása helyett $k = 3$ esetet vizsgáljuk még meg egész részletesen, mivel itt már előfordul a felsőbb fokúakat jellemző új megfontolás. Legyen tehát $U(f)$ 3-ad fokú homogén functionálpolinom, azaz tegyen eleget minden $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ függvénycsoportra nézve az

$$\begin{aligned} & U(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) - U(f_1 + f_2 + f_3) - U(f_1 + f_2 + f_4) - \\ & - U(f_1 + f_3 + f_4) - U(f_2 + f_3 + f_4) + U(f_1 + f_2) + U(f_1 + f_3) + \\ & + U(f_1 + f_4) + U(f_2 + f_3) + U(f_2 + f_4) + U(f_3 + f_4) - U(f_1) - \\ & - U(f_2) - U(f_3) - U(f_4) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

egyenletnek. Nézzük

$$\begin{aligned} & U(F + f + \varphi) - U(F + f) - U(F + \varphi) - \\ & - U(f + \varphi) + U(F) + U(f) + U(\varphi) = 6V(F, f, \varphi) \end{aligned} \quad (24)$$

három változós functionált. Látjuk, hogy symmetrikus:

$$V(F, f, \varphi) = V(f, F, \varphi) = V(\varphi, f, F) = \dots,$$

akármilyen sorrendben írjuk is F, f, φ változókat.

Másrészt

$$V(F_1 + F_2, f, \varphi) = V(F_2, f, \varphi) + V(F_1, f, \varphi),$$

mint erről rögtön meggyőződhetünk a részletes kiírással. Kiírva ugyanis (24) egyenlet szerint V megfelelő értékeit és mindezt a baloldalra véve, $f_1 = F_1$, $f_2 = F_2$, $f_3 = f$, $f_4 = \varphi$ helyettesítés után éppen a (23) egyenlethez jutunk.

Mint véges számú $U(f)$ functionálból additive összerakott

functionálkifejezés, $U(f)$ -fel együtt korlátolt és folytonos, azaz ha F_n, f_n, φ_n az F, f, φ felé tartó függvénysorozatok,

$$|V(F, f, \varphi) - V(F_n, f_n, \varphi_n)| < B \cdot \delta$$

olyan n indextől kezdve, melyen túl

$$|F - F_n| < \delta, \quad |f - f_n| < \delta, \quad |\varphi - \varphi_n| < \delta.$$

Képezzük most a szokott módon

$$V(\psi_{e^1}(x), \psi_{e^2}(x), \varphi_{e^3}(x)) = \alpha(e^1, e^2, e^3)$$

halmazfüggvényt.

Ez a fentiekből kifolyólag korlátolt és additív s így képezhetjük vele

$$\int_{E_1} \int_{E_2} \int_{E_3} F(x_1) f(x_2) \varphi(x_3) d\alpha(e^1, e^2, e^3) \quad (25)$$

integrált.

A V additivsága folytán az ez integrálhoz tartozó s_n megint nem egyéb, mint a funkcionál értéke F, f, φ függvényhármast egyenletesen megközelítő F_n, f_n, φ_n függvényekre:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_i \sum_j \sum_k l_i l_j l_k \alpha(e_i^1, e_j^2, e_k^3) = \\ &= V\left(\sum_i l_i \psi_{e_i^1}(x), \sum_j l_j \psi_{e_j^2}(x), \sum_k l_k \psi_{e_k^3}(x)\right) \end{aligned}$$

s így V folytonossága miatt

$$V(F, f, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_{E_1} \int_{E_2} \int_{E_3} F(x_1) f(x_2) \varphi(x_3) d\alpha(e^1, e^2, e^3). \quad (26)$$

Ha pedig $F = f, \varphi = f$,

$$U(f) = \int_E \int_E \int_E f(x_1) f(x_2) f(x_3) d\alpha(e^1, e^2, e^3). \quad (27)$$

Minden harmadfokú homogén functionálhoz tartozik $\alpha(e^1, e^2, e^3)$ trilineáris halmazfüggvény, a mely szerint vett integrálja $f(x)$ -nek éppen a funkcionál ugyane $f(x)$ -hez rendelt értékét adja meg.

Fordítva, minden (27) integrál, hol $\alpha(e^1, e^2, e^3)$ trilineáris halmazfüggvény, homogén harmadfokú functionálja $f(x)$

függvényváltozónak. Tüstént igazolhatjuk ugyanis, hogy eleget tesz (23) egyenletnek, mert $U(f)$ beírása után az integrál jel alatt (A_1) baloldalát kapjuk, hol

$$p = n = 3, f = xyz, x_i = f_1^{(i)}, y_i = f_2^{(i)}, z_i = f_3^{(i)}, \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

18. Az általános functionálpolynom integrál-előállítása. Az imént használt bizonyítás megismétlésével látható, hogy az általános esetben $U_k(f)$ homogén k -ad fokú functionál k -ad rendű integrál alakjában írható, azaz van olyan $\alpha(e^1, e^2, \dots, e^k)$ k -szorosan lineáris halmazfüggvény, hogy minden korlátolt $f(x)$ függvényre nézve

$$U_k(f) = \int_E \int_E \dots \int_E f(x_1) \dots f(x_k) d\alpha(e^1, e^2, \dots, e^k); \quad (28)$$

és fordítva, minden ilyen integrál, hol α k -szorosan lineáris halmazfüggvény, k -ad fokú functionálpolynom s így minden k -ad fokú polynom

$$\begin{aligned} U_k(f) &= U_0 + \int_E f(x) da_1(e) + \\ &+ \int_E \int_E f(x_1) f(x_2) da_2(e^1, e^2) + \dots + \\ &+ \int_E \dots \int_E f(x_1) \dots f(x_k) da_k(e^1, \dots, e^k) \end{aligned} \quad (29)$$

alakban írható fel.

Mint a közönséges $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^k$ k -adfokú polynomot jellemezte $k+1$ szám (az együtthatói), ugyanigy a k -adfokú functionálpolynomot jellemzi egy szám és k halmazfüggvény. Az analogia $a_k(e^1, e^2, \dots, e^k)$ és a_k között még részletesebben is megvan. Például $(a_{k_1} + a_{k_2})x^k = a_{k_1}x^k + a_{k_2}x^k$ és

$$\begin{aligned} &\int_E \dots \int_E f(x_1) \dots f(x_k) d[a_{k_1}(e^1, \dots, e^k) + a_{k_2}(e^1, \dots, e^k)] = \\ &= \int_E \dots \int_E f(x_1) \dots f(x_k) da_{k_1} + \int_E \dots \int_E f(x_1) \dots f(x_k) da_{k_2}; \end{aligned}$$

míg x helyébe cx -et téve

$$a_k(cx)^k = c^k a_k x^k,$$

és

$$\int_E \dots \int_E cf. cf. \dots cf da_k = c^k \int_E \dots \int_E f \dots f da_k;$$

és így tovább.

Nézzük még azt az esetet, mikor $U_k(f)$ nem korlátolt $f(x)$ függvényhez is rendel értéket, de ez az érték a korlátolt függvényekhez rendeltékkel a folytonosság kapcsán van összefüggve, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f_n) = U(f);$$

mihelyt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ [itt természetesen az $f(x)$ felé tartás nem lehet egyenletes]. Nem korlátolt függvényekre annyiban módosítjuk az integrál fogalmát, hogy

$$l_{-n}, \dots, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, \dots, l_n$$

beosztást nemcsak sűrítjük, hanem l_{+n} és l_{-n} számon túl is folytatjuk, úgy hogy a határra menve $\lim_{n \rightarrow \infty} l_{\pm n} = \infty$ és vegyük az integrál értelméül az így előálló s_n számok limesét (*ha ugyanis ilyen van*). Ekkor megint fennáll

$$s_n = U_k \left(\sum_i l_i \psi_{e_i}(x) \right)$$

egyenlőség, hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^{+n} l_i \psi_{e_i}(x) = f(x);$$

és így az s_n összegeknek okvetetlenül van határértéke, mihelyt $U_k(f)$ a fent körülírt folytonos módon rendel értéket a vizsgált $f(x)$ függvényhez.

Viszont ha

$$\int_E \dots \int_E f(x_1) \dots f(x_k) da_k$$

van ilyen nem korlátolt $f(x)$ -re nézve, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_k \left(\sum_{i=-n}^{+n} l_i \psi_{e_i}(x) \right)$$

is van s így $U_k(f)$ a folytonosságnál fogva rendel $f(x)$ -hez értéket (tekinthető ez $U_k(f)$ eredetileg adott definitiós tartománya kiszélesítésének is).

Mondhatjuk tehát, hogy (28) integrál előállítja $U(f)$ functionál értékét minden egyértékű valós $f(x)$ függvényre.

19. Folytonos functionálok integrál-előállítás. Legyen most $U(f)$ egy tetszőszerinti folytonos functionál. A szokott jelzésekhez ragaszkodva, látjuk, hogy $U(\sum_i l_i \phi_{e_i}(x))$ functionál-érték az l_i számok folytonos függvénye, mert

$$\sum_i l'_i \phi_{e_i}(x) - \sum_i l_i \phi_{e_i}(x) < n\delta,$$

mihelyt $|l'_i - l_i| < \delta$, hol n az l változók száma. WEIERSTRASS tétele szerint van oly polynomsorozat l_i változóiban: $P_{k_n}(l_i)$, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{k_n}(l_i) = U\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i l_i \phi_{e_i}(x)\right) = U(f),$$

még pedig egyenletesen, ha $|l_i| \leq M$ tartományban maradunk az l_i változókkal. Legyen másrészt $a_i(e)$ olyan lineáris halmazfüggvény, mely e_i halmazra nem nulla, ekkor

$$\left| l_i - \frac{1}{a_i(e_i)} \int_E f(x) \phi_{e_i}(x) da_i(e) \right| < \delta,$$

feltéve, hogy $|l_{i+1} - l_i| < \delta$ és pedig az $f(x)$ és $a_i(e)$ függvényektől függetlenül. Innen

$$\left| \prod_{i=1}^n l_i^{r_i} - \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i(e_i)^{r_i}} \prod_{i=1}^n \left[\int f(x) \phi_{e_i}(x) da_i(e) \right]^{r_i} \right| < \Phi(\delta),$$

$\Phi(\delta)$ az δ -ból pozitív numerikus szorzókkal képzett véges szorzat-összeg, hol minden tagban megvan δ vagy δ -nak magasabb hatványa; a baloldal második tagja azonban, mint functionálpolynomok szorzata maga is functionálpolynom s így l_i számokból álló minden polynom felírható, mint $f(x)$ functionálja plus a beosztás sűrítésével (n növekedtével) 0 felé tartó mennyiség. Csakugyan van tehát olyan functionálpolynom-sorozat, hogy minden korlátolt $f(x)$ -re nézve

$$U(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f),$$

még pedig egyenletesen, ha csakis oly $f(x)$ függvényeket tekintünk, melyek eleget tesznek $|f(x)| \leq M$ feltételnek s így min-

den folytonos functionál kifejezhető mint integrálösszegek határértéke

$$U(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[U_0 + \int_E f(x) da_1(e) + \int_E \int_E [f(x)]^2 da_2(e^1, e^2) + \dots + \int_E \dots \int_E [f(x)]^n da_n(e^1, e^2, \dots, e^n) \right]; \quad (30)$$

vagy pontosabban: elég nagy n indexen túl

$$\left| U(f) - \left[U_0 + \int_E f(x) da(e) + \int_E \int_E [f(x)]^2 da_2(e^1, e^2) + \dots + \int_E \dots \int_E [f(x)]^n da_n(e^1, \dots, e^n) \right] \right| < \delta;$$

bármilyen legyen is $f(x)$, feltéve, hogy $|f(x)| \leq M$.¹

Íme az eredmény, mit dolgozatunk céljául tűztünk ki. Két egyszerű, de fontos alkalmazással zárjuk le eddigi vizsgálatainkat.

20. Egyenletes folytonosság. Functionális Taylor-sor. Ez általános integrálegelőállítás egyik egyenes és igen fontos következménye, hogy minden folytonos functionál egyszersmind egyenletesen folytonos, ha $|f(x)| \leq M$ megszorítást teszszük a függvény-változóra.

$f(x)$ akkor egyenletesen folytonos, ha $|f(x+h) - f(x)| < \delta$, mihamint h elég kicsiny, bármilyen legyen is a véges tartományból választott x . Ennek analógiájára bebizonyítandó tehát, hogy ha $|h_n(x)| < \delta_1$, akkor

$$|U(f_n(x) + h_n(x)) - U(f_n(x))| < \delta,$$

bármilyen legyen is $f_n(x)$ a vizsgált tartományból (tudniillik az abszolút értékben M számmal nem nagyobb függvényekéből).

Van azonban $P_k(f)$ functionálsorozat azzal a tulajdonsággal, hogy elég nagy k indexen túl minden függvényre nézve, mely abszolút értékben nem nagyobb $M + \delta_1$ számmal,

¹ Egyszerűség kedvéért írtunk $[f(x)]^i$ symbolikus hatványt

$$f(x_1) f(x_2) \dots f(x_i)$$

függvényszorzat helyébe.

$$|U(f) - P_k(f)| < \frac{\delta}{2};$$

s így

$$|U(f_n + h_n) - U(f_n) - [P_k(f_n + h_n) - P_k(f_n)]| < \delta; \quad (31)$$

bármilyen legyen is $f_n(x)$ és $h_n(x)$ a tekintetbe jövő függvények közül. A $P_k(f)$ integrálösszeg alakjából egyszerű számítással következik, hogy egyenletesen folytonos, azaz minden tekintetbe jövő $f_n(x)$ és $h_n(x)$ függvényre nézve

$$|P_k(f_n + h_n) - P_k(f_n)| < \delta,$$

mihelyt $h_n(x)$, azaz δ_1 elég kicsiny. Ekkor azonban (31) szerint mindazokra az $f_n(x)$ és $h_n(x)$ függvényekre nézve $|U(f_n + h_n) - U(f_n)|$ sem lehet nagyobb 2δ értéknél s ez tételünket be is bizonyítja.

Másik egyszerű és nem kevésbé fontos alkalmazása eredményeinknek a következő. Képezzük a valós számoknak

$$a_0 + \int_E f(x) da_1 + \int_E \int_E [f(x)]^2 da_2 + \dots + \int_E \dots \int_E [f(x)]^n da_n + \dots \quad (32)$$

végtelen integrál-sorát. Ha valamely függvényosztály minden függvényére convergens, a sor $U(f)$ összegét e függvénytartományban *homomorph* functionálnak nevezzük.

Legyen A_n az a_n halmazfüggvény variatiofüggvényének felső korlátja és legyen

$$\frac{1}{\varrho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n}.$$

A vizsgált (32) functionál Taylor-sor convergál minden, E halmazon egyértékű $f(x)$ függvényre nézve, ha ez minden x -nél eleget tesz

$$|f(x)| < \varrho' < \varrho$$

feltételnek.

Nem kisebbítünk ugyanis, ha minden integrálban $f(x)$ helyett ennek abszolút értékét, a_n helyett a hozzátartozó $A_n^1(e^1, \dots)$ halmazfüggvényt vesszük. Az így kapott

$$|a_0| + \sum_{i=1}^{\infty} \int_E \dots \int_E |f(x)|^i dA_i(e^1, \dots)$$

sor azonban convergens, mert tagjai nem nagyobbak

$$|a_0| + \sum_{i=1}^{\infty} \varrho_1^i A_i \leq |a_0| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_1^i}{(\varrho - \delta)^i}$$

sor tagjainál, bármily kicsiny is δ . Vegyük tehát oly kicsinyre, hogy $\varrho_1 < \varrho - \delta$, mi által sorunk abszolút convergentiája bizonyítva van.

Látjuk, hogy vizsgált sorunk a közönséges TAYLOR-sorral analog viselkedésű és hogy általában mély hasonlóság van a közönséges és functionális polynomok szerkezete és szerepe között. Ennek kimutatása volt dolgozatunk egyik célja. Visszatérve végül bevezetésünk hasonlatához — hol a functionál bevezetését az analitikai függvényével vetettük össze —, mondhatjuk, hogy a complex szám bevezetésének megfelel a halmazfüggvényeké, mik a skalármennyiség általánosításául vehetők, a complex számokkal végzett sajátságos szorzásnak pedig megfelel a halmazfüggvény szerint vett integrálás, mely nagyon analog ahhoz, a mit a vectortanban két vector belső szorzatának hívunk. Mindkét esetben felbontjuk a szorzókat részekre (componensekre) és ezeket szorozzuk egymással, összeadás végett.

21. Nem-folytonos functionálok. A nem-folytonos functionálok közül a physikában, úgylátszik, nagy szerepre számíthatnak azok, melyeket LÉVY¹ magasabbrendűen folytonosaknak nevez. Ez értelmezés szerint az eddig egyszerűen folytonosnak minősített functionál nullad-rendűen folytonos. Elsőrendűen (helyesebben —1 rendűen) folytonos $U(f)$, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f_n) = U(f)$ csak akkor áll fenn, mikor nemcsak egyenletesen $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, hanem még egyenletesen $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$. Feltételezi ez az értelmezés természetesen, hogy a függvényváltozó tartománya a deriválható függvények osztályára van korlátozva, k -ad fokúan folytonos $U(f)$, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f_n) = U(f)$ csak akkor áll fenn, mikor egyszerre (még pedig egyenletesen)

¹ PAUL LÉVY: Sur les équations intégrales différentielles définissant des fonctions de lignes. Théses-Paris. 1911. és Journal de Polytechnique 1912.

$$\lim_{n=\infty} f_n = f, \quad \lim_{n=\infty} f'_n = f', \dots, \quad \lim_{n=\infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}.$$

Legegyszerűbb példa az ilyen összefüggésre

$$U(f) = \int_a^b f^{(k)}(x) dx$$

integrál, vagy általánosabban

$$\int_a^b F(f, f', \dots, f^{(k)}) dx$$

a variatio-számításból jól ismert kifejezés.

Az általunk bevezetett integrál segítségével minden k -ad fokúan folytonos funktionál mint véges számú

$$\int_E f^{(k)}(x) da_1, \quad \int_E \int_E f^{(k)}(x_1) f^{(k)}(x_2) da_2(e^1, e^2), \dots$$

integrál összegének limese írható.

Kiírjuk a bizonyítást $k=1$ esetre. Ilyenkor $U(f)$ functionált természetesen oly $f(x)$ függvények tartományában vizsgáljuk, melyeknek E halmaz minden pontjában van deriváltjuk s az így előálló $f'(x)$ korlátolt. De $f'(x)$, mint $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ határfüggvénye, legfeljebb első osztályú szakadásos függvény¹ s így LEBESGUE értelmében integrálható,² sőt, ugyancsak LEBESGUE egyik tétele szerint³

$$f(x) = \int_0^x f'(x) dx,$$

azaz

$$U(f) = U\left(\int_0^x f'(x) dx\right) = V(f')$$

és V már közönséges értelemben folytonos functionálja argumentumának. Tételünk tehát erre az esetre, s ugyanígy a többire is, bizonyítva van.

¹ BAIRE: Leçons sur les fonctions discontinues (Borel Collectio), Paris, 1905, p. 126.

² LEBESGUE: Leçons sur l'intégration (Borel Collectio), Paris, 1904. p. 111.

³ Ibid. p. 120.

A nem-folytonos functionálokat különben hasonló módon osztályozhatjuk, mint BAIRE ¹ osztályozta a nem-folytonos függvényeket; bár éppen az integrálfogalom itt adott általánosítása folytán a megkülönböztetés a folytonos és nem-folytonos függvény vagy functionál között sem lényeges; annál kevésbbé lényeges az egyes nem-folytonos függvény- vagy functionál-osztályok között.

Eredményeink kiterjesztése az n dimenziós tér pontjaira semmi nehézséggel sem jár, még a jelzéseket sem kell módosítanunk, mert e jelenti az (x_1, x_2, \dots, x_n) coordinátájú pontok bármilyen halmazát és P , vagy akár x jelölheti az n számú független változó egyik értékrendszerét, úgy hogy $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kifejezést írhatjuk $f(P)$ vagy akár $f(x)$ alakban.

Ha pedig functionálunk nem számot, hanem függvényt rendel függvényhez, az eredményfüggvény egyetlen, különben bármelyik értékét fixálva, függvényhez számot rendelő összefüggésre jutunk s így azt a fentiek szerint integráljainkkal előállíthatjuk. Az eredményfüggvény független változója x , tehát mint parameter lép be képleteinkbe, hol ennélfogva $\alpha(e^1, e^2, \dots, e^n)$ helyébe $\alpha(x, e^1, e^2, \dots, e^n)$ teendő.

Ugyanily egyszerű a kiterjesztés több függvényváltozós functionálra is a polylineáris integrálok segítségével, melyek már maguk is több függvényváltozós functionálok. Ha ugyanis ezekben megfelelő számú $f_i(x)$ függvényt és integrálási tartományait is egyenlővé tesszük:

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_{k_1}(x); & \quad E_1 = E_2 = \dots = E_{k_1} \\ f_{k_1+1}(x) = f_{k_1+2}(x) = \dots = f_{k_2}(x); & \quad E_{k_1+1} = E_{k_1+2} = \dots = E_{k_2} \\ & \dots; \dots \end{aligned}$$

s ha ilyen integrálokat megfelelő számban összeadunk, megkapjuk az általános, több függvényváltozós, *homogén* functionál-polynomot, majd ezek összegeként az általános, nem homogén polynomot, végül pedig ilyenek limeseként a több változós folytonos (vagy a fenti értelemben szakadásos) functionál általános integrál előállítását.

Mindezeket összevetve az integrálfogalom megfelelő általáno-

¹ BAIRE, idézett mű 126. l.

sításában sikerült megadnunk a functionálegebra kiépítéséhez elsőrendben szükséges eszközt, tudniillik a közönséges és a functionál polynom analogiáit s ezzel az utóbbinak szerkezeti sajátosságait teljes mértékben feltüntető formalismust, sőt a functionálok TAYLOR-sorában a functionálegebrát túlhaladó elméletek megindításához is megvan a pontos matematikai szerszámunk. S ha a TAYLOR-sor convergentia-tartományának szerepére gondolunk a differentiál-egyenletek megoldásainak existencia- és más kérdéseiben, látjuk, hogy vizsgálataink mily következményesek lehetnek a functionál-elméletben megindult s a differentiál-egyenleteknek megfelelő functionálderiváltú egyenletekre irányuló másik kutatásirány pontos matematikai megalapozásában is. Ezt a kérdést a következő részben fogjuk tárgyalni.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1915 június 14.-én tartott üléséből.)

A GÉGEBEIDEGZÉS PROBLÉMÁI.

ÓNODI A. lev. tagtól.

Kísérleteken alapuló ismereteink a gége központi és körzeti beidegzését illetőleg, valamint emberen a kóros jelenségekre vonatkozó kórtani ismereteink, sok kérdést nyitva, megoldatlanul hagytak. Röviden összefoglaljuk elsősorban a központi beidegzésre vonatkozó kísérleti tényeket és a klinikai megkórtani észleléseket.

I. Központi beidegzés.

Már FÉRIER¹ észlelte kutyán a harmadik és negyedik agytekervény elülső érintkezési helyének ingerlésére a száj megnyitását és a nyelv mozgását, sőt hangadást és gyenge kísérletet ugatásra. DURET² azt találta kutyán, hogy a harmadik agytekervény eltávolítása után nem tudott ugatni. KRAUSE³ állapította meg a gége beidegzésének kéregközpontját a gyrus praefrontalisnak elnevezett agytekervényben. E kéregrésztlet izgatására nemcsak a gégeizmok összehúzódását, a hangrészlet záródását látta, hanem a garat és a légyszájpad izmainak összehúzódását is. A hangszalagok közeledésének, a hangrészlet záródásának központját a KRAUSE által megjelölt kéregrésztletben SEMON és HORSLEY⁴ is konstataálta. Az egyoldali izgatás kétoldali hatással jár. Az egyoldali kiirtásnak negativ eredménye van. Az egész félteke kiirtása után légzéskor jól kitérnek a hangszalagok, míg az épen hagyott félteke kéregközpontjának izgatására a hangszalagok erősen közelednek. A kéregközpontok rostjai a corona radiata és a capsula interna területén vehetők fel, egyoldali

izgatás mindig kétoldali hatással jár. A KRAUSE által megállapított kéregközpontot megerősítették kísérleteikkel MOTT,⁵ MASINI,⁶ ÓNODI,⁷ BROECKAERT,⁸ KLEMPERER⁹ és KATZENSTEIN.¹⁰ FRANCOIS FRANK¹¹ ezt a tényt tagadásba vette. MASINI azonban ezenfelül azt találta, hogy ha gyenge árammal az egyik kéregközpontot izgatta, akkor az ellenoldali hangszalag közeledő mozgása következett be. MASINI ez állításáról SEMON,¹² ÓNODI¹³ és KLEMPERER¹⁴ nem tudott meggyőződni. GOLTZ¹⁵ három kutyán teljesen eltávolította mind a két agyféltekét és az állatokat életben tartotta. A megfigyelt állatokon a hangképzés semminemű elváltozást sem mutatott. ÓNODI¹⁶ az egyik vagy mindkét kéregközpont kiirtása után a hangszalag mozgásaiban és a hangképzésben nem észlelt elváltozást. Hasonló eredményre jutott KLEMPERER¹⁷ is, BROECKAERT¹⁸ sem tudott maradandó elváltozást a hangképzésben észlelni, a mennyiben az ugatás csak néhány hétre szűnt meg. ARONSOHN¹⁹ mindkét kéregközpontot kiirtotta és a hangképzés már a 13. napon újra beállott. KATZENSTEIN²⁰ a kéregközpontok kiirtása után szintén nem látott zavart a hangképzésben, mihelyt az állat a műtét után összeszedte magát. KRAUSE már első közlésében említi, hogy a kéregközpontok kiirtása a hang részleges vagy teljes elveszését eredményezi, újabb kísérleteiben a hangtalanság öt hónapig állott fenn. IVANOW²¹ egy kísérletében a mindkét kéregközpont kiirtása után 36 napig életben tartott kutya nem tudott ugatni.

ÓNODI²² egy kísérleti sorozatban elválasztotta az ikertelepeket az agyvelőtől, valamint az ikertelepeket bizonyos magasságban a nyúltvelőtől; kísérletei arra az eredményre vezettek, hogy kutyán létezik még egy hangképző központ egy 8 mm hosszú területen, mely magába foglalja a hátulsó ikerdombokat és a negyedik agykamara fenekének megfelelő részét. E terület ép-ségben hagyása mellett megvan a hangképzés és a hangszalagok közeledő mozgása, viszont megszűnik a hangképzés és a hangszalagok közeledése, ha e jelzett terület összeköttetése lefelé megszakíttatik. Ez utóbbi esetben a hangszalagok belégző mozgásai, tehát kitérésük és a hangrés tágitása sértetlenül maradt vagus-magvak önműködése folytán következnek be. A vagus-magvak ez önműködését a nyúltvelőn végzett harántmetszé-

sekkal már GROSSMANN²³ és SEMON-HORSLEY²⁴ is kimutatta. BECHTEREW²⁵ az ikertelepek elroncsolása után a hang elveszését észlelte és újabb vizsgálatai²⁶ alapján megerősítette ÓNODI kísérleti eredményeit.

IVANOW²⁷ a thalamus opticus hátulsó-oldalsó részletének és a hátulsó ikerdomboknak villamos ingerlésére ugyanazokat a jelenségeket észlelte, mint a kéregközpontok villamos ingerlésekor. Egy esetben, midőn a jobboldali kéregközpontot kiirtotta és az állatot 40 napig életben tartotta, a másodlagos elfajulás jeleit találta, melyeket a capsula internán, az oldalsó thalamus-magon, a substantia nigrán át a mediális hurokban és a loborpályán egészen a nyúltvelőig, a vagus magvak területéig követhetett.

ÓNODI²⁸ torzszülötteken és perforált újszülötteken tett észleletei négy esetre vonatkoznak; az illetők életükben hangot adtak. Egy anencephalus 61 óráig élt és hangot adott, egy másik torzszülött haematomeningoencephalocèle-vel egy napig élt és hangot adott. Egy perforált újszülött, kiben a hátulsó ikerdomb és a hid ép maradt, a műtét után hangot adott, s egy másik perforált újszülött, kiben a nagy agyvelő lett elválasztva a nyúltvelőtől, a műtét után szintén hangot adott. FAVRE²⁹ is tesz említést egy perforált, hangot adó újszülöttről. ARNOLD³⁰ egy három napig élő hemicephal torzszülötten észlelt hangadást. A hangot adó torzszülötten és perforált újszülötteken a nyúltvelő, illetve a negyedik agykamara feneke jól ki volt fejlődve, illetőleg nem sérült meg az ikerdombok területéig. KEHRER³¹ perforált újszülöttje nem adott hangot, de légzett; KEHRER kísérletet végzett, a mennyiben a nyúltvelőt a calamus scriptorius közepén átmetszette, minden hatás nélkül, egy újabb mélyebb metszésre aztán a légzés megszűnt. DARVAS³² esetében egy anencephalus három napig élt és hangot nem adott, a nyúltvelő a kilencedik és a tizedik agyideg kilépése helyéig volt megtartva.

Ez az utóbbi két eset összhangzásban áll ÓNODI kísérleti eredményével, nevezetesen, hogy a vagus-magvak felett a nyúltvelő átmetszésére nincs hangképzés.

KATZENSTEIN³³ vizsgálatai megerősítették MASINI említett észleletét, mely szerint a kéregközpontnak gyenge árammal való

izgatása az ellenoldali hangszalag közeledő mozgását eredményezi. KATZENSTEIN a kéregközpont unipoláris izgatásával az ellenoldali hangszalag adductióját érte el, míg bipoláris ingerlésre mindkét hangszalag a középvonal felé közeledett. BROECKAERT ³⁴ három esetben az ellenoldali hangszalag mozgását észlelte. RISIEN RUSSEL ³⁵ az alsó gégeideg hangréstszükitő és hangrést-tágító kötegeit elkülönítette és a hangréstszükitő idegkötegek kikapcsolásával a hangképző kéregközpont ingerlésére a hangszalagok légző, illetve kitérő mozgásai következtek be. KATZENSTEIN ³⁶ a hangréstszükitő idegkötegek kikapcsolásával a gyrus praefrontalis ingerlésére a hangrés tágulását észlelte, de ez a kitérő mozgás kevésbé volt erős, ha a felső gégeidegek épek maradtak. Az alsó gégeidegek átmetszése után a kéregközpont ingerlésére a hangszalagok erősen megfeszültek. Továbbá a homloklebeny közepének és a gyrus centralis anteriornak ingerlésével a légzést tudta befolyásolni. A homloklebeny közepének ingerlésére mély belégzés, kilégzéssel és tüsszenéssel következik be, a gyrus centralis anterior alsó leszálló részletének izgatása rövid belégzést és erőteljes kilégzést hangképzéssel von maga után. A gyrus centralis anterior jelzett részletének baloldalon történt elpusztítására a jobboldali hangszalag valamivel mélyebben állott, szaggatott közeledő mozgást tett és a jobb gégefél érzékenysége csökkent. Kétoldali kiirtásra ezek a változások mindkét hangszalagra kiterjednek. GRABOWER ³⁷ és KALISCHER ³⁸ KATZENSTEIN kísérleti eredményeit ellenőrizte és megerősítette azt, hogy a gyrus centralis anterior ingerlése elaltatott kutyán hangképzéssel jár. LEWANDOWSKI ³⁹ vizsgálatai alapján következőleg nyilatkozik: «Wir selbst haben nach umfangreichen Zerstörungen des Vorderhirns bei einigen Hunden eine Parese der gegenüberliegenden Stimmbänder gesehen, im Sinne einer mangelnden Spannung bei der Phonation. Bei der Mehrzahl der Hunde aber haben wir solche einseitige Störungen trotz genau gleich umfangreicher Verletzungen völlig vermisst.»

KLEMPERER ⁴⁰ egy kísérletében a hátulsó ikerdomb mögött 1 mmnyire metszette át a negyedik agykamara fenekét és hangképzést talált, ez a metszés nem kapcsolta ki az ÓNODI által

megjelölt hangképző területet. Éppenigy nem kifogástalanok GRABOWER⁴¹ kísérletei, melyek a hátulsó ikerteleptől 14--16 milliméternyire helyezik el a hangképző területet. PROTA⁴² kutyán az egyik hangszalagot teljesen kiirtotta és az állatot néhány hónapig életben tartotta. Azután mindkét hangképző kéregközpontot GOLGI és NISSL eljárása szerint szövettani vizsgálat tárgyává tette és mindkét központ elváltozását állapította meg.

ROTTMANN⁴³ szerint a gerinczvelő átmetszése az első és második nyaki segmentumban a hang teljes rekedtségét eredményezte kutyákon. A rekedtség 4—6 hét után megszűnt. Felvesz vagusösszeköttetéseket, melyek a második nyaki segmentumig leérnek. Hivatkozik WAGNER és STOLPER esetére, hol atlasdislocatio és epistropheustörés az első három nyaki segmentum szürke állományának vérzését és a hangképzés zavarát okozta. Ez esetből is következtet emberen a felső nyaki segmentumok és a gégebeidegzés közötti viszonyra. ROTTMANN és KATZENSTEIN⁴⁴ kutyákon végzett kísérleteik alapján a gégebeidegzés, az alsó állkapocsizomzat és a hangképzés központját a lobus anterior cerebelli alsó részének kérgébe helyezik. A hangszalagmozgások zavarait az elülső agyacsászár (brachium conjunctivum) átmetszése is okozza. A nagyagy kéregközpontjainak és az agyacsközpontnak elpusztítása után 6—8 hétig a kutyák hangadásra képtelenek voltak és ha életben maradtak, 3 hónap múlva újra tudtak ugatni. GRABOWER⁴⁵ kísérletei alapján tagadásba veszi a ROTTMANN és KATZENSTEIN által megjelölt agyacsközpontot; szerinte ha a hangszalagmozgások coordinációs központja az agyacsban van, a mit valószínűnek tart, annak az agyacsnak más helyén kell lennie.

Az elmondottakból levonhatunk tényeket, egyes még eddig nem ellenőrzött észleleteket és vitás kérdéseket.

A) Tények.

1. Kutyán a gyrus praefrontalisban van a hangképző kéregközpont. (KRAUSE, SEMON-HORSLEY, MOTT, ÓNODI, MASINI, BROECKAERT, KLEMPERER, KATZENSTEIN).

2. Az egyoldali hangképző kéregközpont izgatása kétoldali hatással jár. (SEMON-HORSLEY és a *centric*).

3. Kiirtott féltekékkel életben tartott kutyák hangot tudnak adni (GOLTZ, ROTTMANN).

4. A hangszalagok belégző mozgásait a sértetlenül maradt vagus-magvak önműködése teszi lehetővé (GROSSMANN, SEMON-HORSLEY, ÓNODI). Ezt a tényt perforált újszülötton végzett kísérlet is megerősíti (KEHRER).

5. Emberi anencephalusok és emberi perforált újszülöttek sértetlen nyúltvelővel hangot adnak (FAVRE, ARNOLD, ÓNODI).

B) *Egyedül álló észleletek.*

1. ROTTMANN a gerinczvelő első és második nyaki segmen-tumának átmetszése után teljes rekedtséget észlelt.

2. PROTA az egyik hangszalag kiirtása után hónapok mulva mindkét kéregközpont elváltozását észlelte, miből mindegyik köz-pontnak egyenes és keresztezett idegpályáira következtetett.

3. IVANOW a jobboldali kéregközpont kiirtása után 40 nap mulva a másodlagos elfajulás jeleit találta és követhette az oldalsó thalamus-magon, a substantia nigrán, a mediális hurkon, a loborpályán át a vagusmagvak területéig.

C) *Vitás kérdések.*

1. A hangképző kéregközpontok kiirtása az egyik és mindkét oldalon:

a) nem zavarja a hangképzést és a hangszalag mozgásait (SEMON-HORSLEY, ÓNODI, KLEMPERER), b) a hangképzés visszatér, a mint az állat a műtét után összeszedi magát (KATZENSTEIN), néhány hét mulva (BROECKAERT), c) részleges vagy teljes hang-elvesztéssel járt (KRAUSE), 36 napig (IVANOW), 13 napig (ARONSOHN) az állat nem tudott ugatni.

IVANOW 40 napig élt kutyán a kéregközpont kiirtása után a másodlagos elfajulás jeleit követhette a capsula internán, az oldalsó thalamus-magon, a substantia nigrán, a mediális hurkon, a loborpályán át a vagus-magvak területéig.

2. Az egyik kéregközpont ingerlése a) az ellenoldali hangszalag közeledő mozgását eredményezi (MASINI, KATZENSTEIN,



egyes esetekben BROECKAERT), *b*) e kísérleti jelenségről meggyőződni nem tudtak (SEMON, ÓNODI, KLEMPERER), *c*) a hangrészt szűkítő idegkötegek kikapcsolásával az egyik gyrus praefrontalis ingerlésére a hangrés tágulása, vagyis a hangszalagok kitérő mozgása következik be (RISIEN RUSSEL, KATZENSTEIN).

3. A gyrus centralis interior egyoldali kiirtása az ellenoldali hangszalag mozgási és érzési zavarait okozza (KATZENSTEIN), egyes esetekben az ellenoldali hangszalag paresise áll be, az esetek többségében zavart nem okoz (LEWANDOWSKI), ellenoldali hangszalaghűdés nem következik be (BROECKAERT).

4. *a*) Az ikertelepek és a negyedik agykamara feneke felső részlete között levő subcerebrális hangképző központ kiküszöbölésével megszűnik a hangképzés és csak a légzés áll fenn; az agytörzstől való elválasztása után a hangképzés is megmarad (ÓNODI, BECHTEREW, IVANOW), *b*) ennek ellene nyilatkoznak (KLEMPERER, GRABOWER).

5. *a*) A hangszalagmozgások agyacszközpontja a lobus anterior cerebelli alsó részének kérge (ROTTMANN és KATZENSTEIN), *b*) ennek ellene nyilatkozik GRABOWER.

A nyílt kérdések e sorozata mutatja, milyen távol állunk még a központi gégebeidegzés kísérleti tanának teljes felépítésétől és hogy újabb és nagyszámú ellenőrző kísérletekre és hosszú ideig életben tartott állatokon korszövettani vizsgálatokra van szükségünk. Ez okból nem is bocsátkozunk az ellentmondó adatok részletes bírálatába, mely úgysem vezetne célhoz, minthogy csakis újabb szigorú ellenőrző vizsgálatok és kifogástalan kutatások lesznek hivatva a központi gégebeidegzés szövevényes és bonyolult tanát véglegesen tisztázni és felépíteni.

Röviden áttekintjük ezek után a klinikai észleleteket, vizsgálva, hogy mennyiben hozhatók összhangzásba a kísérleti eredményekkel. A klinikai észleletek első csoportjában hiányzik a kórbonczrtani lelet. Az idetartozó esetek a következők: GRIB⁴⁶ vérömlenyos hemiplegiánál féloldali hangszalaghűdést talált, úgyszintén egyes esetekben LÖRI;⁴⁷ SEMON⁴⁸ és LERMOYEZ⁴⁹ vérömlenyos hemiplegia eseteiben a hangképzésben és a hangszalagok mozgásaiban semminemű elváltozást sem észlelt. LEWIN⁵⁰ egy esetben a bal hangszalag hűdését találta a középvonalban való

rögzített helyzetben. GERHARDT⁵¹ az agyvelő idült megbetegedésének eseteiben féloldali hangszalaghűdést észlelt. ZIEMSEN⁵¹ hemiplegia egy esetében féloldali paresist látott. CARTAZ⁵³ jobb-oldali hemiplegia esetében a jobboldali hangszalagot a hullaállásban rögzítve hűdöttnek találta. GAREL⁵⁴ hemiplegia két esetében ugyanazon oldali hangszalag hűdését észlelte. SCHRÖTTER⁵⁵ vérömlenynél is talált hangszalaghűdést. MANCIOLI⁵⁶ hemiplegia két esetében talált hangszalaghűdést, mindkét esetben keresztezett baloldali hangszalaghűdés volt jelen hullaállásban. Ez esetekben a mozdulatlan hangszalag vagy hullaállásban, vagy mediánállásban volt található.

A klinikai észleletek második csoportjában megvan a kórbonecztni vizsgálat, de hiányzik a gégetükrészeti lelet. Ide tartoznak a következő esetek: DUVAL⁵⁷ aphasia és aphonia esetében a bal homloklebeny elülső részében talált vérömlenyt. FOVILLE⁵⁸ a jobboldali tekervények elváltozását találta. LUYE⁵⁹ esetében a nagy agydúcokon kívül elváltozások voltak a gége idegeiben és izmaiban. LIVIO RONCI⁶⁰ vérömlenyos rohamot követően beállott hangtalanság esetében a homloktekervényekben ellágyulási góczokat talált. LEGUIN⁶¹ a jobboldali harmadik homloktekervény sérülését látta bal hemiplegia és hangképzési zavarok mellett. FULLER és BROWNING⁶² a nagy agydúcok körül a lencsemagvakban talált elváltozást. BEURMANN⁶³ esetében a jobboldali külső tokban és a bal felhágó falitekervény fehérállományában voltak vérömlenyos góczok.

A klinikai észleletek harmadik csoportjában megtaláljuk a gégetükrészeti leletet és a kórbonecztni vizsgálatot is. Ide tartoznak a következő esetek: Előzőleg meg kell említeni BRYSON DELAVAN⁶⁴ esetét, melyben a körjelzés téves voltát csak a kórbonecztni lelet mutatta ki. A bal hangszalagnak a középvonalban való rögzítését az agyvelő elváltozásából magyarázta, midőn a boneczoláskor kitűnt, hogy a bal bolygóideg nyúltvelői magva el volt ronsolva és ez adta a hűdés valódi okát. WALLENBERG⁶⁵ esetében a baloldali arcz, nyelv és garat hűdése mellett a bal hangszalag teljes hűdése állott fenn. A boneczoláskor a jobb homloklebeny fehér állományának ellágyulása volt jelen, azonfelül a bolygóideg gyökerei hártvás izzadmánytól voltak körül-

véve. ROSSBACH⁶⁶ esetében a bal arcz és a nyelv hűdése mellett a bal hangszalag is hűdött volt, mely hangzáskor mozdulatlanul a belégző helyzetben maradt. A bonczoláskor kitűnt, hogy a jobb sziget, a két központi tekervény áthajló része és a második falitekervény alsó része sorvadt. A belső tok és a bal bolygóideg, valamint a gége izmai épek voltak. A nyelvvalatti ideg nyúltvelői magva elváltozást mutatott. REBILLARD⁶⁸ esetében a jobb hangszalag volt hullaállásban. A bonczoláskor a harmadik homloktekervény alján baloldalt vérömleny volt található, a jobboldalon a második és harmadik homloktekervényen daganat volt jelen. A nyúltvelőben a bolygóideg magvai, valamint a gégeideg nem voltak vizsgálat tárgya. GAREL⁶⁸ jobboldali hemiplegia, jobboldali arczhűdés és aphasia esetében a bal hangszalagot hullaállásban hűdve találta. A bonczoláskor kitűnt, hogy a bal agyféltekén több ellágyult kéreggóc, a jobb agyféltekén a harmadik homloktekervény vörös ellágyulása volt jelen. A nyúltvelői idegmagvak, valamint a gége idegeinek vizsgálata elmaradt. GAREL és Dor⁶⁹ egy esetben a bal hangszalagot hullaállásban rögzítve találta. A bonczolás jobboldalt a lencsemagban kis vörös ellágyulási gócot mutatott, mely egy-két milliméternyire belenyúlt a belső tok külső részébe. A gégeidegek görcsövíleg épek mutatkoztak. MÜNZER⁷⁰ egy nőn baloldali hemiplegia, nyelési nehézségek és beszédzavarok mellett mindkét hangszalagot hűdve, hullaállásban találta. A bonczoláskor jobboldalt a felső homloktekervény hegyén és baloldalt a két központi tekervény összefolyása helyén egy-egy borsónyi, sárgás-zöldes beszüremkedés találtatott, mely a szürke állomány közepéig terjedt. Azonfelül jobboldalt a lencsemag külső tagjában csikyszerű, baloldalt a csikolt test fejében pedig két babnyi ellágyulási góc találtatott. A nyúltvelőben csupán a nyelvvalatti ideg magvaiban volt sorvadás kimutatható. Azonkívül a hátulsó négy telep leghátulsóbb részének megfelelően egy kölesnagyságú kóros, sklerosisos hely volt jelen. DÉJERINE⁷¹ jobboldali hemiplegia és aphasia esetében a jobb hangszalagot hullaállásban rögzítve találta. A bonczoláskor baloldalt a Broca-féle tekervény és a sziget, valamint a kéreg általában épek mutatkozott, a fehér állományban azonban több ellágyulási góc találtatott. A nyúlt-

velői idegmagvak és a bolygóideg gyökerei épek voltak. DÉJERINE második esetében hemiplegia és aphasia mellett a jobb hangszalagot hullaállásban találta. A bonczoláskor kitűnt, hogy baloldalt a kéreg ép, a fehér állományban azonban a harmadik homloktekervény alatt egy ellágyulási gócz volt. A bal lobar-köteg másodlagos elfajulásban, a nyúltvelői idegmagvak és a bolygóideg gyökerei teljes épségben találtattak. EISENLOHR⁷² esetében kétoldali mozgási zavarok voltak jelen az alsó végtagokban, hangtalanság mellett; hangoztatáskor a bal hangszalag mozdulatlan, a jobb keveset mozog, légzéskor nincsen eltérés. Bonczoláskor a látótelepek hátulsó harmada elroncsolva, a belső tok hátulsó részletei részlegesen elfajulva mutatkoznak, továbbá kis ellágyulási góczok vannak a jobb homloklebeny elülső részletében és a bal belső tok elülső szárában. A gégeidegek a nyúltvelőben és a körzeten épek. PITT⁷³ esetében két apoplexiás roham után először jobb-, azután baloldali hemiplegia állott be. A hangképzés megszűnt, de ebben az állapotban hiányzik a gégelelet. Később a hangképzés visszatért, de a gégevizsgálat nem mutatott eltérést. Bonczoláskor mindkét lencse-magban és a belső tok hátulsó részeiben ellágyulási góczok találtattak. A híd és nyúltvelő góresővileg épnek mutatkozott. MASINI⁷⁴ apoplexia két esetében az egyik hangszalag hűdését észlelte. Az egyik esetben a bonczoláskor a felszálló homloktekervény alapján és felső felében elváltozás volt jelen. ROQUE és CHARLIER⁷⁵ esetében a jobb hangszalag medián állásban volt rögzítve, a bonczoláskor ellágyulási gócz volt található a fali lebenyben. ATTLÉE és MILLS⁷⁶ bal hangszalaghűdést észlelt medián állásban, a klinikai tünetek agydaganat mellett szóltak, a mit a műtét be is igazolt, a jobboldalon a plexus chorioideusból kiinduló daganat a præcentralis tekervény alsó területét érintette.

Mint láttuk, ROSSBACH esetében a jobb sziget elváltozásával járt a bal hangszalag hűdése. REBILLARD esetében a bal harmadik homloktekervény és a jobb második homloktekervény elváltozása mellett a jobb hangszalagot találjuk hűdve. GAREL esetében a bal hangszalag van hűdve és elváltozás van a jobb harmadik homloktekervényben és a bal agyféltekében, GAREL és DOR eseté-

ben a bal hangszalag hűdött és elváltozás a jobb lencse-magban és a belső tok külső részén van. MÜNZER esetében mindkét hangszalag Lűdött, de kiterjedtebb elváltozások vannak a jobb felső homloktekervényben és baloldalt a központi tekervények összefolyása helyén, a jobb lencse-magban és a bal csikolt testben, továbbá a híd felső részében. EISENLOHR esetében mindkét hangszalag hűdött a látótelepek és a belső tokok hátulsó részeinek, továbbá a jobb homloklebeny elülső részének és a bal belső tok elülső szárának elváltozásával. PITT esetében a lencse-magvak és belső tokok hátulsó részeinek elváltozása mellett a hangszalagok nem mutatnak eltérést. MASINI esetében a homloktekervény elváltozásával keresztezett hangszalaghűdés jár. A hűdéssel járó aphasia számos esetében a hangszalagok részéről elváltozás nem volt észlelhető, az említett esetekben pedig egyrészről egyoldali keresztezett hangszalaghűdés, másrészről a hullaállásban és medián állásban való rögzítettség volt található. A klinikai észleletnek, a pontos gégetükrészeti lelet mellett, a beállott halál után megejtett kórbonczatani vizsgálattal együtt csak úgy lehet komoly értéke, ha ez utóbbi nemcsak az agyvelőre és a nyúltvelői idegmagvakra, hanem a gége idegeinek törzseire és az egyes gégeizmokhoz menő idegágakra és a gége egyes izmaira úgy kórbonczatani, mint kórszövettani irányban lesz kiterjesztve. És midőn ezt a feltételt kell a klinikai észlelet kórtani értékesítésénél odaállítani, sajnálattal kell megállapítanunk, hogy ilyen-nel egyáltalában nem rendelkezünk.

OPPENHEIM⁷⁷ a klinikai észleleteket szintén bizonytalan értékűnek állítja oda, azonban felveszi, hogy emberben is az elülső központi tekervény alján van a központ, mely mindkét oldali, különösen az ellenoldali hangképző izmokkal áll összefüggésben. MONAKOW⁷⁸ a harmadik homloktekervény hátulsó részében veszi fel a hangképző központot. MONAKOW annak a gyanujának is ad kifejezést, hogy a kettősen működő izmokat túlnyomóan subcorticalis központok idegzik be és csupán gyenge mértékben a kéregközpontok.

A hangképző központokra vonatkozó kísérleti ismereteink a kórtani és a nagyon hézagos klinikai észleletekkel összhangzásba nem hozhatók, és az állatkísérletek, valamint a klinikai észlele-

tek eredményei ez idő szerint még nem alkalmasak arra, hogy emberen kórtani következtetésekre és kórtani törvények felállítására alapul szolgáljanak.

A háború folyamán történt nagyszámú fejlődés, agysérülés, az agyhártyák és az agyvelő genyedései, a mint az eddigi észlelések, közlemények és szóbeli közlések mutatják, a központi gégebeidegzés bonyolult és szövevényes tanának tisztázásához nem járultak hozzá.

Irodalom.

1. Fonctions stb. 1876.
2. Compt. rend. des séanc. de la Soc. de Biol. 1877.
3. Ueber die Beziehungen der Grosshirnrinde zum Kehlkopf und Rachen. Archiv f. Anatomie und Physiologie. 1884.
4. Ueber die Beziehungen des Kehlkopfes zum motorischen Nervensystem. Deutsche med. Wochenschrift. 1890.
5. Brit. med. Journ. 1890.
6. Bolletino della malattie dell orecchio stb. 1893.
7. Anatomie und Physiologie der Kehlkopfnerven. Berlin, 1902.
8. État actuel de la question des paralysies récurr. XVI. Congrès intern. de Médecine. 1909.
9. Archiv f. Laryngologie. 1895.
10. XVI. Congrès intern. de Médecine. 1909.
11. Leç. sur le fonction mot. du cerveau. Paris. 1887.
12. Die Entwicklung der Lehre von den motorischen Kehlkopf-lähmungen stb.
13. I. m.
14. I. m.
15. PFLÜGER's: Archiv.
16. I. m.
17. I. m.
18. I. m.
19. Deutsche mediz. Wochenschrift. 1888.
20. I. m.
21. Neurologisches Zentralblatt. 1889.
22. I. m.
23. Archiv. f. Laryngologie.
24. I. m.
25. Neurologisches Zentralblatt, 1895.
26. Deutsche Zeitschrift f. Nervenheilkunde. 1900.
27. Neurologisches Zentralblatt. 1899.
28. I. m.

29. VIRCHOW's Archiv. 1895.
30. ZIEGLER: Beiträge zur Pathologie. II.
31. Zeitschrift für Biologie, 1894.
32. ÓNODI: i. m.
33. I. m.
34. I. m.
35. BROECKAERT: i. m.
36. I. m.
37. KATZENSTEIN: i. m.
38. " i. m.
39. Funktionen des zentralen Nervensystems, 1907.
40. I. m.
41. Archiv f. Laryngologie, 1896.
42. Centralblatt f. Laryngologie, 1907.
43. Mediz. Klinik, 1911.
44. Beiträge zur Anat., Phys., Path. u. Ther. des Ohres, der Nase
und des Halses, 1912.
45. Arch. f. Laryngologie Bd. 26.
46. ZIEMSSSENS Handbuch. Bd. IV.
47. A gége és légcső elváltozásai stb., 1885.
48. I. m.
49. Bulletins et mémoires de la société française d'otol., de laryng
etc. 1897.
50. Berliner klinische Wochenschrift, 1874.
51. Archiv. f. pathol. Anat. Bd. XXVII.
52. I. m.
53. France médic. 1895.
54. Annales des maladies de l'oreille stb., 1886.
55. Allgem. Wien. med. Zeitung, 1882.
56. BROECKAERT: i. m.
57. Bull. de la Soc. de chirurgie. 1864.
58. Gazette hebdomadaire, 1863.
59. Annal. des mal. de l'oreille stb., 1875.
60. LERMOYEZ: i. m.
61. Transactions of the neur. Assoc., 1877.
62. The med. Record, 1887.
63. Archives générales de médecine, 1876.
64. The med. Record, 1885.
65. Intern. Centralblatt f. Laryngologie.
66. Deutsches Archiv f. klin. Med. 1890.
67. LERMOYEZ: i. m.
68. Annal. des mal. de l'oreille stb. 1886.
69. " " " " " " 1890.
70. Prager med. Woch. 1890.

- 71. Société de biol. 1891.
 - 72. Beitr. z. Hirnlocal. Deutsche Zeitschrift für Nervenheilkunde,
1891. Bd. 1.
 - 73. Intern. Centr. f. Laryngologie B. X, XI.
 - 74. " " " 1908.
 - 75. " " " 1907.
 - 76. BROECKAERT: i. m.
 - 77. Lehrbuch der Nervenkrankheiten, 1913.
 - 78. OPPENHEIM: i. m.
-

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 nov. 22.-én tartott üléséből.)

INTERPOLATIÓRÓL.

(Első közlemény.)

FEJÉR LIPÓT 1. tagtól.

Bevezetés.

1. Jelentsenek x és y derékszögű DESCARTES-koordinátákat. Valamely görbét, melynek egyenlete

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k, \quad (1)$$

hol a_0, a_1, \dots, a_k valós állandók, k -adfokú parabolának nevezzünk. Ha $a_k \neq 0$, akkor az (1) görbe pontosan k -adfokú parabola.

Legyen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

n egymástól különböző abszcissa, és

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

n ordináta.

Az

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \quad (2)$$

pontokon keresztül végtelen sok $(2n-1)$ -adfokú parabola vezethető. Ezek egy n -dimenziós parabolasereget alkotnak. E parabolasereget röviden az $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ pontokhoz tartozó parabolaseregnek nevezzük.

E parabolaseregből kiemelünk két parabolát.

Az egyik a LAGRANGE-parabola. Ez a sereg ama parabolája, mely $(n-1)$ -adfokú. [Ismeretes, hogy van olyan $(n-1)$ -adfokú racionális egész-függvénye az x -nek, mely az

x_1, x_2, \dots, x_n helyeken rendre az y_1, y_2, \dots, y_n értékeket veszi fel, és hogy csakis egy van.]

A másikat, melyet a parabolaseregéből kiemelek, *lépcsőparabolának* nevezem. Értem ez alatt az $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ pontokon átvonuló $(2n - 1)$ -ed fokú parabolák közül azt, melynek ez $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ pontokhoz tartozó érintői mind párhuzamosak az abszcissatengellyel. [Ismeretes, hogy van olyan $(2n - 1)$ -edfokú racionális egész-függvénye az x -nek, mely az x_1, x_2, \dots, x_n helyeken rendre az y_1, y_2, \dots, y_n értékeket veszi fel és melynek differentiálhányadosa az x_1, x_2, \dots, x_n helyeken eltűnik. Ilyen $(2n - 1)$ -edfokú racionális egész függvény csak egy van.

2. « n pontból álló pontsoport»-nak nevezek n egymástól különböző, az abszcissatengelyen fölvevett pontot. «Pontsoport-sorozat»-nak nevezem a pontsoportoknak olyan végtelen sorozatát:

$$x_1^{(1)}, (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}), \dots, (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}), \dots, \quad (3)$$

melyben az n -edik pontsoport éppen n pontot tartalmaz. (Föltehetjük, hogy $x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}$.)

Legyen $f(x)$ az x valós változónak valamely függvénye, mely az $a \leq x \leq b$ intervallumban van értelmezve és ott korlátos. Jelöljön x_1, x_2, \dots, x_n egy n pontból álló pontsoportot az $a \leq x \leq b$ intervallumban. Ezeknek az abszcissáknak megfelelő ordinátákat jelölje röviden:

$$f(x_1) = f_1, \quad f(x_2) = f_2, \dots, \quad f(x_n) = f_n.$$

Legyen $y = L(x)$ ama LAGRANGE-parabola egyenlete, mely az $(x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ pontokon megy keresztül.

Legyen továbbá $y = G(x)$ annak a lépcsőparabolának az egyenlete, mely az $(x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ pontokon megy keresztül.

Vegyük fel most már egy (3) alatti pontsoport-sorozatot, mely az $a \leq x \leq b$ közben fekszik. E sorozat n -edik pontsoportjának feleljen meg az $y = L_n(x)$ egyenletű LAGRANGE-féle és az $y = G_n(x)$ egyenletű lépcsőparabola. Ilyen módon az

$$L_1(x), \quad L_2(x), \dots, \quad L_n(x), \dots \quad (4)$$

és a

$$G_1(x), \quad G_2(x), \dots, \quad G_n(x), \dots \quad (5)$$

racionális egész-függvények sorozatához jutunk. (Itt, ismétlem, $L_n(x)$ az az $(n-1)$ -edfokú racionális egész-függvény, mely az n -edik pontesort pontjaiban rendre ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint az $f(x)$ függvény, $G_n(x)$ pedig az a $(2n-1)$ -edfokú racionális egész-függvény, mely az n -edik pontesort pontjaiban szintén rendre ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint az $f(x)$ függvény, de azonfölül differenciálhányadosa e helyeken zérussal egyenlő.)

A (4) alatti LAGRANGE-féle parabolasorozat igen sok vizsgálat tárgya volt, melyek nagyon fontos és érdekes eredményekre vezettek.¹ [Itt föllépő nevezetesebb problémák: az $L_n(x)$ sorozat convergentiája és divergentiája, az $|f(x) - L_n(x)|$ határolása az $a \leq x \leq b$ intervallumban, az $\int_a^b L_n(x) dx$ számsorozat convergentiája és divergentiája, az $|\int_a^b f(x) dx - \int_a^b L_n(x) dx|$ határolása, stb.]

Én úgy vélem, hogy az (5) alatti lépcsőparabolák sorozata is méltó a figyelemre. E dolgozatomban ezekre vonatkozó vizsgálataim eredményeit fogom kifejteni. Legtöbbször arra a speciális esetre fogok szoritkozni, midőn a fölvett pontesort-sorozat a GAUSS-féle, vagyis midőn a sorozat n -edik csoportjának pontjait a

$$P_n(x) = 0$$

egyenlet gyökei szolgáltatják, hol $P_n(x)$ az n -indexű LEGENDRE-polynom.

1. §. A Lagrange-parabola és a lépcsőparabola.

3. Legyen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

n egymástól különböző érték. Állítsuk elő azt az $(n-1)$ -edfokú racionális egész-függvényt, mely e helyeken rendre az

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

értékeket veszi fel.

¹ Az idevágó irodalomra nézve l. Encyclopédie des sciences mathématiques etc., Tome I., volume 4, fascicule 1 : D. SELIVANOV, J. BAUSCHINGER, H. ANDOYER : Calcul des différences et interpolation. 1906.

A LAGRANGE-elv szerint e feladat a következőképpen oldható meg. Megoldjuk a feladatot a következő *specziális* esetre:

$$f_1=0, f_2=0, \dots f_{k-1}=0, f_k=1, f_{k+1}=0, \dots f_n=0.$$

A megoldás:

$$\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \quad (6)$$

hol

$$\omega(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n), \quad (7)$$

és C tetszőszerinti zérustól különböző állandó.

Most már a keresett $L(x)$ racionális egész-függvényt a következő formula szolgáltatja:

$$L(x) = \sum_{k=1}^n f_k \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \quad (8)$$

hol

$$\omega(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

E (8) alatti egyenlet adja meg az $(x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ pontokon átmenő LAGRANGE-parabolát.

4. Legyen ismét

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

n egymástól különböző érték. Állítsuk elő azt a $(2n-1)$ -edfokú racionális egész-függvényt, mely e helyeken rendre az

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

értékeket, és melynek deriváltja rendre az

$$f'_1, f'_2, \dots, f'_n$$

értékeket veszi fel.

Ez a feladat is a LAGRANGE-elv szerint oldható meg. Itt két specziális eset oldandó meg előzetesen.

Először legyen:

$$\begin{aligned} f_1=0, f_2=0, \dots f_{k-1}=0, f_k=1, f_{k+1}=0, \dots f_n=0, \\ f'_1=0, f'_2=0, \dots f'_{k-1}=0, f'_k=0, f'_{k+1}=0, \dots f'_n=0. \end{aligned}$$

A megoldás:

$$\left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right] \left[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right]^2. \quad (9)$$

Másodszor legyen:

$$\begin{aligned} f_1=0, f_2=0, \dots, f_{k-1}=0, f_k=0, f_{k+1}=0, \dots, f_n=0, \\ f'_1=0, f'_2=0, \dots, f'_{k-1}=0, f'_k=1, f'_{k+1}=0, \dots, f'_n=0. \end{aligned}$$

A megoldás:

$$(x-x_k) \left[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right]^2. \quad (10)$$

E szerint

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f_k \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right] \left[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right]^2 + \\ + \sum_{k=1}^n f'_k (x-x_k) \left[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right]^2, \end{aligned} \quad (11)$$

hol

$$\omega(x) = C(x-x_1) \dots (x-x_n),$$

az a $(2n-1)$ -edfokú racionális egész-függvény, mely az x_1, x_2, \dots, x_n helyeken rendre az f_1, f_2, \dots, f_n értékeket, melynek deriváltja pedig rendre az f'_1, f'_2, \dots, f'_n értékeket veszi fel.¹

A (11) alatti formula szolgáltatja az $(x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ pontokhoz tartozó n -dimenziós parabolasereget. A parabolasereget megkapjuk, ha e formulában f'_1, f'_2, \dots, f'_n egymástól függetlenül átfutják az összes valós értékeket.

5. Legyen most már

$$f'_1 = f'_2 = \dots = f'_n = 0.$$

Akkor a (11) alatti formula alapján nyerjük, hogy

$$G(x) = \sum_{k=1}^n f_k \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right] \left[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right]^2, \quad (12)$$

hol

$$\omega(x) = C(x-x_1) \dots (x-x_n),$$

¹ Így például CH. HERMITE: Sur la formule d'interpolation de Lagrange Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 84, 1878.

az a $(2n-1)$ -edfokú racionális egész-függvény, mely az x_1, x_2, \dots, x_n helyeken rendre az f_1, f_2, \dots, f_n értéket veszi fel, és deriváltja ugyanazokon a helyeken zérussal egyenlő. E szerint a (12) alatti egyenlet szolgáltatja az

$$(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$$

pontokon áthaladó lépcsőparabolát.

6. A (8) és (12) alatti interpolációs képletek így írhatók:

$$L(x) = \sum_{k=1}^n f_k l_k(x), \quad (13)$$

hol

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \quad (14)$$

$(k=1, 2, \dots, n),$

és

$$G(x) = \sum_{k=1}^n f_k g_k(x), \quad (15)$$

hol

$$g_k(x) = \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k) \right] \left[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} \right]^2, \quad (16)$$

$(k=1, 2, \dots, n).$

és mindkét esetben

$$\omega(x) = C(x-x_1) \dots (x-x_n).$$

Az

$$l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x)$$

függvényeket a (13) alatti LAGRANGE-interpoláció, a

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$$

függvényeket pedig a (15) alatti interpoláció *alapfüggvényeinek* nevezem. Az alapfüggvények, mindkét esetben, az x_1, x_2, \dots, x_n abszisszacsoporthoz tartoznak határozva.

Az *alapfüggvények összege mindkét esetben azonosan egyenlő az egységgel.*

Ugyanis ha $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 1$, akkor $L(x) \equiv 1$, e szerint a (13) alatti egyenlet alapján

$$l_1(x) + l_2(x) + \dots + l_n(x) \equiv 1. \quad (17)$$

Hasonlóképen, ha $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 1$, akkor $G(x) \equiv 1$, e szerint a (15) alatti egyenlet alapján

$$g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x) \equiv 1. \quad (18)$$

2. §. A lépcsőparabolák néhány tulajdonsága Gauss- abscissák esetében.

7. Legyen $f(x)$ az x valós változónak tetszésszerűen valós függvénye, mely a $-1 \leq x \leq +1$ számközben van értelmezve és ott korlátos.

Jelöljék x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < +1,$$

a

$$P_n(x) = 0$$

egyenlet gyökei, hol $P_n(x)$ jelenti az n -indexű LEGENDRE-polynomot. Az x_1, x_2, \dots, x_n helyeket GAUSS-helyeknek is fogom nevezni.

Legyen ismét röviden $f(x_k) = f_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$).

[Emlékeztetek itt arra a híres GAUSS-tételre, mely szerint ez esetben, midőn x_1, x_2, \dots, x_n az n -indexű LEGENDRE-polynom gyökei, az

$$(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n)$$

pontokhoz tartozó n -dimenziós parabolasereg minden parabolájának integrálja a $-1 \leq x \leq +1$ intervallumra *ugyanaz* az érték.]

A LAGRANGE-parabola e GAUSS-esetben :

$$L(x) = \sum_{k=1}^n f_k l_k(x), \quad (19)$$

hol

$$l_k(x) = \frac{P_n(x)}{P_n'(x_k)(x - x_k)}, \quad (20)$$

($k = 1, 2, \dots, n$).

A lépcsőparabola :

$$G(x) = \sum_{k=1}^n f_k g_k(x), \quad (21)$$

hol

$$g_k(x) = \left[1 - \frac{P_n''(x_k)}{P_n'(x_k)}(x - x_k) \right] \left[\frac{P_n(x)}{P_n'(x_k)(x - x_k)} \right]^2, \quad (22)$$

($k = 1, 2, \dots, n$).

Ámde $P_n(x)$ eleget tesz a következő másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$(1 - x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0, \quad (23)$$

e szerint, ha $x = x_k$,

$$\frac{P_n''(x_k)}{P_n'(x_k)} = \frac{2x_k}{1 - x_k^2},$$

és így

$$1 - \frac{P_n''(x_k)}{P_n'(x_k)}(x - x_k) = \frac{1 - 2xx_k + x_k^2}{1 - x_k^2}. \quad (24)$$

Ha tehát x_1, x_2, \dots, x_n a $P_n(x) = 0$ egyenlet gyökei, akkor az $(x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ pontokhoz tartozó lépcsőparabola:

$$G(x) = \sum_{k=1}^n f_k g_k(x), \quad (25)$$

hol

$$g_k(x) = \frac{1 - 2xx_k + x_k^2}{1 - x_k^2} \left[\frac{P_n(x)}{P_n'(x_k)(x - x_k)} \right]^2, \quad (26)$$

($k = 1, 2, \dots, n$).

8. I. tétel. GAUSS-abcissák esetében a lépcsőparabolát szolgáltató (25) alatti interpolációs formula $g_k(x)$ alapfüggvényei nemnegatívak.

Ugyanis, ha $|x| \leq 1$,

$$1 - 2xx_k + x_k^2 \geq 1 - 2|x_k| + |x_k|^2 = (1 - |x_k|)^2 > 0,$$

tehát, (26) alapján, valóban

$$g_k(x) \geq 0, \quad (27)$$

$$-1 \leq x \leq +1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

II. tétel. A nemnegatív $g_k(x)$ alapfüggvények összege azonosan egyenlő 1-gyel, azaz

$$g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x) \equiv 1. \quad (28)$$

E tétel speciális esete annak, melyet a (18) alatti egyenlet fejez ki.

9. Az I. és II. tételből érdekes következtetéseket vonhatunk az $(x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ pontokon átmenő lépcsőparabolára, ha x_1, x_2, \dots, x_n a GAUSS-abcissák.

Jelöljön az f_1, f_2, \dots, f_n ordináták közül f és F két ordinátát, melyekre nézve

$$f \leq f_1, f_2, \dots, f_n \leq F.$$

Akkor, tekintettel a (25) alatti formulára és az I. tételre:

$$f \sum_{k=1}^n g_k(x) \leq \bar{G}(x) \leq F \sum_{k=1}^n g_k(x), \\ -1 \leq x \leq +1,$$

és tekintettel a II. tételre:

$$f \leq G(x) \leq F, \\ -1 \leq x \leq +1. \quad (29)$$

Tehát:

III. tétel. Az x_1, x_2, \dots, x_n GAUSS-helyeken az f_1, f_2, \dots, f_n ordinátaadatokkal meghatározott lépcsőparabolának az egész $-1 \leq x \leq +1$ intervallumhoz tartozó ordinátái nem lehetnek nagyobbak, mint az f_1, f_2, \dots, f_n adatok közül a legnagyobb és nem lehetnek kisebbek, mint az f_1, f_2, \dots, f_n adatok közül a legkisebb.

Ebből következik:

IV. tétel. Legyen $G(x)$ az f_1, f_2, \dots, f_n $\bar{G}(x)$ pedig az $f_1 + \delta_1, f_2 + \delta_2, \dots, f_n + \delta_n$ ordinátaadatokhoz tartozó lépcsőparabola. Az x_1, x_2, \dots, x_n abcissák megint a GAUSS-félék. Akkor

$$|G(x) - \bar{G}(x)| \leq \delta, \\ -1 \leq x \leq +1, \quad (30)$$

ha

$$|\delta_1|, |\delta_2|, \dots, |\delta_n| \leq \delta.$$

A III. és IV. tételből rögtön következik:

V. tétel. Legyen $f(x)$ az x valós változónak valós függvénye, mely a $-1 \leq x \leq +1$ közre van értelmezve, és melynek

in illetőleg M e közre vonatkozó WEIERSTRASS-féle alsó, illetőleg felső határa. Legyen

$$G_1(x), G_2(x), \dots G_n(x), \dots \quad (31)$$

az $f(x)$ -hez tartozó lépcsőparabolák végtelen sorozata, ahol az abscissa-csoportok a GAUSS-félék. Akkor

$$\left. \begin{aligned} m &\leq G_n(x) \leq M, \\ -1 &\leq x \leq +1, \quad n=1, 2, 3, \dots \infty. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

VI. tétel. Legyenek, ismét GAUSS-abszissákat fektetve alapul, a $-1 \leq x \leq +1$ számközre értelmezett $f(x)$ -nek lépcsőparabolái

$$G_1(x), G_2(x), \dots G_n(x), \dots, \quad (33)$$

az $f(x) + \delta(x)$ lépcsőparabolái pedig

$$\bar{G}_1(x), \bar{G}_2(x), \dots \bar{G}_n(x), \dots \quad (34)$$

Legyen

$$|\delta(x)| \leq \delta, \quad -1 \leq x \leq +1.$$

Akkor

$$\left| G_n(x) - \bar{G}_n(x) \right| \leq \delta, \quad (35)$$

$$-1 \leq x \leq +1, \quad n=1, 2, 3, \dots \infty.$$

Ez utóbbi tétel mutatja, hogy, ha az abszissák a GAUSS-félék, akkor az $f(x)$ -hez tartozó

$$G_1(x), G_2(x), \dots G_n(x), \dots$$

lépcsőparabolák összessége «stabilis» (a $-1 \leq x \leq +1$ számközben) az $f(x)$ -től való függésük tekintetében. Mert ha az eredeti $f(x)$ görbét úgy variálok a $-1 \leq x \leq +1$ intervallumban, hogy benne marad az $f(x) - \delta$, $f(x) + \delta$ sávban, akkor a variált görbének megfelelő n -edik lépcsőparabola is benne marad a $G_n(x) + \delta$, $G_n(x) - \delta$ sávban ($-1 \leq x \leq +1$), bármi legyen is az n értéke, és bármilyen kicsiny pozitív szám is a δ .

G. FABER¹ kimutatta, hogy a LAGRANGE-féle parabolasoro-

¹ G. FABER: Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 23, 1914.

zat «*labilis*», bármilyen legyen is az a pontesoport-sorozat, melyet az interpolatio alapjául választottunk. *Labilis* tehát a GAUSS-esetben is.

3. §. A Gauss-abcissákra vonatkozó lépcsőparabolák convergentiája az $f(x)$ függvényhez a $(-1, +1)$ számköz belsejében.

10. VII. tétel. Legyen $f(x)$ az x valós változó valós függvénye, mely korlátos a $-1 \leq x \leq +1$ intervallumban. Legyen x e számköz valamely belső helye, melyen az $f(x)$ függvény folytonos. Akkor ezen x helyen a GAUSS-abcissákra képezett

$$G_1(x), G_2(x), \dots, G_n(x), \dots$$

lépcsőparabolák sorozata *convergens* és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = f(x).$$

Bizonyítás. Legyenek x_1, x_2, \dots, x_n a $P_n(x) = 0$ egyenlet gyökei és f_1, f_2, \dots, f_n az $f(x)$ függvény értékei e gyökhelyeken. Akkor (25) alapján

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k g_k(x).$$

Ámde a II. tétel szerint

$$\sum_{k=1}^n g_k(x) = 1,$$

tehát

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f(x) g_k(x),$$

és így

$$G_n(x) - f(x) = \sum_{k=1}^n [f_k - f(x)] g_k(x). \quad (36)$$

Mintfogya az $f(x)$ függvény az x belső helyen folytonos, tehát a tetszésszerűen kicsiny pozitív δ -hoz találhatók egy pozitív ε -t úgy, hogy

$$|f(\xi) - f(x)| \leq \delta, \quad (37)$$

ha

$$|\xi - x| \leq \varepsilon, \quad (38)$$

és

$$-1 < x - \varepsilon < x + \varepsilon < 1.$$

(Az x , δ , ε számokat rögzítve képzeljük.)

Osszuk most a (36) alatti, a $G_n(x) - f(x)$ különbséget kifejező n -tagú összeget két részre:

$$G_n(x) - f(x) = \Sigma'_n + \Sigma''_n. \quad (39)$$

Az első összeg Σ'_n tartalmazza a (36) alatti összeg mindama tagjait, melyek olyan x_k helyekhez tartoznak, melyekre nézve

$$x - \varepsilon \leq x_k \leq x + \varepsilon.$$

[Ha n elegendő nagy, akkor ilyen x_k mindenesetre van az x_1, x_2, \dots, x_n LEGENDRE-értékek sorozatában.]

A második összeg Σ''_n tartalmazza az összes többi tagot. [Ilyen tagok, melyek tehát azokhoz az x_k értékekhez tartoznak, melyek kiesnek az $x - \varepsilon \leq \xi \leq x + \varepsilon$ intervallumból, szintén léteznek az x_1, x_2, \dots, x_n LEGENDRE-értékek sorozatában, ha n elegendő nagy.]

Már most (39) alapján

$$|G_n(x) - f(x)| \leq |\Sigma'_n| + |\Sigma''_n|. \quad (40)$$

Ámde (37), (38) és I. tétel alapján

$$|\Sigma'_n| \leq \delta \Sigma'_n g_k(x) \leq \delta \sum_{k=1}^n g_k(x),$$

tehát a II. tétel alapján

$$|\Sigma'_n| \leq \delta. \quad (41)$$

Legyen $|f(x)| \leq M$, $-1 \leq x \leq +1$. Akkor az I. tétel alapján,

$$|\Sigma''_n| \leq 2M \Sigma''_n g_k(x). \quad (42)$$

De (26) alapján mindig érvényes:

$$0 \leq g_k(x) \leq 4 \frac{[P_n(x)]^2}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2} \frac{1}{(x-x_k)^2}.$$

Tehát ha x_k kiesik az $x - \varepsilon \leq \xi \leq x + \varepsilon$ intervallumból, akkor

$$0 \leq g_k(x) \leq 4 \frac{[P_n(x)]^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2}.$$

E szerint (42)-re való tekintettel

$$|\Sigma''_n| \leq \frac{8M}{\varepsilon^2} [P_n(x)]^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2},$$

és annál inkább

$$|\Sigma''_n| \leq \frac{8M}{\varepsilon^2} [P_n(x)]^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2}. \quad (43)$$

Ámde a (26) alapján

$$g_k(1) = \frac{1}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2}, \quad (44)$$

és így, a II. tétel szerint,

$$\sum_{k=1}^n g_k(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2} = 1. \quad (45)$$

Tehát, tekintettel (43)-ra:

$$|\Sigma''_n| \leq \frac{8M}{\varepsilon^2} [P_n(x)]^2. \quad (46)$$

(40), (41) és (46) alapján most már

$$|G_n(x) - f(x)| \leq \delta + \frac{8M}{\varepsilon^2} [P_n(x)]^2. \quad (47)$$

De ismeretes, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = 0$, ha $-1 < x < +1$, sőt található olyan pozitív numerikus c állandó, hogy

$$|P_n(x)| < \frac{c}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$-1 < x < +1$.

tehát

$$|G_n(x) - f(x)| \leq \delta + \frac{8Mc^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{n}. \quad (48)$$

E szerint, ha az n elegendő nagy, akkor

$$|G_n(x) - f(x)| \leq 2\delta,$$

és ezzel a VII. tétel be van bizonyítva.

VIII. tétel. Legyen $f(x)$ folytonos a $g \leq x \leq h$ intervallumban, hol $-1 < g < h < +1$, és korlátos a $(-1, +1)$ intervallumban. Akkor a GAUSS-esetben a megfelelő

$$G_1(x), G_2(x), \dots, G_n(x), \dots$$

lépcsőparabolák egyenletesen convergálnak az $f(x)$ függvényhez bármely

$$g + \varepsilon \leq x \leq h - \varepsilon$$

intervallumban, bármilyen kicsiny pozitív szám legyen is az ε .

Ez a (48) alatti becslésből közvetlenül következik.

VIII'. tétel. Ha $f(x)$ mindenütt folytonos a $-1 \leq x \leq +1$ intervallumban, akkor a

$$G_1(x), G_2(x), \dots, G_n(x), \dots$$

lépcsőparabolák sorozata a $(-1, +1)$ intervallum minden belső pontján convergens, és minden

$$1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$$

közben egyenletesen convergens, bármilyen kicsiny pozitív szám is az ε .

4. §. A Gauss-abszisszákra vonatkozó lépcsőparabolák convergentiája az $x = \pm 1$ helyeken. A Stieltjes-tétel.

11. Mielőtt a ± 1 helyeken a convergentia-kérdést tárgyalnám, megvizsgálom a GAUSS-esetben az n -edik $G_n(x)$ lépcsőparabolát a ± 1 helyeken.

Minthogy (26) alapján

$$G_k(\pm 1) = \frac{1}{(1-x_k) [P'_n(x_k)]^2}, \quad (50)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

tehát, (25) alapján,

$$G_n(\pm 1) = \sum_{k=1}^n f_k \frac{1}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2}. \quad (51)$$

Vezessük be a

$$g_k = \frac{2}{(1-x_k^2)[P'_k(x_k)]^2} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (52)$$

positív állandókat. Akkor

$$G_n(\pm 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f_k g_k. \quad (53)$$

Látjuk tehát, hogy a $G_n(x)$ polynom ugyanazt az értéket veszi fel a $+1$ helyen, mint a -1 helyen ($n=1, 2, 3, \dots, \infty$). Hogy ez (53) alatti érték jelentését tisztázzuk, előrebocsátom a következőt.

Az $(x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ pontokon a $(2n-1)$ -edfokú paraboláknak egy n -dimenziós végtelen serege vonul keresztül. Esetünkben, a midőn $P_n(x_k) = 0$, ($k=1, 2, \dots, n$), a GAUSS-tétel szerint mind e paraboláknak a $(-1, +1)$ közre vonatkozó területe (integrálja) közös érték. Ez az az érték, melyet az f_1, f_2, \dots, f_n ordinátaadatokhoz az úgynevezett «GAUSS-féle mechanikus quadratura» szolgáltat. Számítsuk ki a GAUSS-féle mechanikus quadratura értékét a (25), (26) alatti lépcsőparabola felhasználásával.

(25) alapján

$$\int_{-1}^{+1} G(x) dx = \sum_{k=1}^n f_k \int_{-1}^{+1} g_k(x) dx. \quad (54)$$

Ámde (26) szerint

$$g_k(x) = \left[1 - \frac{2x_k}{1-x_k^2}(x-x_k) \right] \left[\frac{P_n(x)}{P'_n(x_k)(x-x_k)} \right]^2,$$

tehát

$$\int_{-1}^{+1} g_k(x) dx = \frac{1}{[P'_n(x_k)]^2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{P_n(x)}{x-x_k} \right)^2 dx. \quad (55)$$

Ugyanis

$$\int_{-1}^{+1} (x-x_k) \left(\frac{P_n(x)}{x-x_k} \right)^2 dx = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)}{x-x_k} \cdot P_n(x) dx = 0,$$

mert $\frac{P_n(x)}{x-x_k}$ $n-1$ edfokú racionális egész-függvény.]

Továbbá, partiális integrálással,

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{P_n(x)}{x-x_k} \right)^2 dx = \left[(x-x_k) \left(\frac{P_n(x)}{x-x_k} \right)^2 \right]_{-1}^{+1} - 2 \int_{-1}^{+1} (x-x_k) \frac{P_n(x)}{x-x_k} \cdot \left(\frac{P_n(x)}{x-x_k} \right)' dx.$$

Ámde a jobboldali integrál zérussal egyenlő, mert az integrandus $P_n(x)$, szorozva egy $(n-2)$ -edfokú racionális egész-függvénynyel.

Tehát

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{P_n(x)}{x-x_k} \right)^2 dx = \frac{1}{1-x_k} + \frac{1}{1+x_k} = \frac{2}{1-x_k^2},$$

és így (55) szerint: ¹

$$\int_{-1}^{+1} g_k(x) dx = \frac{2}{(1-x_k^2) [P_n'(x_k)]^2} = g_k, \quad (55')$$

és (54) szerint:

$$\int_{-1}^{+1} G(x) dx = \sum_{k=1}^n f_k \frac{2}{(1-x_k^2) [P_n'(x_k)]^2} = \sum_{k=1}^n f_k g_k. \quad (54')$$

Tehát, az (53) alatti egyenlet alapján, végre

$$G_n(\pm 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f_k g_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} G_n(x) dx. \quad (56)$$

¹ A g_1, g_2, \dots, g_n pozitív numerikus állandókat, melyeknek segítségével az f_1, f_2, \dots, f_n ordináta-adatoknak megfelelő GAUSS-féle quadratura-eredmény a $\sum_{k=1}^n f_k g_k$ alakban adódik, GAUSS-állandóknak nevezem. A g_k állandó (55') alatti kifejezését E. B. CHRISTOFFEL közölte először. (L. „Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben“, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 55, Seite 69. 1858, és Gesammelte Werke, Bd. 1.) A szövegben közölt levezetést a g_k CHRISTOFFEL-alakja számára, mely az $(x_1, f_1) \dots (x_n, f_n)$ pontokon keresztülmennő lépcső-parabola quadraturáján alapszik, JORDAN KÁROLY úr szíves szóbeli közlésének köszönhetem.

Nyertük tehát az n -edik lépcsőparabolára nézve a következő tételt:

IX. Az $(x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ pontokon átvonuló lépcsőparabola, a GAUSS esetben, a $+1$ és -1 helyeken ugyanazt az értéket veszi fel és ez egyenlő a lépcsőparabolának a $(-1, +1)$ számközre vonatkozó területének felével

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} G_n(x) dx,$$

vagyis amaz érték felével, melyet az x_1, x_2, \dots, x_n LEGENDRE-gyökökre adott f_1, f_2, \dots, f_n ordinátádatakhoz az úgynevezett GAUSS-féle mechanikus quadratura szolgáltat.

12. Tegyük fel most már, hogy az $f(x)$ függvény korlátos és RIEMANN szerint integrálható a $-1 \leq x \leq +1$ intervallumban.

$$G_n(\pm 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f_k g_k. \quad (57)$$

Ámde STIELTJES¹ kimutatta, hogy az a területérték, melyet a GAUSS-féle mechanikus quadratura az n -edik lépésnél szolgáltat, minden határon túl növekedő n -nel az $f(x)$ görbe területéhez konvergál, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k g_k = \int_{-1}^{+1} f(x) dx, \quad (S)$$

ha $f(x)$ a $-1 \leq x \leq +1$ közben RIEMANN-szerint integrálható.

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\pm 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) dx. \quad (58)$$

E szerint a következő tételhez jutottunk:

X. tétel. Ha $f(x)$ korlátos és RIEMANN szerint integrálható függvény a $-1 \leq x \leq +1$ intervallumban és $G_n(x)$ az n -indexű lépcsőparabola (a GAUSS-esetben), akkor

$$G_n(+1) = G_n(-1),$$

¹ TH. J. STIELTJES: Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. Annales de l'Ecole Normale supérieure, Sér. 3. Tome 1, 1884, és Oeuvres complètes, Tome I, pag. 317, Groningen, 1914.

és

$$\lim_{n=\infty} G_n(\pm 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) dx, \quad (59)$$

vagyis $\lim_{n=\infty} G_n(\pm 1)$ létezik és egyenlő az $f(x)$ függvénynek az egész $(-1, +1)$ intervallumra vonatkozó középértékével.

E szerint például egy a $-1 \leq x \leq +1$ intervallumban mindenütt folytonos $f(x)$ függvény lépcsőparaboláira nézve — a GAUSS-esetben — a következő áll:

$$1. \quad \lim_{n=\infty} G_n(x) = f(x),$$

ha

$$-1 < x < +1.$$

2. a $G_n(x)$ sorozat convergentiája egyenletes minden

$$-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$$

intervallumban, bármilyen kicsiny pozitív szám is az ε , végre

$$3. \quad \lim_{n=\infty} G_n(\pm 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) dx.$$

13. Megjegyzem, hogy a fenti STIELTJES-tétel, a mely szerint a GAUSS-féle mechanikus quadratura, minden határon túl finomítva, az $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$ értékhez vezet, a következőképen is bizonyítható.

Egyszerűség kedvéért szorítkozom arra az esetre, midőn $f(x)$ folytonos a $-1 \leq x \leq +1$ számközben.

Legyen δ egy tetszőszerinti kicsiny pozitív szám. Akkor WEIERSTRASS szerint található olyan ν -edfokú racionális egész-függvénye az x -nek, $\varphi_\nu(x)$, hogy

$$f(x) = \varphi_\nu(x) + \varepsilon(x), \quad (60)$$

és

$$|\varepsilon(x)| \leq \delta, \quad -1 \leq x \leq +1. \quad (61)$$

Jelöljük $I_n[\alpha(x)]$ -szel azt az értéket, melyet a GAUSS-féle mechanikus quadratura az n -edik lépésben valamely $\alpha(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, függvényre szolgáltat. Akkor (60) alapján

$$I_n[f(x)] = I_n[\varphi_\nu(x)] + I_n[\varepsilon(x)]. \quad (62)$$

Ámde, ha $n > \nu$, akkor

$$I_n [\varphi_\nu(x)] = \int_{-1}^{+1} \varphi_\nu(x) dx = \int_{-1}^{+1} f(x) dx - \int_{-1}^{+1} \varepsilon(x) dx.$$

Tehát, tekintettel (61)-re, ha n elegendő nagy,

$$I_n [\varphi_\nu(x)] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx + \eta, \quad |\eta| \leq 2\delta. \quad (63)$$

Továbbá

$$|I_n [\varepsilon(x)]| = \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon(x_k) g_k \right| \leq \delta \sum_{k=1}^n g_k = 2\delta, \quad (64)$$

tehát (62), (63), (64) alapján

$$|I_n [f(x)] - \int_{-1}^{+1} f(x) dx| \leq 4\delta,$$

ha n elegendő nagy, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n [f(x)] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx.$$

Ez a STIELTJES-tétel.

Egy másik bizonyítás e dolgozat VIII'. és V. tételére, vagyis a lépcsőparabolák convergentiájára alapítható.

A VIII'. tétel szerint ugyanis a $G_n(x)$ sorozat egyenletesen convergál az $f(x)$ függvényhez minden $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$ intervallumban, hol $\varepsilon > 0$. Az V. tétel szerint pedig $|G_n(x)| < \text{const.}$, $-1 \leq x \leq +1$, $n = 1, 2, 3, \dots \infty$. E szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} G_n(x) dx = \int_{-1}^{+1} f(x) dx.$$

Ámde

$$\int_{-1}^{+1} G_n(x) dx = I_n [f(x)],$$

tehát újra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n [f(x)] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx.$$

5. §. A lépcsőparabolák æquidistans abszisszák esetében.

14. Az eddigiekben a lépcsőparabolákat abban az esetben vizsgáltam, midőn az x_1, x_2, \dots, x_n abszisszák a $P_n(x) = 0$ egyenletnek tettek eleget, tehát azonosak voltak azokkal az abszisszákkal, melyeket GAUSS a mechanikus quadratura céljára ajánlott.

Legyen szabad e pontban egy megjegyzést tennem a lépcsőparabolákat illetőleg abban az esetben, midőn az x_1, x_2, \dots, x_n abszisszák egymástól *egyenlő* távolságban vannak.

Legyen tehát

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \frac{2}{n+1}, \quad x_2 = -1 + \frac{4}{n+1}, \dots \\ x_k &= -1 + \frac{2k}{n+1}, \dots, \quad x_n = -1 + \frac{2n}{n+1}, \end{aligned} \quad (66)$$

és

$$\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n). \quad (67)$$

Az $(x_1, f_1), (x_2, f_2) \dots (x_n, f_n)$ pontokon átmenő lépcsőparabola formulája a (15) és (16) alatti egyenletek szerint:

$$G^*(x) = \sum_{k=1}^n f_k f_k^*(x), \quad (68)$$

hol

$$f_k^*(x) = \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} (x-x_k) \right] \left[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} \right]^2, \quad (69)$$

($k=1, 2, \dots, n$).

Megjegyzésem abban áll, hogy ez esetben, az *æquidistans abszisszák esetében*, a $g_k^*(x)$ alapfüggvények mind jelet váltanak a $-1 \leq x \leq +1$ intervallumban.

(Egyedüli kivétel a zérus-helyhez tartozó középső alapfüggvény, ha n páratlan. Ez nem-negatív a $-1 \leq x \leq +1$ közben.)

Ugyanis, általában,

$$\begin{aligned} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} &= 2 \left(\frac{1}{x_k - x_1} + \frac{1}{x_k - x_2} + \dots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \dots + \frac{1}{x_k - x_n} \right). \end{aligned} \quad (70)$$

Tehát, ha $k < \frac{n+1}{2}$, tekintettel az x -ek (66) alatti értékére:

$$\begin{aligned} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} &= 2 \left(-\frac{1}{k} \frac{2}{n+1} + \frac{1}{-(k+1)} \frac{2}{n+1} + \dots + \frac{1}{(k-n)} \frac{2}{n+1} \right) = \\ &= (n+1) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-k} \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Tehát a $g_k^*(x)$ (69) alatti kifejezésében szereplő lineáris tényező

$$1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} (x - x_k) \quad (72)$$

értéke az $x = -1$ helyen

$$\begin{aligned} 1 + (n+1) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-k} \right) \cdot \frac{-2k}{n+1} &= \\ = 1 - 2k \left(\frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{n-k} \right) &< 0, \\ (n \geq 2), \end{aligned} \quad (73)$$

az $x = +1$ helyen pedig

$$1 + 2(n+1-k) \left(\frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{n-k} \right) > 0. \quad (74)$$

Hasonlóképen tárgyalható a $k > \frac{n+1}{2}$ eset.

Végre, ha n páratlan és $k = \frac{n+1}{2}$, vagyis $x_k = 0$, akkor $\omega''(x_k) = 0$, és így a (72) alatti lineáris tényező azonosan egyenlő 1-gyel. Ez esetben tehát az $x_k = 0$ helyhez tartozó alapfüggvény nem-negatív.

E szerint a (66) alatti æquidistans x_1, x_2, \dots, x_n abszcissák esetében a lépcsőparaboláknál szereplő összes alapfüggvények megváltoztatják egyszer az előjelüket a $-1 \leq x \leq +1$ intervallumban. (Kivéve, ha n páratlan és $k = \frac{n+1}{2}$.)

AZ EMLŐ TÖMLŐS MEGBETEGEDÉSEINEK ÉS RÁKJÁNAK KÓROKTANÁHOZ.

KROMPECHER ÖDÖN I. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Az orvostan sokat vitatott, de lényegében maig is homályos kórképe a RECLUS-féle «*maladie kystique des mamelles*». Az emlő eme tömlős megbetegedésének első eseteit a XIX. század elején angolok (ASTLEY COOPER 1828) és francziák (VELPEAU, BROCA) közölték, majd később németek (THIERSCH, BILLROTH) írták le. Egységes és jellegzetes, nem éppen ritka kórkép alakjában először RECLUS (1864) ismertette és a «*maladie kystique des mamelles*» névvel illette. A 60-as évektől a 90-es évekig főleg a francziák, ezentúl elsősorban a németek foglalkoztak vele, és e sajátos kórkép lényegére vonatkozólag is főleg két német szerző, nevezetesen SCHIMMELBUSCH és KÖNIG felfogása a mérvadó.

A kórkép több, egymástól élesen el nem különíthető alakban jelentkezik, és szült és nem szült nőkn egyaránt található. 45—50 éves, ritkábban fiatalabb nők egyik vagy mindkét emlőjében tömlők mutatkoznak, melyek sárgás-zöldes nyálkás folyadékkal teltek és a környező izomzat, valamint a bőr felé élesen elhatárolódnak. Számuk és nagyságuk igen változó. Az esetek egy részében egy-egy diónyi, tyúktójasnyi tömlőre, máskor számos apró, sűrűen egymás mellett fekvő tömlőre akadunk, úgy, hogy a kezünk közé vett emlő sréttel telt zacskóra emlékeztet.

Apró tömlőktől körülvett nagyobb tömlők sem ritkák. Érdekes és differentialdiagnostikai tekintetben bizonyos fokig jellegzetes az emlő bimbójának a viselkedése. Ez csak ritkán, köz-

vetlenül alatta fekvő tömlőknél húzódik be és az esetek egyharmadában vagy felében savós, véres váladékot ürít. Ez a véres váladék néhány véres csepp alakjában már a kórfolyamat kezdődő szakában ürül az emlő bimbójából és rendszerint e miatt keresi fel a meglepett és megijedt nő az orvost.

A számos kisebb-nagyobb tömlőtől áthatott emlő metszés-lapja svájci sajtra emlékeztet. A tömlők belfülete vagy sima fénylő, vagy szemölcsszerű növedékektől egyenetlen, a tömlők közötti kötőszövet pedig rostos, szürkés-fehér, inszerű.

Mikroszkop alatt az emlőmirigy lebenykéi vagy a rendes mirigyeknek megfelelő számmal találhatók, vagy pedig megfogytak, illetve megszorodottak s utóbbi esetben a mikroszkopos kép tejet elválasztó, laktáló emlőre emlékeztet. A mirigyacinusok mérsékelten tágultak s hámjuk sok helyen desquammált. A kivezető csövek is csak mérsékelten tágultak s hámjuk kifejezetten hengeres. A szabad szemmel látható tömlőket feltűnően nagy hámsejtek bélelik, melyek protoplasmája igen halványan festődik s melyek magva rendszerint igen apró, gömbölyded vagy ovalis. E SAARTól «*halvány hám*»-nak nevezett nagy hámsejtek alakja igen változó, majd köbös, majd hosszúkás hengeres vagy lelapult, de halvány festődése folytán az acinusokat és a kivezetőcsöveket bélelő hámtól mindig könnyen elkülöníthető. E sajátságos hámsejtek vagy egy, vagy pedig több rétegben bélelik a tömlőket s helyenkint igen tetszetős bunkós vagy bolyhos növedékeket hajtanak. A hám alatt, vagyis a hám és a membrana propria között néha hosszú orsóalakú sejtek láthatók, melyek sima izomsejtekre emlékeztetnek és ferde, párhuzamos elrendezésük folytán meridianokra emlékeztető lefutást mutatnak.

Az acinusok és a tömlők közötti kötőszövet itt-ott gömbsejtesen beszűrődött vagy hyalin módon elfajult és sklerotizált. Benne néha elmeszedés és elnyálkásodás is észlelhető. A rugalmasrostok egyes esetekben szaporodottak és szétesési jelenségeket mutatnak. Ezek az elacin-rögök főleg a kivezetőcsövek körül halmozódnak fel nagy mennyiségben és eredményezik azt, hogy a kivezetőcsövek rugalmas rostokra festett készítményeken valóságos elacin-hengerekbe látszanak ágyazva.

A «maladie kystique»-nek e klinikai, makro- és mikroszkopos megjelenésében röviden jellemzett kórképe általában véve jóindulatú megbetegedés. A prognosis rendszerint jó. Rákos átalakulás folytán rosszindulatúság inkább csak azokban a ritkább esetekben észlelhető, hol a tömlőket bélelő halvány hám bunkós vagy bolyhos növedékeket hajt.

A kórkép értelmezése, nevezetesen az ép emlőben elő nem forduló e nagy halvány hámmal bélelt tömlők keletkezése tekintetében RECLUS alapvető munkája óta, vagyis kerek 50 éve vitatkoznak.

A kutatók egy része (BRISAUD, SCHIMMELBUSCH, TITZE, SAAR) a tömlőket az *acinusokból* és apró kivezetőcsövekből származtatja, és pedig olymódon, hogy azok hámja *aktiv* módon szaporodik, ezáltal tágitja az acinusokat, majd pedig a középén szétesik. A tömlők keletkezésének ez a módja a fentnevezett szerzők szerint *valódi tömlős daganat* keletkezésére emlékeztet és jogosulttá teszi a *cystadenoma mammae* (SCHIMMELBUSCH) elnevezést.

A szerzők másik tábora (KÖNIG, ROLOFF, LICHTENHAHN) a tömlőknek lobos alapon való keletkezése mellett kardoskodik s a tömlőket *passiv* módon, vagyis olymódon származtatja, hogy felveszi, miszerint a kötőszövet lobosan beszűrődik, majd szaporodva hegesedik és a kivezetőcsöveket szűkítve, azok *retentiós tágulását* eredményezi. E magyarázat értelmében a folyamat lényege *emlőgyulladás, mastitis* volna s tömlős gyuladásról lévén szó, KÖNIG szerint *mastitis chronica cysticanak* nevezendő.

Ha még felemlítem, hogy BLOODGOOD a kórképet «*senilis parenchymás túltengés*»-nek, THEILE pedig *fibroepithelialis degeneratio*»-nak mondja, és hangsúlyozom, hogy ezek az elnevezések minden komolyabb alapot nélkülöznek s egyáltalán nem találtak követőkre: úgy bevilágítottam volna a «maladie kystique» rejtelmes kórképébe és áttérhetek saját vizsgálataim rövid ismertetésére.

A kérdéssel 17 év óta foglalkozom. 1898-ban a kis tömlős emlő egy ilyen esetében mikroszkop alatt a tömlők falában igen sok orsóalakú sejtet láttam, melyek igen hosszú sima izomsej-

tekre hasonlítottak, párhuzamos elrendeződést és ferde, meridianokra emlékeztető lefutást mutattak. A tömlők fala a fentebb említett nagy halvány hámmal volt bélelve. E tömlők mikroszkopos képe feltűnő módon emlékeztetett a hónaljban előforduló nagy verejtékmirigyek tágult járataira és a kérdésnek ily irányban való vizsgálatára buzdított. 14 év alatt 21 esetet gyűjtöttem és a tömlők szövettani szerkezetéről a «Deutsche pathologische Gesellschaft»-nak 1913-ban Marburgban tartott 13. ülésén tettem rövid jelentést. Hangsúlyoztam, hogy a tömlők morphologice annyira hasonlítanak a hónaljbeli verejtékmirigyek tágult járataira, hogy a szóbanforgó, az emlőre nézve idegenszerű tömlők is kétségtelenül ily verejtékmirigy-tömlőknek felelnek meg. Ez a kezdetben talán idegenszerűnek látszó felfogás érthetővé válik, ha meggondoljuk, hogy az emlőmirigy phylogenetice verejtékmirigyből alakult ki. Hangsúlyoztam, hogy e tömlők verejtékmirigy-tömlőknek megfelelő fejlődési rendellenességeknek felelnek meg és fejtegetéseim élénk visszhangra is találtak, a mennyiben főleg BENDA, a verejtékmirigyek histológiájának kitűnő ismerője, készítményeim bizonyító voltára utalt.

Eseteim száma azóta 42-re emelkedett, beleszámítva azt a 18 esetet is, a hol a tömlők háma rákos átalakulást mutat.

Míg marburgi jelentésemben főleg a tömlők verejtékmirigy jellegének a bizonyítására szorítkoztam, addig az utóbbi hónapokban terjedelmesebb dolgozatban utaltam e tömlőknek egyrészt a *maladie kystique*-beli tömlőkhez, másrészt az emlő egyéb tömlős megbetegedéseihöz való viszonyára és foglalkoztam az emlőráknak a nevezett tömlőkből való kiindulásának érdekes kérdésével. Midőn jelzem, hogy e dolgozatom legközelebb német pathologiai folyóiratban fog megjelenni, legyen szabad e helyen vizsgálataim főbb eredményeit egész röviden összefoglalni.

A *maladie kystique* nem felel meg sem *kystadenomának* SCHIMMELBUSCH-féle értelemben, sem *mastitis chronica cysticának*, a mint azt KÖNIG állítja, hanem az emlőmirigy *fejlődési rendellenessége* és *polykystoma mammae*nak (SASSE), vagy még helyesebben *hydrokystoma multiplex mammae*nek nevezhető.

A tömlők verejtékmirigy-tömlő jellege csak azokkal az esetekkel bizonyítható, hol a tömlők falában a halvány hámon kívül

a fentemlített hosszú sima izomsejtek is láthatók. Ily esetek azonban aránylag ritkák. Rövid izomsejtek találhatók ugyan az esetek mintegy felerészében, de hosszú, a hónalji verejték-mirigyeknek megfelelő szembetűnő izomsejtet 42 esetemben csak 4—5-ször, vagyis eseteim 10%-ában láttam. A hónalji verejték-mirigyekre jellegzetes e hosszú izomsejtek ritka előfordulásából érthető, hogy ama szerzők, kik csak néhány esetet vizsgáltak, ily jellegzetes izomelemet nem láttak és a kórkép valódi jellegét nem ismerhették fel.

A bonczolásra került hullák épnek látszó emlőinek rendszeres pontos átvizsgálásakor nem ritkán található elvértve egy-egy gombostűfejnyi, lencsényi, kékesen vagy zöldesen áttűnő tömlőcske. Ezek, az irodalomban «*involutiós*» *tömlők*nek nevezett tömlők már makroszkopice is a *maladie kystique* tömlőire emlékeztetnek. Minthogy pedig azok falában néhány esetben hosszú sima izomsejteket is találtam: kétségtelen, hogy ezek az úgynevezett *involutiós* tömlők is fejlődési rendellenességek és mintegy előstadiumai a *maladie kystique*nek.

Ezek után azonban nem is jogosult többé ezeket a tömlőcskéket *involutiós* cystáknak nevezni. Nem jogosult ez az elnevezés azért sem, mert e tömlők nemcsak idősebb nők involvált emlőiben, hanem fiatalok jól kifejlett emlőiben is előfordulnak.

Ezekben az épnek látszó emlőkben elvértve, itt-ott található tömlőcskék tehát kezdeti stadiumai a *maladie kystique*nek.

Az irodalomban évtizedek óta hangoztatott ama felfogás, hogy a *maladie kystique* tömlői az emlő acinusaiból fejlődnek, és pedig azok hámlójának burjánzása és központi szétesése folytán: alapjában véve hibás, minden alapot nélkülöz. E kérdésre kiterjedő vizsgálataim alapján határozottan állíthatom, hogy az acinusok mérsékelt tágulása a *lactatiós* tágulásnak megfelelő módon megy végbe s hogy acinusok tágulása folytán szabad szemmel látható tömlők nem igen keletkeznek.

A lobos jelenségek, melyek itt-ott gömbsejtes beszűrődésben és a kötőszövet sclerosisában nyilvánulnak, aránylag oly ritkák s oly csekély kiterjedésűek, hogy a bántalom lobos természetének bizonyítására nem alkalmasak s inkább következményes elváltozásoknak tekintendők.

Valódi daganatnak, kystadenomának sem felel meg a szűkebb értelemben vett *maladie kystique*.

De átalakulhat valódi daganattá, ha a tömlők hámja bolyhos növedékeket hajt vagy keztyűujjszerűen betüremkedik s így a tömlők ürében bolyhos vagy egyéb növedékek foglaltatnak. Ily módon lesz a *maladie kystique*ből, vagyis a *hydrocystomából* a *kystadenoma intracanaliculare tubulare et papilliferum*, a melyet Sasse óta jól ismerünk s melynek hét esetét magam is vizsgáltam.

A *maladie kystique*-et és a *kystadenoma intracanaliculare*-t azonban egy kalap alá foglalni semmiképpen sem szabad. Az előbbi fejlődési rendellenesség, ez utóbbi ebből fejlődött valódi daganat.

Különösen hangsúlyozandó, hogy mindkét kórkép, úgy a polykystoma, mint a kystadenoma, rákká alakulhat át. A halvány hám mindkét esetben *activ* módon vehet részt a rák képződésében, szaporodásnak indulva *polymorph* sejteket alkot, melyek több rétegben borítják a tömlők falát, sőt az üregeket ki is tölthetik és halvány hámából álló fészkeket alkotnak. *Kystadenocarcinoma intracanaliculare* eseteiben a rák vagy a verejtékmirigyek halvány hámjából, vagy a kivezetőcsövek hengeres hámjából indul ki.

Ezek a vonatkozások mutatják, hogy a *kystadenoma intracanaliculare*, valamint az emlő *solid* rákja, a verejtékmirigy-tömlők halvány hámjából eredhet; de arra is engednek következtetni, hogy az emlőben fejlődött eme verejtékmirigyek a szövetek egyensúlyi állapotát megzavarják és a rák az emlő saját, tulajdon hámelemeinek burjánzása folytán keletkezik.

Ez az utóbbi feltevés valószínűvé válik, ha meggondoljuk, hogy verejtékmirigy-tömlők egyéb emlődaganatban, így *fibroadenomákban* is előfordulnak. Két ilyen eset észlelése alapján helytelennek kell minősítenem THEILE amaz állítását, hogy halvány hámmal bélelt tömlők *fibroadenomákban*, nevezetesen *fibroadenoma intracanalicularéban* hiányzanak.

Az ilyen verejtékmirigy-tömlőket tartalmazó rákok és *fibroadenomák* megfelelnek az ALBRECHT-féle hamartomáknak és újabb támaszpontot nyújtanak a COHNHEIM-féle elméletnek.

A NÉGYZET-MARADÉKOK ELOSZLÁSÁRÓL.

GROSSCHMID LAJOS-tól.

Hogy jelen dolgozatunk themáját rövidebben összefoglalhassuk, előrebocsájtjuk a következő értelmezést:¹

Definitio. Ha az a racionális egészszám $\equiv 0 \pmod{p}$, és $n > 0$ rat. egész mellett:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a+1}{p}\right) = \dots = \left(\frac{a+n-1}{p}\right) \neq \left(\frac{a+n}{p}\right);$$

akkor azt mondjuk, hogy az a modulo p n -ed fokú.

Ha pedig $a \equiv 0 \pmod{p}$, akkor az a fokszámát *zérussal* jellemezzük.

Itt $\left(\frac{a}{p}\right)$ a négyzet-maradékok *LEGENDRE-symboluma*, a míg $a \not\equiv 0 \pmod{p}$; és $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$, ha a osztható p -vel.

Az n fokszám az a -nak és p -nek arithmetikai függvénye, s e tény kidomborítása céljából $n(p, a)$ -val jelölhető.

Ebből a definitióból világos, hogy, ha $a \pmod{p}$, $0 < n$ -ed-fokú, akkor, $0 \leq k < n$, — k rat. egész — mellett:

$$a + k \not\equiv 0 \pmod{p};$$

továbbá, hogy, tekintettel a mod. p négyzet-maradékok és nem-maradékok számosságának azonosságára, az a -tól függetlenül²

¹ Tárgyalásunk egész folyamán p , 1-nél nagyobb racionális páratlan primszámot jelent.

² $\frac{p-1}{2}$ természetesen csak triviális felső határa a $n(p, a)$ értékeknek; tisztán a p -től függő *legkisebb* ilyen felső határ általános megadása nem lászik könnyen hozzáférhető feladatnak.

$$0 \leq n(p, a) \leq \frac{p-1}{2};$$

s végül, hogy, ha $b \equiv a \pmod{p}$, akkor¹

$$n(p, b) = n(p, a).$$

Jelentse már most $M(p; k)$, a hol $k > 0$ és rat. egész, azoknak az $n(p, a)$ értékeknek a számát az

$$n(p, 1), n(p, 2), \dots, n(p, p-1)$$

sorozatban, a melyekre nézve:

$$n(p, a) \geq k.$$

Sok kérdésben jelentősége van a következő feladatnak:

Meghatározandó az $M(p; k)$ függvény általános alakja, p -ben és k -ban *explicite* kifejezve; továbbá megadandó, adott p és k mellett, ugyancsak *explicite* az

$$n(p, a) \geq k$$

egyenlőtlenség teljes feloldása a -ra.²

Itt következő fejtegetéseinkben, és ez lényegileg jelen dolgozatunk tartalma, igyekeztünk teljességében kimeríteni a feladatnak $k = 2$ -re és 3 -ra vonatkozó részét.³ És pedig tehát különösebben:

¹ Ugyancsak közvetlenül belátható a következő egyenlőtlenség:

$$n(p, -a - n(p, a) + 1) \geq n(p, a).$$

² E kettős problémának a megoldása az épen fogalmazott általános-ságban számunkra ez idő szerint, nem egy oknál fogva, reménytelennek tetszik.

Itt említjük fel az egyelőre exact érvekkel nem támogatott sejtelmünket, hogy t. i. minden pozitív egész k -ra érvényes a limes-relatio:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{M(p; k)}{\left[\frac{p}{2^{k-1}} \right]} = 1,$$

a hol $[a]$ a legnagyobb egész jele, vagyis az az egészszám, a melyre:

$$[a] < a < [a] + 1.$$

³ Ha $k = 1$, akkor a kérdés triviális, mert evidens, hogy minden $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ eleget tesz $n(p, a) \geq 1$ -nek, s így *per definitionem* $M(p; 1) = p - 1$.

az *I. részben* megadjuk $M(p; 2)$ -t, és feloldjuk $n(p, a) \geq 2$ -t; míg:

a *II. részben* kiszámítjuk $M(p; 3)$ -at, és egyértelmű eljárást adunk az $n(p, a) \geq 3$ egyenlőtlenséget kielégítő a -knak a meghatározására.

I.

$$k = 2.$$

Bizonyításunk tárgya a következő

1. tétel. Az

$$n(p, a) \geq 2 \quad (1)$$

egyenlőtlenség akkor és csakis akkor teljesül, ha van oly rat. egész t , a melylyel ¹

$$4a \equiv t + \frac{1}{t} - 2 \quad (\text{mod. } p) \quad (2)$$

és

$$t(t^2 - 1) \not\equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Ha $t \bmod. p$ a $2, 3, \dots, p-2$ sorozatban foglalt értékeken végigmegy, akkor (2) az (1)-et kielégítő a -k mindegyikét kétszer szolgáltatja.

A keresett

$$M(p; 2) = \frac{p-3}{2}.$$

Bizonyítás. Ugyanis, ha t oly szám, a melyre

$$t(t^2 - 1) \not\equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

akkor (2)-ből kapjuk:

$$a(a+1) \equiv \left(\frac{t^2-1}{4t} \right)^2 \quad (\text{mod. } p), \quad (3)$$

azaz

$$\left(\frac{a}{p} \right) = \left(\frac{a+1}{p} \right).$$

a honnan következik (1).

¹ Ha $t \not\equiv 0 \pmod{p}$, akkor $\frac{1}{t}$ jelenti azt a számosztályt, a melyre nézve $t \cdot \frac{1}{t} \equiv 1 \pmod{p}$. Egyébként nyilvánvaló, hogy

$$\frac{1}{t} \equiv t^{p-2} \quad (\text{mod. } p)$$

Viszont, ha (1) teljesítve van, akkor (2) feloldható t -re; mert (2) átalakítása a

$$(t-2a-1)^2 \equiv 4a(a+1) \pmod{p}$$

congruentiához vezet, és $a(a+1)$, (1) alapján négyzet-maradéka p -nek. Evidens, hogy az így kapott $t \not\equiv 0 \pmod{p}$; de $t \equiv 1 \pmod{p}$ sem lehet, mert akkor a p -vel osztható volna, s épen úgy nem $t \equiv -1 \pmod{p}$, mert innen $a \equiv -1 \pmod{p}$ következne; mindez ellentétben (1)-gyel.

Hogy végül a (2)-ből nyert a -k páronként megegyeznek mod. p , az világos, ha meggondoljuk, hogy (2) jobboldala nem változik, ha t helyett a *sociusát*, $\frac{1}{t}$ -t tesszük, s hogy a 2, 3, ..., $p-2$ értékek bármelyikének sociusa tőle különböző és e sorozatban foglalt érték. Ily módon kaptunk $\frac{p-3}{2}$ számú a értéket; és ezek mod. p tényleg különbözőek is, mert, ha $t \not\equiv s \pmod{p}$ és

$$t + \frac{1}{t} \equiv s + \frac{1}{s} \pmod{p},$$

akkor szintén

$$(t-s)\left(t - \frac{1}{s}\right) \equiv 0 \pmod{p},$$

vagyis

$$t \cdot s \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mindezekből világos, hogy ¹

$$M(p; 2) = \frac{p-3}{2};$$

— a mi által 1. tételünk minden állítását kimutattuk.

★

Az épen bebizonyított tételnek felemlítjük most még néhány kézenfekvő következményét.

¹ $M(p; 2)$ -nek ez az értéke közvetlen folyománya egy LAGRANGE-tól eredő tételnek is, a négyzet-maradékok eloszlásáról (v. ö. SERRET, Algebra, II. k.).

A (2) congruentiából a t -értékkel kapott a -t jelöljük $a(t)$ -vel; akkor (3) mutatja, hogy az

$$x^2 \equiv a(t)(a(t) + 1) \pmod{p}$$

congruentiának gyökei:

$$\pm \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right) \pmod{p}.$$

Ugyancsak (2)-ből következik, hogy:

$$4a(t) \cdot t \equiv (t-1)^2 \pmod{p},$$

azaz

$$\left(\frac{a(t)}{p} \right) = \left(\frac{t}{p} \right).$$

Ha már most $\left(\frac{t}{p} \right) = 1$ és az

$$x^2 \equiv t \pmod{p}$$

congruentiának bármelyik gyökét \sqrt{t} -vel jelöljük, akkor (2) szerint:

$$a(t) \equiv \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right)^2 \pmod{p} \quad (4)$$

a mi által az $x^2 \equiv a(t) \pmod{p}$ congruentia is meg van oldva. Az $a(t)$ -nek a (4)-ben reprezentált alakját — természetesen tisztán *symbolikus* értelemben — akkor is használhatjuk, ha $\left(\frac{t}{p} \right) = -1$; a midőn is a \sqrt{t} nem racionális egészszám, csupán egy jel, a melyet a szükséges operatív tulajdonságokkal felruházván, a (4) jobboldalán szereplő négyzetreemelés formális elvégzésével kapjuk a (2) congruentia jobboldalát.

Az 1. tétellel természetesen az

$$x(x+1) \equiv y^2 \pmod{p}$$

kétváltozós congruentia is teljesen meg van oldva. Itt ugyanis kerestetnek p -nek azok a *bitrigonal*-maradékai, a melyek egy-szersmind négyzet-maradékok is.¹

A (2)-ből deriválható összegformulák közül — mint amelyek bizonyítása minden nehézség nélkül eszközölhető — álljanak itt a következők:

¹ E themával kapcsolatban l. BACHMANN, Nied. Zahlentheorie, I. k.

$$\left. \begin{aligned} a) \sum a(t) &\equiv \frac{3}{2}, \\ b) \sum (2a(t) + 1) &\equiv 0, \\ c) \sum a(t)(a(t) + 1) &\equiv \frac{1}{8}, \\ d) \sum \left(\frac{a(t)}{p} \right) &= - \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right); \end{aligned} \right\} \pmod{p},$$

mind a négy összegben t veendő 2-től $(p-2)$ -ig.

Az $a(t)$ -k összeségének praktikus meghatározása igen expeditív módon történhetik. Tegyük egy pillanatra $\frac{p-3}{2} = m$ és legyen $t_1, t_2, \dots, t_m \pmod{p}$ a $2, 3, \dots, p-2$ sorozatnak egy oly részletsorozata, hogy

$$t_i \cdot t_k \equiv 1 \pmod{p},$$

a hol i és k bármely két különböző avagy egyenlő száma az $1, 2, \dots, m$ -sorozatnak; ilyen t -sorozat \pmod{p} 2^m -féleképpen alkotható a $2, 3, \dots, p-2$ sorozatból. T. i. miután e sorozat számait az m -számú *associált*-párba csoportosítottam, a melyek legyenek:

$$t_1 \cdot \frac{1}{t_1} \equiv t_2 \cdot \frac{1}{t_2} \equiv \dots \equiv t_m \cdot \frac{1}{t_m} \equiv 1 \pmod{p},$$

akkor a t -sorozatba vehetem még — *ad libitum* — t_1 -nek t_1 -et avagy $\frac{1}{t_1}$ -et, t_2 -nek t_2 -t, avagy $\frac{1}{t_2}$ -t, stb. A föntiek szerint mármost, az $a(t)$ számoknak \pmod{p} teljes rendszerét adja az

$$a(t_1), a(t_2), \dots, a(t_m) \quad (a)$$

összeség.

Az (a) -sorozat ismerete érdekes módját nyújtja a *mod. p* négyzetes maradékok s illetve nem-maradékok meghatározásának. Nevezetesen, repræsentáljuk az a -kat \pmod{p} legkisebb pozitív maradékaikkal és rendezzük őket növekvő sorban. Legyen az így præparált (a) -sorozat:

$$a(t_1) < a(t_2) < \dots < a(t_m).$$

Mármost 1 mindig négyzet-maradék, míg az *1. tétel* szerint az $1, 2, \dots, p-1$ számok quadr. karaktere *váltakozó* 1 -től

egészen $a(t_1)$ -ig. Legyen $a(t_1)$ n -edfokú ($n \geq 2$); a minek kriteriuma nyilván, hogy:

$$\begin{aligned} \text{úgy, hogy: } a(t_i) &= a(t_1) + i - 1; \quad 1 \leq i \leq n - 1, \\ \left(\frac{a(t_1)}{p} \right) &= \left(\frac{a(t_2)}{p} \right) = \dots = \left(\frac{a(t_{n-1})}{p} \right) = \\ &= \left(\frac{a(t_{n-1}) + 1}{p} \right) \neq \left(\frac{a(t_{n-1}) + 2}{p} \right), \end{aligned}$$

és ugyanakkor: $a(t_2)$ $(n-1)$ -ed, $a(t_3)$ $(n-2)$ -ed, stb. fokúak, míg $a(t_{n-1})$ másodfokú.

1-től megérkezünk $a(t_1)$ -be bizonyos karakterrel; ez marad $(a(t_{n-1}) + 1)$ -ig inclusive, innen újólag *váltakozik* $a(t_n)$ -ig — világos, hogy $a(t_n) \neq a(t_{n-1}) + 1$ —, a melylyel a vázolt processzus ismétlendő. Ily módon kimerül az 1, 2, . . . , $p-1$ sorozat, és minden elemének quadr. karaktere mintegy automatikusan adódik.¹

Az eljárás könnyebb áttekintésére kidolgozunk egy példát. Legyen $p = 23$; t sorozatnak vehetjük:

$$2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17;$$

a megfelelő teljes a -sorozat lesz (2) szerint:

$$1, 2, 3; \quad 8; \quad 10; \quad 12; \quad 14; \quad 19, 20, 21;$$

a melynek alapján írhatjuk:

$$\begin{array}{lll} \text{Res.:} & 1, 2, 3, 4, & 6, \quad 8, 9, \\ \text{Non-Res.:} & & 5, \quad 7, \quad 10, 11, \\ \text{Res.:} & 12, 13, & 16, \quad 18, \\ \text{Non-Res.:} & 14, 15, & 17, \quad 19, 20, 21, 22. \end{array}$$

E tabella helyességéről könnyen meggyőzhet például a reciproci-tási-tétel.

¹ Nagyban megrövidül az eljárás, ha figyelembe vesszük, hogy a -val — $(a + 1)$ is mindig fellép az (a) -sorozatban.

II.

$$k = 3.$$

Ebben az esetben feladatunkat megoldja a következő:

2. *tétel.* Az $1, 2, \dots, p-1$ számsorozatnak azok az a számai, a melyek az

$$n(p, a) \geq 3 \quad (5)$$

egyenlőtlenséget kielégítik, az I. részben tárgyalt $a(t)$ számok közül azok és csakis azok, a melyekre nézve:

$$\left(\frac{t^2 + 6t + 1}{p} \right) = 1 \quad (6)$$

Ezeket az $a(t)$ számokat jelöljük általában $b(t)$ -vel.

Az $M(p; 3)$ számosság az

$$M(p; 3) = \left[\frac{p}{4} \right] - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{-1}{p} \right) + \left(\frac{2}{p} \right) \right) \right) \quad (7)$$

egyenlettel van megadva.

Bizonyítás. Irjuk egyszerűség kedvéért:

$$\frac{1}{x} + x \equiv q(x) \pmod{p}.$$

Ha a (5)-öt kielégíti, akkor mindenekelőtt világos, hogy congruens egy $a(t)$ -számmal mod. p ; és minthogy akkor $a+1$ legalább másodfokú szám, tehát szintén egy $a(t)$ -szám, azért vannak oly t, s számok a $2, 3, \dots, p-2$ sorozatban, hogy:¹

$$4a \equiv q(t) - 2 \pmod{p}$$

és

$$4(a+1) \equiv q(t) + 2 \equiv q(s) - 2 \pmod{p};$$

a honnan következik, hogy

$$(2s - q(t) - 4)^2 \equiv (q(t) + 4)^2 - 4 \pmod{p} \quad (8)$$

azaz:

¹ Ha ugyanis a , legalább harmadfokú, akkor sem s , sem t nem lehet $\equiv \pm 1 \pmod{p}$, mert e feltételekből, vagy a , vagy $a+1$, vagy $a+2 \equiv 0 \pmod{p}$ következne, mind megannyi lehetetlenség.

$$1 = \left(\frac{(q(t) + 4)^2 - 4}{p} \right) = \left(\frac{q(t) + 2}{p} \right) \cdot \left(\frac{q(t) + 6}{p} \right) = \\ = \left(\frac{tq(t) + 2t}{p} \right) \cdot \left(\frac{tq(t) + 6t}{p} \right) = \left(\frac{t^2 + 6t + 1}{p} \right);$$

tehát a (6) feltétel (5)-höz szükséges. Nyomban látjuk, hogy *elegendő* is. Mert ha $t(t^2 - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$ és

$$\left(\frac{t^2 + 6t + 1}{p} \right) = 1,$$

akkor a (8)-nak megoldásai s -re, először is zérustól különbözők mod. p ; ez evidens (8)-ból. Azután ugyancsak (8)-ból adódik, hogy ha az

$$x^2 \equiv (q(t) + 4)^2 - 4 \pmod{p}$$

congruentia gyökei $+c$, $-c$, akkor (8)-nak s_1 , s_2 megoldásaira nézve: $s_1 \cdot s_2 \equiv 1 \pmod{p}$. És itt nem lehet $s_1 \equiv s_2 \pmod{p}$, mert akkor (8)-at vagy $+1$, vagy -1 , mint kettősgyök kielégítené, s így a (8)-ból következő

$$q(t) + 2 \equiv q(s) - 2 \pmod{p}$$

reláció alapján, $s \equiv 1$ -ből $t \equiv -1$, az $s \equiv -1$ -ből pedig $t^2 + 6t + 1 \equiv 0$ adódnék, s mindezek feltételeinkkel ellenkezők. Így hát (8) megoldásaira szükségképen: $s(s^2 - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, a honnan *1. tételünk* szerint világos, hogy ha a -t a

$$q(t) + 2 \equiv q(s) - 2 \equiv 4(a + 1) \pmod{p}$$

congruentia alapján határozzuk meg, akkor a okvetlenül $b(t)$ szám lesz; q. e. d.

E meggondolásokkal *2. tételünk* első része be van bizonyítva. Térjünk át a (7) reláció igazolására.

E végből egy kis előkészületre van szükségünk, a mely valamelyest hosszadalmassá teszi ezt az egyszerű összeszámlálást.

Legyen egyelőre $p > 7$; és vegyük szemügyre a $t^2 + 6t + 1$ quadr. kifejezést mod. p , a melyet egyszerűség kedvéért $Q(t)$ -vel fogunk jelölni. Közvetlenül világos, hogy:

$$Q(t) \equiv Q(-t - 6) \pmod{p},$$

vagyis a $t + t_1 + 6 \equiv 0 \pmod{p}$ viszonylatnak eleget tevő t, t_1 értékek \pmod{p} ugyanazt a $Q(t)$ értéket szolgáltatják. Mármost, a míg t felveszi a $2, 3, \dots, p-2 \pmod{p}$ értéksorozatot, addig $-t-6$ felvesz egy értéksorozatot, a melyben a t által fel nem vett $0, 1, p-1$ értékek is okvetlen szerepelnek.

Mert

$$\left. \begin{aligned} t-6 &\equiv 0, \\ -t-6 &\equiv 1, \\ -t-6 &\equiv -1, \end{aligned} \right\} \pmod{p},$$

ha rendre:

$$\left. \begin{aligned} t &\equiv -6, \\ t &\equiv -7, \\ t &\equiv -5, \end{aligned} \right\} \pmod{p},$$

a mely maradékai t -nek, a míg $p > 7$, a $0, \pm 1$ értékektől \pmod{p} különbözőek. Ezek után könnyű látni, hogy a $t+t_1+6 \equiv 0 \pmod{p}$ congruentia azon t, t_1 megoldásai, a melyekben t a $2, 3, \dots, p-2$ sorból van véve, $\frac{p-1}{2}$ számú (t, t_1) párban foglalhatók össze, a melyekben $t \not\equiv t_1 \pmod{p}$, és egyetlen párban, a melyben $t \equiv t_1 \equiv -3 \pmod{p}$; és mindenkor:

$$Q(t) \equiv Q(t_1) \pmod{p}.$$

Ha $t \not\equiv t' \pmod{p}$ és $t(t^2-1), t'(t'^2-1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, továbbá

$$\left(\frac{Q(t)}{p} \right) = \left(\frac{Q(t')}{p} \right) = 1,$$

akkor, a 2. tétel első része szerint,

$$b(t) \equiv b(t') \pmod{p}$$

akkor és csakis akkor lehet, ha: $t \cdot t' \equiv 1 \pmod{p}$. Innen következik, hogy azon összetartozó t, t_1 értékek, a melyekre: $Q(t) \equiv Q(t_1); t \not\equiv t_1, t(t^2-1), t_1(t_1^2-1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, és $\left(\frac{Q(t)}{p} \right) = 1$, akkor és csakis akkor származtatják ugyanazt a $b(t)$ számosztályt \pmod{p} , ha $t+t_1+6 \equiv 0 \pmod{p}$ mellett még $t, t_1 \equiv 1 \pmod{p}$ is teljesül; a miből viszont

$$Q(t) \equiv 0 \pmod{p}$$

adódik, ellentétben a $\left(\frac{Q(t)}{p}\right) = 1$ egyenlettel. Vagyis tehát, ha $t + t_1 + 6 \equiv 0$, míg $t - t_1$, $t(t^2 - 1)$, $t_1(t_1^2 - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, továbbá

$$\left(\frac{Q(t)}{p}\right) = \left(\frac{Q(t_1)}{p}\right) = 1,$$

akkor bizonyos, hogy

$$b(t) \not\equiv b(t_1) \pmod{p}.$$

Tudnunk kell még, hogy a $(-6, 0)$, $(-7, 1)$, $(-5, -1)$ és $(-3, -3)$ párokhoz tartozó $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(-1)$, $Q(-3)$ számok mikor lesznek p -nek négyzet-maradékai? Látjuk, hogy:

$$\left(\frac{Q(0)}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) = 1,$$

vagyis $b(-6)$ és $b\left(-\frac{1}{6}\right)$ mindig existálnak. Kapjuk továbbá, hogy:

$$\left(\frac{Q(1)}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right); \quad \left(\frac{Q(-1)}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right); \quad \left(\frac{Q(-3)}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right).$$

Mínthogy pedig $\left(\frac{2}{p}\right) \cdot \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{-2}{p}\right) = 1$, azért a $\left(\frac{2}{p}\right)$, $\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{-2}{p}\right)$ értékek között mindig *páratlan-számú* $+1$ van, úgy, hogy a $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(-1)$, $Q(-3)$ számok között mindig *páros-számú* a négyzet-maradék mod. p . Legyen ez a páros szám $2 \cdot \lambda(p)$; a hol tehát:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha) \lambda(p) = 2, & \text{ha } p \equiv 1 \\ \beta) \lambda(p) = 1, & \text{ha } p \not\equiv 1 \end{array} \right\} \pmod{8}$$

s így a két eset egyesíthető a

$$\lambda(p) = 1 + \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right) \right) \cdot \left(1 + \left(\frac{2}{p}\right) \right) \quad (9)$$

formulában.

Jelentse mind ezek után $R(p)$ a:

$$Q(2), Q(3), \dots, Q(p-2) \quad (Q)$$

sorozatban foglalt mod. p különböző négyzet-maradékok számát. Ezek között lesz az a $2 \cdot \lambda(p)$ számú, a melyet a

$$Q(p-7), Q(p-6), Q(p-5), Q(p-3)$$

sorozat ad, s azonkívül még $R(p) - 2\lambda(p)$ számú, a melyek a $(2, p-2)$ számközből vett *bizonyos* $(t, t_1) - t + t_1 + 6 \equiv 0 \pmod{p}$ — párokhoz tartoznak. Legyenek ez utóbbiak:

$$(t^{(0)}, t_1^{(0)}), (t', t_1'), \dots, (t^{(\nu)}, t_1^{(\nu)}),$$

a hol $\nu = R(p) - 2\lambda(p) - 1$. Tudjuk, hogy $0 \leq i \leq \nu$ mellett:

$$\left. \begin{aligned} Q(t^{(i)}) &\equiv Q(t_1^{(i)}) \\ b(t^{(i)}) &\equiv b(t_1^{(i)}) \end{aligned} \right\} \pmod{p};$$

más oldalról azonban, ha csak $t(t^2-1) \not\equiv 0$, $Q(t) \not\equiv 0 \pmod{p}$; akkor,

$$Q(t) \equiv t^2 \cdot Q\left(\frac{1}{t}\right) \pmod{p}$$

miatt:

$$\left. \begin{aligned} Q(t) &\equiv Q\left(\frac{1}{t}\right) \\ \left(\frac{Q(t)}{p}\right) &= \left(\frac{Q\left(\frac{1}{t}\right)}{p}\right) \end{aligned} \right\} \pmod{p},$$

és továbbá, mivel t -vel együtt a tőle különböző $\frac{1}{t}$ is mindig a $(2, p-2)$ intervallumba esik, azért a (Q) -sorozat $R(p)$ -számú maradékához tartozó t -értékek, vagyis:

a $2\lambda(p)$ számú a $p-7, p-6, p-5, p-3$ sorozatból, és

a $\nu+1$ számú $(t^{(i)}, t_1^{(i)})$, $(i=0, 1, \dots, \nu)$

együttesen *socius*-párokba foglalhatók. Ha egy ilyen associált pár $\vartheta \cdot \vartheta' \equiv 1 \pmod{p}$, akkor, mint láttuk:

$$b(\vartheta) \equiv b(\vartheta') \pmod{p};$$

és viszont, e congruentiából következik, hogy ϑ, ϑ' , ha nem congruensek, akkor associáltak.

Mindeme megfontolások alapján látjuk tehát, hogy:

$$M(p; 3) = \frac{1}{2} \{2(R(p) - 2\lambda(p)) + 2\lambda(p)\} = R(p) - \lambda(p). \quad (10)$$

Hátra van most még, hogy $R(p)$ -t meghatározzuk. Ez ekként eszközölhető. Legyen $t(t^2-1) \not\equiv 0$ és

$$\left(\frac{Q(t)}{p}\right) = 1,$$

vagyis

$$t^2 + 6t + 1 \equiv r \pmod{p},$$

a hol r a $Q(t)$ négyzet-maradékkal congruens. Innen következik:

$$(t+3)^2 \equiv r + 8 \pmod{p},$$

azaz, ha $\frac{1}{r} \equiv r' \pmod{p}$ teszszük, $1 = \left(\frac{r}{p}\right) = \left(\frac{r'}{p}\right)$ miatt,

$$1 = \left(\frac{r+8}{p}\right) = \left(\frac{1+8r'}{p}\right),$$

tehát $1 + 8r'$ négyzet-maradék mod. p . Ha mármost az

$$x^2 \equiv 1 + 8r' \pmod{p}$$

congruentiának egy páratlan megoldása, a milyen mindig existál, $2m+1$, akkor

$$\left(\frac{m+1}{2}\right) = \frac{m(m+1)}{2} \equiv r' \pmod{p};$$

szóval:

minden olyan t -hez, a melyre $Q(t)$ négyzet-maradéka p -nek, tartozik p -nek egy oly négyzet-maradéka, a mely egyszersmind *trigonal-maradéka* is.¹

De megfordítva is áll a dolog; mert, ha az $r' \not\equiv 0 \pmod{p}$ négyzet-maradék, trigonal-maradék, akkor $1 + 8r'$ négyzet-maradék, $r \equiv \frac{1}{r'} \pmod{p}$ szintén az, azaz, vagy:

$$\left(\frac{r+8}{p}\right) = 1,$$

vagy pedig

$$r + 8 \equiv 0 \pmod{p};$$

mindkét esetben a

$$(t+3)^2 \equiv r + 8 \pmod{p} \quad (11)$$

¹ Ha $r+8 \equiv 0 \pmod{p}$, akkor:

$$r' \equiv -\frac{1}{8} \equiv \frac{1}{8} (p^2-1) \equiv \left(\frac{\frac{1}{2}(p^2-1)}{2}\right) \pmod{p}.$$

congruentia feloldható t -re, és bármelyik ilyen t megoldással

$$Q(t) \equiv r \pmod{p},$$

azaz $Q(t)$ négyzet-maradék mod. p . És az így nyert t -nek legalább egyikére $t(t^2 - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$; mert a (11) megoldásai:

$$\begin{cases} t_1 \equiv -3 + \sqrt{r+8} \\ t_2 \equiv -3 - \sqrt{r+8} \end{cases} \pmod{p},$$

azaz

$$t_1 + t_2 + 6 \equiv 0 \pmod{p},$$

s innen az állítás helyessége — a föntiek alapján — már nyilvánvaló. Nyilvánvaló végül, hogy a

$$t + t_1 + 6 \equiv 0 \pmod{p} \quad (12)$$

congruentiát kielégítő *különböző* (t, t_1) , (t', t'_1) párokhoz különböző r' -ök, és viszont is, (11)-nek mod. p különböző két r' -höz, tehát egyben két különböző r -hez tartozó t s illetve t' gyökei nem tehetnek eleget (12)-nek, azaz: $Q(t) \not\equiv Q(t) \pmod{p}$ négyzet-maradékokat származtatnak.

Ezzel ki van mutatva, hogy $R(p)$ egyenlő ama mod. p incongruens quadr.-maradékok számával, a melyek egyben trigonal-maradékok is.

E legutóbbi számosságot azonban közvetetlenül kapjuk 1. tételünk alapján. Nevezetesen:

A) ha $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ és $r \not\equiv 0 \pmod{p}$ p -nek maradéka, akkor:

$$\left(\frac{r}{p}\right) = \left(\frac{2r}{p}\right) = 1,$$

szóval, annyszor lesz $\binom{m+1}{2}$ quadr.-maradék, ahányszor $m(m+1)$, és megfordítva. Az utóbbi pedig bekövetkezik, valahányszor $m \equiv a(t) \pmod{p}$, tehát $\frac{p-3}{2}$ -ször. Az így keletkezett szorzatok azonban mod. p nem mind különbözők; t. i. $m \equiv a(t)$ és $m \equiv -a(t) - 1 \pmod{p}$ ugyanazt az r -et adják, és csakis ezek. Legyen mármost:

$$A_1) \left(\frac{-1}{p}\right) = -1, \quad p \equiv 3 \pmod{4}; \text{ akkor nem lehet}$$

$$a(t) \equiv -a(t) - 1 \pmod{p},$$

mert

$$\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} = -\binom{p+1}{\frac{p+1}{2}} = \left(\frac{-2}{p}\right).$$

Itt tehát:

$$R(p) = \frac{p-3}{4}.$$

$A_2) \left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, $p \equiv 1 \pmod{4}$; akkor hasonlóan kapjuk:

$$\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right) = \left(\frac{\frac{p+1}{2}}{p}\right)$$

alapján:

$$R(p) = \frac{p-1}{4}.$$

Ha azonban

$B) \left(\frac{2}{p}\right) = -1$ és $r \not\equiv 0 \pmod{p}$ p -nek maradéka, akkor

$$\left(\frac{r}{p}\right) = -\left(\frac{2r}{p}\right) = 1,$$

vagyis valahányszor $\binom{m+1}{2}$ maradék, mindannyiszor $m(m+1)$ nem az, és vice versa. Van összesen $p-2 = \frac{p-3}{2} = \frac{p-1}{2}$ nem $a(t)$ szám; úgy hogy ha

$B_1) \left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, akkor

$$R(p) = \frac{p-1}{4};$$

ha pedig

$B_2) \left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, akkor

$$R(p) = \frac{p-3}{4} + 1 = \frac{p+1}{4}.$$

Az összes eseteket felöleli a közös,

$$R(p) = \left[\frac{p}{4}\right] + \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right)$$

kifejezés, a melyet és $\lambda(p)$ -nek (9)-ből vett alakját (10)-be helyettesítvén, kapjuk tényleg a 2. *tétel* (7) formuláját $M(p; 3)$ -ra. Q. E. D.

Hátra van, hogy a (7) egyenletet igazoljuk $p < 7$ -re, tehát a 3, 5 és 7 primekre. A tabella:

$p =$	3	5	7
<i>Res.</i> :	1,	1, 4;	1, 2, 4,
<i>Non-Res.</i> :	2;	2, 3,	3, 5, 6;

közvetlenül meggyőz, hogy:

$$M(3; 3) = M(5; 3) = M(7; 3) = 0,$$

és ugyancsak zérus értékét ad a (7) jobboldalán álló kifejezés, ha abba p -re 3-at, 5-öt avagy 7-et írunk.

Tehát a (7) formula általánosan érvényes minden egynél nagyobb racionális páratlan prim p -re.

★

2. *tételünkkel* kapcsolatban néhány észrevételt óhajtunk még tenni.

Közvetlenül belátható, hogy az $M(p; 2) - M(p; 3)$ különbség megadja a pontosan *másodfokú* a -knak a számát, tehát a melyekre:

$$n(p, a) = 2,$$

vagy még másképen, a melyek az

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a+1}{p}\right) \mp \left(\frac{a+2}{p}\right)$$

relációt kielégítik. Az $M(p; 2)$, $M(p; 3)$ főntebb kiszámított értékeivel találjuk, hogy:

$$M(p; 2) - M(p; 3) = \left[\frac{p}{4}\right] + \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p}\right)\right);$$

a honnan következik, hogy másodfokú szám *maximum hárommal* több lehet mod. p , mint olyan, a melynek fokszáma ≥ 3 .

A $b(t)$ -számoknak explicit felírása a t parameterben kifejezve általában bajosan eszközölhető; csupán egy egvértelmű eljárás az, a melyet a megelőzők alapján könnyű összeállítani,

és a mely minden próbálgatás nélkül az összes $b(t)$ -számokat és csakis ezeket szolgáltatja.

Ha azonban $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ és az $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$ -nek egy megoldása, jelöljük $\sqrt{2}$ -vel, ismeretes; akkor felírhatjuk a $(2, p-2)$ számközből veendő t -ben kifejezve, azokat a t' értékeket, a melyekkel, és csakis a melyekkel alkotott $a(t')$ -ök egyben $b(t)$ -számok is.

Ez a kifejezés, a melynek megállapítása a föntiek alapján semmi nehézséggel nem jár, egyszerűen a következő:

$$t \equiv -3 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \pmod{p};$$

a hol $t(t^2 - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$ és a $\sqrt{2}$ előjele úgy választandó, hogy $t'(t'^2 - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$ legyen, a mi — miként láttuk — mindig elérhető, hacsak $p > 7$. Észreveszszük itt, hogy a mod. p másodfokúnál nem alacsonyabbfokú $a(t)$ a független t -ben *másodfokú*, míg a harmad- avagy magasabbfokú $b(t)$ már t -ben *negyedfokú* törtkifejezés.

Természetszerűleg várható, hogy azok a nehézségek, a melyek már a $k = 2$ esetről a $k = 3$ -ra való áttérésnél jelentkeztek, csak fokozódnak, a mint k -nak mind nagyobb és nagyobb értékeire térünk át; ezen az alapon tagadhatatlan, hogy e témakörben a vizsgálódásnak bőséges tere vár még megmunkálásra.

ELMÉLETI MECHANIKAI TECHNOLOGIA

ezímű munkájának I. kötetét bemutatta

REJTŐ SÁNDOR I. t.

Méltóságos Elnök Úr! Tekintetes III. osztály!

Szerencsém van a deczember hó végén megjelent Elméleti Mechanikai Technológiám első kötetét azzal a tiszteletteljes kéréssel átnyújtani, hogy azt Akadémiánk könyvtára részére elfogadni kegyeskedjék.

Munkám alapját azok az elvek alkotják, melyeket székfoglalómban volt szerencsém ismertetni.¹ Ezek a következők: a molekulák mozgást végeznek, mozgásuk következtében ütköznek, a mi feszültséget okoz, tömegükkel pedig vonzzák egymást; ha e tömegvonzás nagyobb az ütközésből eredő feszültségnél, e kettő közötti különbséggel egymáshoz kapcsolódnak s ezt *cohæsiónak* mondjuk. A cohæsio következtében a molekulák elemi csoportokká, a csoportok magvakká, a magvak pedig — kristályos molekulák esetén — szemcsékké, sőt kifejlett kristályokká csoportosulhatnak; de az ekként csoportosult molekulák az űrt teljesen ki nem tölthetik, mert forgó s rezgő mozgásuk végzésére szabad-űrre van szükségük; ezeket az üregeket, a melyek a csoportok között vannak, *intermolekuláris* üregeknek nevezem.

Ez elvekre támaszkodva a következő eszmemenetet követtem:

¹ A maradó, vagyis az ideigtartó és a maradandó alakváltozások mechanikájának alaptételei és alkalmazásuk. Mathem. és Természett. Értesítő XXXII. kötete. 257—317. l. 1914.

Minthogy tömegvonzása minden anyagnak van, ebből következik, hogy két szomszédos test részecskéi, ha különböző anyagból valók is, vonzzák egymást. Ámde a szomszédos tömegnek a hozzá legközelebb álló csoport legkülsőbb molekulájára kifejtett vonzása ellentétes értelmű a csoportbeli anyag vonzásához képest, ezért ez csökkenti a molekulák cohäsióját. Ha tehát e vonzás nagyobb a cohäsiójánál, akkor a legszélsőbb molekula felszabadul a cohäsió hatása alól és a vonzó tömeg hatását követve, azzal közeli érintkezésbe jut. De a mikor e kétféle anyag molekulái egymással érintkeznek, ütköznek is, így ütközésük következtében közöttük feszültség támad. Ha ez a feszültség nagyobb a szomszédos tömegvonzásnál, a vonzott molekula ismét eltávolodni kénytelen; ha egyenlő, a vonzó tömeg szomszédságában megmaradhat, tehát *adhaesiósan* kapcsolódhatnak; ha pedig a feszültség kisebb, akkor e molekula és a vonzó tömeg között a cohäsió hat, kapcsolódásukat ezért *cohäsiósnak* mondjuk. Két vagy többféle anyagnak cohäsiós kapcsolódását *oldásnak* nevezzük.

Minthogy az oldott anyag az oldószerben különféleképpen helyezkedhetik el, elhelyezkedése szerint az oldásnak három fokozatát különböztetem meg. *Elsőfokúnak* nevezem az oldást, ha az oldott anyag molekulái az oldószer intermolekuláris üregeiben helyezkednek el; *másodfokúnak*, ha azok az oldószer elemi csoportjaiban egyes molekulákat helyettesítenek, és végül *harmadfokúnak*, ha anyaguk az oldószer molekulájának alkotórészévé válik, vagyis ha a két anyag chemiailag egyesült. Az oldatokban az anyagok kapcsolódása mindaddig cohäsiós, míg azok fel nem bomlanak. Bomlásuk, éppúgy mint képződésük, a hőfok függvénye. Legszűkebb hőfokhatárok között áll fenn a másodfokú oldat. Ha ez felbomlik, alkotói különváltan csoportosulnak. Ha csoportosulásukhoz elég idő áll rendelkezésükre, kapcsolatuk *adhaesióssá* válik, különben túalakúak s ekkor részben még cohäsió s a kapcsolatuk.

Azt, hogy az oldás létrejöhet-e, a kísérleti adatokból megszerkesztett állapotábrákból, az oldás létrejöttét, valamint annak fokát és állapotát pedig mikroszkopi vizsgálattal mindenkor meg lehet állapítani s így ez úton a kapcsolás módjára is lehet

következtetnünk. Ezért a mikroskopi vizsgálattal és az állapot-
ábrák alakjával és szerkesztésükkel behatóan foglalkozom.

Ezek után az oldatok mechanikai tulajdonságainak kutatására tértem át.

Minthogy a különböző anyagokból álló, de egyenlő fokú oldatok szerkezete azonos, feltételeztem, hogy azok mechanikai tulajdonságai minőségileg szintén megegyezők. Álláspontom helyességét kísérleteim igazolták. Ezekből ugyanis kitűnt, hogy a fémek elsőfokú oldatai szivósak és képlékenyek, fel nem bomlott másodfokú oldatai ugyanilyenek, felbomlott másodfokú oldataik, ha az alkotók lamellásan csoportosulnak (ilyen a perlit), szivósak, de nem képlékenyek, ha pedig túalakú csoportokat alkotnak (ilyen a martensit), akkor ridegek; harmadfokú oldataik pedig mindig ridegek.

Az egynemű (egyféle fokozatú) oldatok mechanikai tulajdonságait ismerve, a különféle fokú oldatok egymásra való hatását állapítottam meg. Ebből az tűnt ki, hogy a felbomlott másodfokú oldatok rohamosan csökkentik az elsőfokú oldatok képlékenységet és kisebb mértékben egyenletes nyúlását is, keménységüket azonban növelik; továbbá, hogy a harmadfokú oldatok nemesak a képlékenységet, de az egyenletes nyúlást is rohamosan csökkentik, a keménységet pedig nagyobb mértékben növelik.

Az oldatok mechanikai tulajdonságait ismerve, tanulmányom eredményeit a különleges aczélfajták gyártására igyekeztem alkalmazni, mert ma ezek birnak nagy fontossággal.

Hogy feladatomat megoldjam, az aczél alkotó elemeinek a tiszta vas-szén-ötvözetek mechanikai tulajdonságaira gyakorolt hatását tanulmányoztam. Minthogy GUILLET tanulmányai alapján ismeretessé vált, hogy az összetettebb vasötvözetekhez használt alkotó fémek a vas-szén-ötvözetekkel egyidejűleg különböző fokú oldatokat alkotnak és hogy ez oldatok foka az oldott anyag viszonylagos mennyiségével változik, s mert GUILLET azokat a mennyiségeket is megállapította, a melyek mellett az oldat tisztán martensites vagy tisztán perlites szerkezetű, tehát csak másodfokú, vagy csak cementites szerkezetű, vagyis harmadfokú: így feladatom abban állott, hogy azt a mennyiséget állapítsam meg, a melyen alól kizárólag elsőfokú oldatuk keletkezik;

továbbá azt, a melyen alól, habár kétféle oldat keletkezik, az elsőfokú oldat azonban nagyobb mértékben képződik, mint a másodfokú, mert az előbbieket szerint az aczél szívósságára és képlékenységeire a különböző fokú oldatok keverékének aránya bír befolyással.

E határok ismeretével módomban állott az alkotóknak a mechanikai tulajdonságokra gyakorolt hatását grafikailag ábrázolni s mert ez ábrák szabályos alakúak voltak, azok algebrai képletét is meghatározhattam s ezzel feladatomat teljesen meg is oldottam.

E képletek alapján ugyanis a chemiai analysis adataiból kiszámíthatjuk a kilágyított aczél tényleges mechanikai tulajdonságait, nevezetesen annak rugalmassági határát, legnagyobb keménységét és egyenletes nyúlását, tehát szívósságát és azonkívül a képlékenységet; de kiszámíthatjuk ezekkel azt is, hogy milyen mennyiség kell valamelyik alkotóból, hogy az aczél a megkívánt tulajdonságokkal felruházzuk és abban az esetben, ha valamely alkotó fogytán volna, kiszámíthatjuk, hogy a rendelkezésre álló alkotókkal mily mértékben pótolhatnók azt.

Útmutatásaim alapján tehát a különleges aczélok gyártásánál az eddig divó empirikus próbálgatások helyett tudományos alapon nyugvó számításokat alkalmazhatunk, a fogytán levő alkotókat a leggazdaságosabban felhasználhatjuk s pótlásuk módját is kijelölhetjük.

A különböző fokú oldatok mechanikai tulajdonságait ismerve, módomban állott mindazokat a technologiai műveleteket, a melyeknél a belső erők viszonyát melegséggel vagy melegséggel és külső tömegek vonzásával megváltoztatjuk, egységes rendszerbe foglalni. Példaként csak a bevonást és a forrasztást említem fel. E műveletekkel kétféle anyagot cohesiós kapcsolatba kell hoznunk, de oly hőfokon, hogy a bevonandó vagy forrasztandó anyag meg ne ömöljön. Ez utóbbi feltétel a harmadfokú oldatok alkalmazását kizárja. Minthogy a másodfokú felbomlott oldatok gyors lehűtésekor ridegek, bevonásra ezek sem olyan alkalmasak, mint a képlékeny elsőfokú oldatok.

Minthogy az, hogy valamely fém melyik másik fémmel vagy ötvözzel alkot elsőfokú oldatot, az állapotábrákból le-

olvasható, enélfogva ezen az úton megállapítható nemcsak az, hogy az adott fém milyen másik fémmel vonható be és milyen-nel forrasztható, hanem megállapítható a bevonáshoz és forrasztáshoz alkalmazandó hőfok is.

Az elvontnak látszó alaptól kiindulva tehát oly gyakorlati kérdéseket oldhatunk meg, a melyeket eddig csak sok évre terjedő gyakorlat alapján tudtak megoldani.

Ezekben volt szerencsém a könyvemben foglalt eszmemenetet ismertetni.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 január 17.-én tartott üléséből.)

A PÓKOK HARÁNTCSÍKOLT IZOMROSTJAINAK SZÖVETTANI SZERKEZETE.

LENDL ADOLF-tól

(Kivonat.)

Az izeltlábú állatok harántcsíkolt izomrostjait már sokan tanulmányozták, azonban főképen csak a rovarok egyes fajaira terjesztették ki figyelmüket, ellenben a pókok izomszövetének vizsgálatával alig foglalkoztak. Abban a föltevésben élt mindenki, hogy lényegében, sőt bizonyára a részletekben is ugyanolyan lehet a szerkezete, mint a rovaroké.

Ámde az idevonatkozó tüzetesebb vizsgálatok mást tanúsítanak, mert egyrészt a pókok izomszövete a részletekben több olyan szerkezeti sajáttságot tüntet fel, a milyent a rovarokéban eddig nem észleltek, másrészt e vizsgálatok eredményei az egész csoportot illetőleg néhány általánosabb megállapításra is vezetnek az izomrostok ismeretében.

Az Arthropodák izomrostjainak alkotó részei — az általánosított schema szerint — a következők: finom, hosszú fibrillák párhuzamosan futnak egymás mellett a vékonyabb vagy vastagabb nyalábban, melyet a külső burkoló hártya (*sarcolemma*) lazán körülfog; e hártyán belül és a fibrillák között hig plasmaszerű folyadék (*sarcoplasma*) tölti ki a hézagokat s ebben fekszenek a magvak is, részben a burok alatt, részben a fibrillák között.

A pókok izomrostjain e tekintetben lényeges eltérések láthatók: a fibrillák nyalábja és a külső burok hasonlóképen megvan, mint más Arthropodák izomrostjaiban, de a fibrillák

között csekély mennyiségű híg folyadékot találunk, melyet *rostnedvek* nevezek, mert határozottan különbözik a nyaláb körül lévő sűrűbb és többféle szemcsét tartalmazó *rostplasmától*. Az utóbbiban széles *harántszalagok* alakulnak ki olyformán, hogy a fibrillanyalábot abroncsok módjára körülfogják. Az úgynevezett izommagvak sem hiányzanak a pókok izomrostjaiból, ezek azonban nem tartoznak az izomszövethez, hanem a rostba vándorolt vérsejteknek, illetőleg ilyenek maradék-magvainak felelnek meg.

A fibrillák apró, erősen fénytörő pálczikákra tagolódnak, melyeket gyengébben fénytörő ragasztó-anyag keskeny sávok alakjában köt össze egymással. Az egyes fibrilláknak, de az egész nyalábnak a harántcsíkoltóságát is ezeknek a kétféle fénytörésű részeknek szabályos váltakozása idézi elő.

A pálczikáknak ismerete eddig hiányos volt, mert nem sikerült őket kellően izolálni, a mi a vizsgálást rendkívüli módon megnehezítette. Toluollal kevert táblaolajban azonban könnyen elválnak egymástól a fibrillák, sőt pálczikáik is; megfelelő nagyítás használatával tehát jól vizsgálhatók, azért is, mert az olajnak észrevehetően más a fénytörése. Minden pálczika tulajdonképpen három részből áll: két végén egy-egy *fejecskéje* van s ezeket a *középrész* köti össze egymással. A fejecskék közönséges világításban erősebben fénytörők, ezért élénkebbek és poláros fényben határozottabban kettős fénytörésűek, mint a középrész; optikai tekintetben tehát megkülönböztethetők egymástól, azonban még észrevehetőbb az eltérés abban, hogy ha az izom összehúzódott vagy kinyúlt, akkor csak a középrész nyúlik meg vagy húzódik rövidebbre, egyúttal vékonyodik vagy vastagodik, a mint ez hosszanti metszeteken látható. A tipusos izomrostok megrövidült fibrilláiban a pálczikák 5—6-szor, a kinyújtott fibrillákban pedig 9—10-szer olyan hosszúak, mint a milyen szélesek.

A pálczikák ragasztó anyaga okozza az egész nyaláb egyetlen állandó harántcsíkját, a melyet *közbülső határcsíknak* (Zwischenstreifen) nevezhetünk s a mely elhatárolja egymástól a fibrilla-tagokat; a pálczikák középrésze különösen a megnyúlt nyalábokon tünteti fel a *középcsíkot* (Mittelstreifen); a fejecskék-

nek ámbár nagyon csekély lefűződése idézi elő a *mellékcsikot* (Nebenstreifen) és végül a fejecskéknek egész harántsora adja a mindig világosnak látszó *névtelen csikot*, a melyet az irodalomban *E*-vel jelölnek. Az elsőnek kivételével minden csik változékony, sőt egyik-másik közülük gyakran hiányzik is, a szerint, hogy a pálczikák pillanatnyilag milyen állapotban vannak.

Régebben a szerzők a csikokat a nyalábon keresztül haladó elválasztásoknak s ezért a szelvényeket korongoknak tekintették; újabban ezt a nézetet elejtették ugyan, azonban a fibrillák között finomabb összeköttetéseket (Fadennetze) véltek felismerhetni. A pókok izomrostjaiban a fibrillák között semmiféle összekötő szálakat sem lehet találni; mindenütt csak a híg rostnedvet látjuk a fibrillanyaláb hézagaiban, melyet pikrokarminnal sötétpirosra, methylenkék-ammonium-pikráttal zöldre s legszebben hæmatein *I. A*-val, APÁTHY-féle utánaranyozással lehet megfesteni. A nyújtott fibrillák között könnyebben észlelhetjük a rostnedvet, mint a megrövidült nyaláb közeiben.

Az előbbi esetben sötétszínű vonalak alakjában mutatkozik a rostnedv (Längsstreifen der *Q*-Scheibe) a pálczikák középrészei között, mely tulajdonság vékony hosszmetseteken elég feltűnő. Az egész nyalábot körülfogó rostplasma ellenben methylenkék-ammonium-pikráttal ibolyaszínűre festődik, tehát határozottan megkülönböztethető a rostnedvtől.

A fibrillanyaláb nem olyan tömött, mint a milyennek a szerzők a rovarokét általában mondják és rajzolják; ellenkezően vannak benne hosszantvonuló finomabb és szélesebb hasadások, csatornák, hézagok és ezenfelül az egész nyaláb hossztengelye körül kissé csavarodott; a fibrillák pedig rövidebbek lévén, mint az egész rost, kívülről befelé vonulnak a kötegbe olyformán, mint a lazán sodrott (nem fonott) kötélben a kenderszálak, ámbár természetesen sokkal enyhébb csavarodással. Ennek következtében a rost minden összehúzódása vagy megnyúlása alkalmával lazább vagy feszesebb, azaz tömöttebb lesz és ezzel maga a nyaláb saját munkájával folytonosan magába szívja a felületen lévő rostplasmát, illetőleg kiszorítja magából a fölösleges vagy elhasznált folyadékot.

A rostplasma ugyanis vékonyabb vagy vastagabb rétegben

borítja a fibrillanyaláb egész felületét. A rendkívül finom, *minimális szemecskékkel* telt folyadékban gyérebben elszórt *nagyobb plasmaszemecskéket* is látunk; továbbá zsírnak látszó *gömböcskéket* és végül itt-ott szögletes, sötétszínű *rögöcskéket*, melyek valószínűen kiválasztott és talán csak ideiglenesen lerakódott anyagok.

A minimális szemecskék esetleg azonosak a rostnedvben látható finom szemecskékkel, egyformán festődnek is; a nagyobb plasmaszemecskék erősen fénytörők, de nem festődnek és a nyaláb belsejébe húzódó rostplasmával együtt a fibrillák közé kerülnek, a hol ritkásan a fibrillák mentén helyeződnek el néhol rövid hosszantmenő sorokban, többnyire azonban csak a pálczikák ragasztója, tehát a határcsik mellé (*J-Körner*). A zsírgömbök nem jutnak a fibrillanyaláb belsejébe, hanem a külső rostplasmában maradnak; helyenkint nagyobb számmal találhatók, azonban többnyire igen gyéren vannak elszórva, sőt sok esetben teljesen hiányzanak, mert úgy látszik, a rostplasmában felhasználtnak.

A nagyobb plasmaszemecskék, ott a hol a rostplasma dúsan és vastagabb rétegben borítja a nyalábot, kis csoportokba verődnek s ezek körül sűrűbben tömörül a plasma; ennek folytán apró és valamivel sötétebb csomók keletkeznek benne. Ezek a kis csomók kettős harántsorokba rendeződnek a fibrillanyaláb felületén olyformán, hogy szabályosan éppen a pálczikák középrészeire rakódnak le (*(J-Körner?)*). Majd a csomók harántirányban folynak össze egymással, de hosszanti irányban is kettesével összenőnek, miáltal széles, lapos piskótaformájú *táblácskák* keletkeznek belőlük, a melyek szorosan egymás mellett fekvé, az egész nyaláb körül vonuló széles szalagokat alkotnak. Így alakulnak ki a *harántszalagok* a külső rostplasmarétegben, a hol nagy számmal, mint sűrűn egymás mellé sorakozó abroncsok borítják be a fibrillanyalábot az izomrost egész hosszában.

Friss izmokban húsos, puha a consistentiájuk és halavány sárgás a színük; gyenge borszeszben sokáig ázott rostokban kissé megmerevednek, úgy hogy a rostok szétpamatolása közben darabokban válnak le a nyalábról, a mikor könnyen vizsgálhatók.

A harántszalagok a nyalábon természetesen fölötte komplikálják annak harántesikoltságát, még pedig nemcsak saját fénytörésük következtében, hanem azért is, mert a széleik külön harántesikokat is idéznek elő a képen. Ezeknek a harántvonalaknak eredetét és jelentőségét eddig nem ismerték, azonban a harántesikoltságnak ezt a teljesebb megjelenését az Arthropodák *másodfokú harántesikoltságának* nevezték s ezek az átlátszó, széles harántszalagok a maguk egészében valóban azt a látszatot adják az izomrostnak, mintha korongokból volna összerakva. Innen ered a régi tévedés, melyhez azonban egyes újabb szerzők is ragaszkodnak még (HEIDENHAIN: Inophragmen).

Ezek a harántszalagok még egy különös csalódást okoznak a mikroskopi képen; nevezetesen a rostok általában nem kerek hengerek, hanem tompa élek vonulnak végig rajtuk, a miért keresztmetszetük többnyire sokszögű; ezenfelül a látszólagos korongok többnyire nem fekszenek egyenesen harántul a rostban, hanem kissé rézsút, minek következtében a sűrűn egymás mellett lévő szalagok a rosthártya alatt vonuló spirális látszatát keltik a szemléelőben. Olyan csalóka ez a kép, a melyet főként a plasmában dús rostokban a jól fejlett és határozott szélű harántszalagok tüntetnek elő, hogy kezdetben magam is mindig csak a rostoknak spirális szerkezetét láttam. DADAY az *Ostracoda*-rákok izomrostjairól írt tanulmányában mint első említi ezt a spirális szalagot és több új megfigyelést kapcsol hozzá; MÜNCH pedig újabban a rovarok izmairól szólva, bőven fejtegeti a rostoknak ezt a spirális szerkezetét; a többi szerző azonban nagyon tartózkodóan nyilatkozik róla és úgyszólván mindig csak a fibrillanyalábbal foglalkozik, mintha ez maga volna az egész rost.

Hogy azonban ezt a szemet megtévesztő képet nem spirális, hanem külön-külön gyűrűs szalagok okozzák, arról e harántszalagok keletkezésének tanulmányozásakor győződtem meg, miután ilyen gyűrűs harántszalagokat egy folyton kinyúló ismét összehúzódó kaucsukcsővön — természetesen az izomrosthoz viszonyítva óriási arányban — gelatinás vagy más félig folyós anyagokból mesterségesen sikerült előállítanom.

A harántszalagokat különben többféleképen festhetjük.

Pikrokarmin, APÁTHY-féle hæmateïn I. A., methylenkék és toluidinkék sötétebbre festik őket, mint a rost egyéb részeit; a BETHE-féle methylenkék-molybdænsavas-ammonium ibolyaszínt kölcsönöz nekik a kékszinű nyalábon; RAMÓN Y CAJAL ezüstnitrát-pyrogallol-módszere a rostplasmában keletkező csomókat jelöli meg az által, hogy sötétebb szürkés színűre festi őket, de a legérdekesebb eredményekre vezet a GOLGI-féle gyors ezüstözés (némi változtatással az előleges kezelésben), mert ez a külső rostplasmaréteget helyenként sárgás-barnásra színezi, a benne lévő csomókat és ezeknek harántsorait a nyalábon, tehát a keletkező szalagokat barnára festi, sőt a határozottan kialakult harántszalagokat néhol — nem mindenütt — sötétbarna, csaknem fekete abroncsok alakjában tünteti fel.

Ezek az abroncsok éppen olyan szélesek, mint a pálczikák középrészei s így teljesen beilleszkednek a fibrillanyaláb általános harántcsíkoltóságába. Vannak közöttük helyenként keskenyebb ilyen abroncsszerű sorok is, melyek a határesíkon fekszenek; ezek valószínűleg az oda sorakozott zsírgömböcskék harántsoraiból alakulnak ki.

Ezzel a módszerrel a fibrillanyaláb belsejébe szívódó rostplasmát is sárgásra-barnásra festhetjük s ekkor a haránt- és hosszmetsetekben moiré-szerű és sugaras rajzokban látjuk annak nyomait.

Szebben mutatkoznak e rajzok a metsetekben az említett BETHE-féle módszer használata folytán, a midőn a kék fibrillanyaláb belsejében ibolyaszínűek.

A harántszalagok, úgy látszik, nem állandó részei az izomrostnak, hanem helyenként és időnként eltűnnek vagy újból alakulnak s ezért lehet őket egy és ugyanazon az izomroston a kialakulásnak különböző állapotában találni. Az erőteljes és sok munkát végző izomrostokon határozottabban fejlődnek ki, mint a ritkán működőkön, vagy inak módjára elváltozottakon; szintűgy hiányzanak kiehezett pókok izmaiból.

Mindezek alapján nagy valószínűséggel tehető fel, hogy a harántszalagok tulajdonképen az izomrostok táplálására szolgáló tartalékanyagokból rakódnak le a külső rostplasmarétegben.

A rosthüvelyt általában csak szerkezet nélkül való hártya-

nak mondják a szerzők, pedig ezen is van érdekes megfigyelni való. A rosthüvely ugyanis a rost körül futó *harántránczokat* tüntet föl, a melyek szintén beilleszkednek a harántesikoltságba, mert szabályszerűen a harántszalagok közé, vagyis a határcsik fölé esnek. E ránczok szélei a mikroskopi képben a különböző beállítás szerint változtatják a helyüket; ide-oda tolódnak s ezért contractiós vagy közeledő csikoknak nevezték el őket (Kontraktions- oder Annäherungsstreifen).

Ha megnyúlik az izomrost, a hüvelyhártya felületén kismúlnak a harántránczok; azonban e hártyának még finomabb hosszantmenő *redőzőtlisége* is van, mely viszont eltűnik, ha a rost megrövidül, azaz megvastagodik. Lényeges továbbá az az új megfigyelésem is, hogy a rosthüvely tulajdonképen *alul és felül nyitott cső*, úgy hogy az izomrost körül lévő vérből bizonyos vérsejtek es illetőleg ilyeneknek a magvai a hártyán belül, magába az izomrostba kerülhetnek.

A vérsejteknek egyik faja a rosthüvely alatt marad és ott szétfolyó plasmatestük a rostplasma mennyiségét szaporítja — a rostplasma tehát ezért sem egyértékű az eredeti sarcoplasmával —, a vérsejtek másik részének a magvai pedig magába a fibrillanyaláb belsejébe jutnak, a hol az izomrost munkája folytán — vagyis az ismételt összehúzódások és kinyúlások következtében — folytonosan változó nyomásnak kitéve, a legkülönbözőbb alakot vesz fel és a fibrillanyaláb hasadékaiban néha hosszú sorokba rendeződnek, míg végül szemlátomást szétesnek.

A szerzők gyakran említik ezeket a magvakat és kétféleségüket is elismerik, mert sarcolemma- és izommagvaknak nevezik őket, azonban eredetüknek, gyakran meglepő nagy számuknak, valamint sajátosságos alakjuknak magyarázatát adni eddig nem tudták.

Ezeket a magvakat az APÁTHY-féle hæmatein I. A-val lehet a legkönnyebben megfesteni, a midőn belső szerkezetük, chromatintartalmuk és csavarodott alakjuk is szépen feltűnik.¹

¹ Ezt az utolsó sajátosságukat legelőször DADAY jegyezte fel az irodalomban.

És hogy ezek a magvak csakugyan az izomszövetbe emigrált, idegen részek, melyek sem a rostplasmával, sem a rostnedvvel semmi-nemű összefüggésben sem állnak, arról szembeötlő módon meg-bizonyosodhatunk, ha az izomrostok metszeteit ultravilágítással vizsgáljuk. E magvaknak ilyenkor úgyszólván kivétel nélkül élénken fénylő, külön konturvonalaik vannak a sötét mezőben, felületük tehát érintetlen és folyadék nem tapad hozzájuk.

Minden típusos izomrostnak a két vége mindig kétféle; az egyik (a felső) szélesen tapad a hypodermis-sejtekhez s ez a mozdulatlan tapadás pontja; a másik (az alsó) vége rendszerint rövidebb vagy hosszabb innal van összeköttetésben és így járul a mozgatható ponthoz. A rost hüvelyhártyája a felső végén a hypodermis-sejtréteg alaphártyájába (Basalmembran) folytatódik, de olyformán, hogy az összefüggés övében elég nagy nyílások, kerek lyukak maradnak. Ha néha sikerül a rosthüvelyt a hypodermis alaphártyájáról letépni, akkor ennek széle körös-körül mindig rojtos, és pedig elég szabályosan, mert e rojtok alkották az átvezető nyílások széleit. Itt hatolnak be a vérsejtek és ezeknek már különváló magvai a rosthüvely alá; a véráram, melyet külön vérutak vezetnek éppen az izomrostok felső tapadásához, százával hozza ide és sodorja a hártyák nyílásaihoz ezeket a sejteket és magvakat, mi által az izomrost tövéhez jutnak és az izomrost munkájával kapcsolatosan erősödő vagy gyengülő nyomások változása folytán behúzódnak annak belsejébe.

Erre a behatolásuk útján való elrendeződésükből lehet következtetni; sőt találni közöttük olyanokat is, melyek éppen a rosthüvely rojtjai és az alaphártya között fekszenek.

Az itt elmondottak mind csak a pókok típusos izomrostjaira vonatkoznak. A rostok kisebb-nagyobb számban izmokká tömörülnek, a melyek különböző más szövetekkel: a hypodermissel, kötőszövettel, idegekkel függnek össze; erről azonban, valamint az izomrostok histogenesiséről egy másik dolgozatomban szándékozom beszámolni.

A STATIKAI FREQUENTIA-ÁTALAKÍTÓK ELMÉLETÉHEZ.

KORDA DEZSŐ-től.

1. — A radiotelegraphia céljaira oly szapora váltakozású áramokat használunk, melyeknek másodpercenkénti periodusszáma a 30,000, sőt 100,000-et meghaladja. Közöséges váltakozó áramú dynamogépeknél a kerületi sebesség, valamint az elhelyezhető polusok száma korlátozza az elérhető periodicitást, úgy, hogy a fentebbi számok megvalósítása igen nagy nehézségekbe ütközik.

Jelen sorok írója az 1893. évben közzétett dolgozatában ¹ megmutatta a módját, hogyan lehet egyszerű elrendezéssel a periodusszámot megháromszorozni a nélkül, hogy a gép fordulatszám és a polusok száma megváltoztatnák. A cél úgy volt elérhető, hogy forgó mágnesstérrel gerjesztett háromfázisú generátornál a rotor ω sebességéhez képest a benne 2ω relatív sebességgel forgó indukált mágnesstér forgási iránya egy segéd-tárcsában két áramfázis vezetőjének keresztezése segítségével ellenkezővé tétetett, úgy, hogy a térben $\omega - 2\omega = -\omega$ helyett $\omega + 2\omega = 3\omega$ sebességgel forogjon és így a térben mozdulatlan tekercsekben háromszorta nagyobb frekvenciájú áramot indukálhasson.

Ez az eljárás azóta a gyakorlatban is felhasználtatott változtatlan elrendezéssel BETHENOD ² által, indukciós elrendezéssel pedig GOLDSCHMIDT ³ által ismert magas frekvenciájú alternátorok szerkesztésénél, melyek a radiotelegráfiában jól beváltak.

¹ D. KORDA. Verdreifachung der Wechselzahl von Sinusströmen. Elektrotechnische Zeitschrift, 1893, S. 355 és Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris. Tome CXVI.

² L' Industrie Electrique. Paris. 1913.

³ Elektrotechnische Zeitschrift. 1911. S. 54.

2. Időközben mások még inkább egyszerűsítették a problema megoldását, a mennyiben nem dynamikus úton, hanem teljesen nyugvó készülékekben, statikai frekvencia-transzformátorokban eszközlik valamely váltakozó áram periodusszámának megduplázását vagy megháromszorozását.

Az első, a kinek ez sikerült, EPSTEIN (1902), frankfurti tanár volt, a LAHMEYER-féle villamossági gépgyártársaság igazgatója,¹ a kinek átalakítója megduplázza az eredeti primáráram periodusszámát. Elvét a gyakorlatban egyrésztől gróf ARCO,² a TELEFUNKEN-társaság igazgatója valósította meg, másrésztől JOLY³ francia mérnök és VALLAURI⁴ olasz elektrikus. Mindeme készülékek egyfázisú árammal dolgoztak. Háromfázisú készüléket szerkesztett azóta ugyanez elv segélyével SPINELLI⁵ és már előzőleg TAYLOR,⁶ mindketten oly módon, hogy egyúttal a háromfázisú áramot egyfázisúvá átalakították.

Az EPSTEIN-féle módszer alapelve a következő:

Valamely transzformátor vasmagjára két tekercs helyeztetik. Az egyikben oly intenzitású egyenáram kering, hogy általa a relative kis keresztmetszetű vasmag szaturáltatik, míg a másikba egy másodpercenként n periodusszámú sinusáram küldetik. Utóbbinak az a félhulláma, mely az egyenárammal egyirányú, csak gyengén erősítheti (l. ábra) a telített vasmag mágneses indukciófolyamát, holott ellenkezőleg utóbbit a rákövetkező ellenirányú félhullám nagyon gyöngíti. Az eredmény tehát az első félperiodus alatt igen lapos görbájű, a rákövetkező félperiodus alatt pedig ellenkezőleg igen hegyes görbájű mágneses indukciófolyam leend. Ha tehát két ilyen készüléket alkalmazunk sorozatosan, de úgy, hogy a secundátekercsek egymás ellen kapcsolassanak, akkor ez utóbbiak áramkörében a jelzett mágneses

¹ Deutsches R. P. 149761 (1902).

² Graf von ARCO. Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Münster. 1912. és dr. ZENNECK. Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie. Stuttgart. 1915. S. 457.

³ Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 1911. Vol. 152. p. 699.

⁴ Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana. 1911. Vol. 15. p. 391.

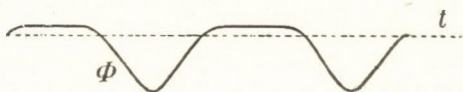
⁵ Elettrecista 1912. p. 215.

⁶ Journal of the Institution of Electrical Engineers. 1914. p. 700.

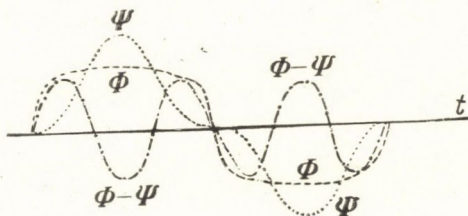
dyssymmetria folytán dupla, azaz $2n$ periodusú áram fog indukáltatni.

Gróf Arco egy ilyen készülékkel 7500 periodusú ($\lambda = 40,000$ m hullámhosszú) áramot 15,000 periodusszámúvá alakított át 85 százalék hatásfokkal és egy második átalakítással 30,000 periodusszámúvá körülbelül 60 százalék összhatásfokkal.

3. — Ha az elrendezést úgy módosítjuk, hogy az első transzformátorban a vasmag ne csupán az egyik félhullám számára, hanem folyton úgy a pozitív, mint a negatív félhullám számára telítették és hasonlóképen a vele sorozatosan kapcsolt második



1. ábra.



2. ábra.

transzformátorban a vasmag folyton távol maradjon a szaturációtól, akkor az elsőnek megfelelő lapos görbe és a második transzformátornak megfelelő hegyes görbe egyidejű ordinátáinak különbsége, mint egyszerű szerkesztéssel meg lehet győződni, olyan periodikus görbe szerint változik, mely háromszorta nagyobb frekvenciájú, mint a primáráram (2. ábra).

Ezen alapszik a JOLY-féle¹ frekvencia-triplikátor.

Megjegyzendő, hogy a primár teljes áramkör sinusalakú elektromotoros erő által tápláltatván, a lapos és a hegyes görbe egyidejű ordinátáinak összege is sinusgörbéjű mágneses erővonal-

¹ Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris. 1911. Vol. 152. p. 856.

folyamot ad, de csupán n periodusszámút, míg a különbség, mint említettük, $3n$ periodusszámút szolgáltat.

A SPINELLI- és a TAYLOR-féle háromfázisú elrendezésnél nem alkalmaztatik egyenáram a mágneses telítéshez, hanem a vas-magok keresztmetszetének kellő csökkentésével érhető el a szükséges szaturáció. Egyszersmind transzformátor helyett telített vasmagú önindukciótekeres alkalmaztatik sorozatosan a nem telített magú transzformátorral. Utóbbinak három primérfázisa SPINELLINél csillagalakban, TAYLORNál pedig háromszögben kapcsoltatik és mindegyik fázisnak megfelel külön egy-egy imént említett, sorozatosan kapcsolt, szaturált magú önindukciótekeres.

★

4. — E készülékek elméletének megállapításával foglalkozván, megkíséréltem az eddigi elrendezések általánosításával elérni egy csapásra *a frequentiának tetszesszerű páratlan számú sokszorosítását*, a mi a következő megfontolások segélyével, melyek egyszersmind a szóbanforgó készülékek elméletének alapjául is szolgálhatnak, valóban sikerült is.

Küldjük egy páratlan fázisszámú, tehát $2k+1$ -fázisú sinus-áramú generátornak áramait egy normális transzformátornak megfelelő $2k+1$ primátekercsére, akkor a transzformátor vasmagjában az előidézett mágneses indukciófolyam Φ folyton zérusértékű lesz egészen hasonló módon, mint maga az áram a sokfázisú vezetékek közös neutrális pontjában. Az áramoknál ez a KIRCHHOFF-féle törvénynek megfelelőleg előrelátható. A mágneses indukciófolyamoknál is egyszerű módon bizonyítható, mivel a fázisban eltolt szögek sinusfüggvényének összege a teljes zárt sokszögre vonatkoztatva minden egyes pillanatban zérus lesz. Ugyanis legyen az összegezendő $2k+1$ fázis a következő

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_0 \sin \omega t, \\ \Phi_2 &= \Phi_0 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{2k+1} \right), \\ &\vdots \\ \Phi_{2k+1} &= \Phi_0 \sin \left(\omega t - 2k \frac{2\pi}{2k+1} \right); \end{aligned} \tag{1}$$

a hol Φ_0 az amplitudo értéke és $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a körfrekvencia T periodustartam mellett.

Az összeg rendezés után írható:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_{2k+1} &= \Phi_0 \sum_{n=0}^{n=2k} \sin \left(\omega t + n \frac{2\pi}{2k+1} \right) = \\ &= \Phi_0 \sin \omega t \left(1 + \sum_{n=1}^{n=2k} \cos n \frac{2\pi}{2k+1} \right) - \Phi_0 \cos \omega t \sum_{n=1}^{n=2k} \sin n \frac{2\pi}{2k+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

A $2k+1$ oldalas szabályos sokszög központi szögeiről lévén szó, egyszerű ábrázolás után könnyen átlátható, hogy

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{2k+1} &= - \sin 2k \frac{2\pi}{2k+1}; \\ \sin 2 \frac{2\pi}{2k+1} &= - \sin 2k-1 \frac{2\pi}{2k+1}; \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3)$$

és így, mivel $2k$ páros számú tagja van a végső sinusösszegnek és azok párosával zérust adnak, az egész összeg eltűnik.

Hasonló módon megállapítható, hogy a cosinusösszeg $= -1$, úgy, hogy a zárójel alatti kifejezés is eltűnik.

Ennélfogva felső harmonikusoktól mentes sinusfüggvények esetében

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_{2k+1} = 0. \quad (4)$$

5. — Ha már most sikerül valami módon a sinusgörbe felső részét teljesen ellapítani felső harmonikusok bevezetésével, akár megfelelő kivonandó görbék szerint változó elektromos indító ellenerő alkalmazásával, akár más módon, akkor a teljesen lapos $2k+1$ fázisú görbék összege nem lesz többé zérus. Ezt lejjebb bebizonyítjuk.

Ily lapos görbét legegyszerűbben ugyanannak az eljárásnak segítségével létesíthetünk, melyet az említett szerzők alkalmaztak és a mely abban áll, hogy oly transzformátor primártekercseibe vezetjük a $2k+1$ -fázisú áramot, melynek vasmagja a keresztmetszet méreteinek szűkre választása folytán erősen telített. A szaturálás folytán a mágneses erővonalfolyam, melyet egy fázis létesít, ily lapos görbe által ábrázolható.

Hogy minden egyes pillanatra nézve a $2k+1$ görbe ordinátáinak összegét megállapíthassuk és az eredményt ábrázoló görbe lefolyását megítélhessük, fejtsük ki a periodikus lapos görbét képviselő függvényt FOURIER-féle sorba.

Siessünk megjegyezni, hogy olyan görbékről van szó, melyek részarányosak az időtengelyre nézve, azaz a melyeknél a pozitív félhullám tükörképe a negatív félhullámnak, és a melyeknél másrésről úgy a pozitív, mint a negatív félhullám két szimmetrikus negyedhullámból áll. Ilyen esetben tudvalevőleg a megfelelő FOURIER-sorban csupán a sinustagok maradnak meg és azok közül is csupán a páratlan indexszel ellátottak.

Ennélfogva (1) helyett a mágneses erővonalfolyam $2k+1$ fázisait képviselő sorok következőképen írhatók, feltéve még, hogy $\varphi_{01} \dots \varphi_{0(2k+1)} \dots$ a sor állandói, együtthatói, illetőleg a megfelelő felső harmonikusok amplitúdói:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 \quad (\omega t) &= \varphi_{01} \sin(\omega t + \varphi_1) + \\
 &+ \varphi_{03} \sin 3(\omega t + \varphi_3) + \dots \\
 &+ \varphi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1}(\omega t + \varphi_{2k+1}) + \dots \\
 &\vdots \\
 \varphi_2 \quad (\omega t) &= \varphi_{01} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_1 \right) + \\
 &+ \varphi_{03} \sin 3 \left(\omega t - \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_3 \right) + \dots \\
 &+ \varphi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1} \left(\omega t - \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_{2k+1} \right) + \dots \\
 &\vdots \\
 \varphi_{2k+1} (\omega t) &= \varphi_{01} \sin \left(\omega t - 2k \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_1 \right) + \\
 &+ \varphi_{03} \sin 3 \left(\omega t - 2k \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_3 \right) + \dots \\
 &+ \varphi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1} \left(\omega t - 2k \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_{2k+1} \right) + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{5}$$

Czélunk megvizsgálni, vajjon ily fázisgörbéket képviselő függvények esetében az ordináták összege egy ugyanarra a pil-

lanatra nézve különbözik-e a zérustól, és ha igen, mily függvény által nyer kifejezést.

Ez az összeg ekként alakul:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\nu=2k+1} \Phi_{\nu}(\omega t) &= \Phi_{01} \sum_{\nu=0}^{\nu=2k} \sin \left(\omega t - \nu \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_1 \right) + \\ &+ \Phi_{03} \sum_{\nu=0}^{\nu=2k} \sin 3 \left(\omega t - \nu \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_3 \right) + \dots + \\ &+ \Phi_{0(2k+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=2k} \sin \overline{2k+1} \left(\omega t - \nu \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_{2k+1} \right) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Ebben a $\Phi_{0(2k+1)}$ amplitudo tényezőjét alkotó összeg

$$\Sigma = \sum_{\nu=0}^{\nu=2k} \sin \overline{2k+1} \left(\omega t - \nu \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_{2k+1} \right) \quad (7)$$

olyan, hogy összes, szám szerint $2k+1$ tagja egymással egyenlő. Ugyanis mindegyik tagnál 2π számlálójában és nevezőjében ugyanaz a $2k+1$ szám fordul elő és így egyszerűsítés után tulajdonképen egymástól csupán 2π -nek egész számú többszörösével különböző szögeknek sinusaival van dolgunk. Ennélfogva ez összeg tulajdonképeni értéke:

$$\Sigma = (2k+1) \sin \overline{2k+1} (\omega t + \varphi_{2k+1}). \quad (8)$$

Ezzel szemben a többi Φ_{01} , Φ_{03} stb. amplitudó tényezőjét képező összeg mind eltűnik, mert mindegyikük egymástól 2π egyenlő törtrészeivel különböző szögek sinusaiból képeztetik, úgy, hogy zárt polygonnak felel meg. A $2k+1$ egészszámú többszöröseinek megfelelő $\Phi_{0,n(2k+1)}$ tagok ugyan nem tűnnek el, de befolyásuk oly csekély, hogy teljesen elhanyagolható. Így például tizenegy fázis esetében a 33. stb. harmonikus összetevő rezgés már a vasmagban keletkező FOUCAULT-áramok folytán sem érvényesülhet.

Bebizonyult tehát az a tétel, hogy nem sinusalakú, hanem a jelzett felső harmonikusokat tartalmazó görbék esetében a $2k+1$ fázis összege, a helyett, hogy állandóan zérus értékű lenne, a következő függvény által nyer kifejezést:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2k+1} \Phi_{\nu}(\omega t) = (2k+1) \Phi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1} (\omega t + \varphi_{2k+1}). \quad (9)$$

Önnélfogva átlagértékben fázisonként a következő mágneses erővonalfolyam Φ_s jelentkezik a szaturált vasmagban:

$$\Phi_s = \Phi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1} (\omega t + \varphi_{2k+1}). \quad (10)$$

Ez pedig egyfázisú *sinusfüggvény, melynek periodicitása $2k+1$ -szer nagyobb, mint az eredeti sinusalakú sokfázisú primaerfeszültsége, melyből kiindultunk.*

Ily módon sikerült megállapítanunk, hogy páratlan $2k+1$ szabályos fázisú áramoknak átalakítása egyfázisú árammá azoknak összegezése útján telített magú transzformátor segítségével olyan sinusáramot szolgáltat, melynek másodpercenkénti periodusszáma $2k+1$ -szer nagyobb, mint az átalakítandó áramoké.

Végeredményben a páratlan fázisszám tehát mint az eszközölt frekvencia-sokszorozás együtthatója tűnik elő.

6. — Ez az eredmény még más szempontból is érdekes. Ugyanis tudvalevőleg egy felső harmonikusok által eltorzított görbéből például egy ívlámpa áramkörének áramgörbéjéből valamely n -edik harmonikus rezonancia segítségével kiválasztható olymódon, hogy a megfelelő kapacitásnak — mely teszem a THOMSON-képlet segítségével kiszámítható — és önindukciónak alkalmazásával az áramkör önrezgése ugyanarra az n periodusszámra hozható, mint a mekkora valamely kiválasztandó összetevő felső harmonikus rezgése. Ez ismert módja az egyes harmonikus rezgések «elemezése»-nek.

Az általunk kontemplált elrendezés tulajdonképen analog rezonancia-tűneményt valósít meg más eszközökkel, még pedig kapacitás alkalmazása nélkül, a mennyiben itt a $2k+1$ eltorzított, de egyébként azonos alakú fázisgörbének $2k+1$ -ik harmonikusa telített vasmagú transzformátor alkalmazása által a szekundarterekercsben kiválasztatik.

7. — Ha a páratlan $2k+1$ helyett páros $2k$ számú generátort használnánk a transzformátor primarterkereinek táplálására, az eredmény egészen más lenne. Ugyanis akkor (6)-ban az összes amplitudók tényezői kivétel nélkül eltűnének. Csakugyan (7) helyett Σ -ra nézve a következő összeghez jutunk:

$$\Sigma = \sum_{v=0}^{v=2k} \sin \overline{2k+1} \left(\omega t - v \frac{2\pi}{2k} + \varphi_{2k+1} \right) \quad (11)$$

és így, mivel eseteinkben csupán páratlan indexű tagok léteznek a FOURIER-sorban, 2π -nek páratlan egész számú számlálója van páros egész számú nevezővel szemben és így olyan egyszerűsítés, mint (7)-nél, itt nem lehetséges. Ennélfogva a (11) alatti sinusösszeg is eltűnik, úgy, hogy páros fázisszám esetében a vasmagban jelentkező erővonalfolyam mindenkor állandóan zérus. *Tehát páros fázisszám használata frekvencia-sokszorozás céljára legalább ilyen elrendezés mellett nem alkalmas.*

8. — Az ily átalakítók táplálására használt dynamogépek rendszerint sinusalakú feszültséget szolgáltatnak a készülék kapcsain, ennélfogva nem kapcsolhatjuk egyszerűen a telített magú transzformátort a géphez, hanem vagy úgy, mint TAYLOR és SPINELLI, önindukciótekerceknek sorozatos közbekapcsolása mellett, vagy pedig, a mi még előnyösebbnek látszik, a JOLY által megjelölt módon, egy második, a telítéstől távol álló vasmagú transzformátornak sorozatos bekapcsolása útján. Ha az utóbbi megoldást választjuk, akkor egyrésztől lapos görbékkel van dolgunk a szaturált transzformátor erővonalfolyamának ábrázolására és a megfelelő periodikus $\Phi(\omega t)$ függvényekkel, melyek (5) alatt FOURIER-sorok által vannak előállítva, másrésztől pedig a nem szaturált transzformátornak megfelelő hegyes görbékkel és az általuk képviselt $\Psi(\omega t)$ függvényekkel.

Definíciónk szerint a kétféle függvény összege egyszerű sinusfüggvényt ad, mely a gép kapcsain szolgáltatott feszültség törvényét ábrázolja. Tehát fázisonként:

$$\Phi(\omega t) + \Psi(\omega t) = \Phi_0 \sin \omega t. \quad (12)$$

Ebből következik, hogy

$$\Psi(\omega t) = \Phi_0 \sin \omega t - \Phi(\omega t). \quad (13)$$

Ha ezt az összes $2k + 1$ fázisra alkalmazzuk és a nyert $2k + 1$ egyenletet összegezzük, akkor a jobboldal első tagja gyanánt egyszerű sinusösszeget kapunk, melyről (4) szerint tudjuk, hogy eltűnik. A negatív második tagnak megfelelő összeg végeredménye másrésztől a (9) alatt talált kifejezés. Utóbbi tehát egyenlő, de ellenkező jelű a baloldalon előálló összeggel, vagyis

$$\sum_{r=1}^{r=2k+1} \Psi_r(\omega') = - \sum_{r=1}^{r=2k+1} \Phi_r(\omega). \quad (14)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a *hegyes görbék szerint változó fázisok összegének megfelelő mágneses erővonalfolyam ugyanazt a törvényt követi, mint a lapos görbéknek megfelelő, csak-hogy ellenkező előjellel.* Szóval a jelzett módon seriesbe kapcsolt két transzformátornál, még pedig úgy a telített vasmagúnál, mind annál, mely a szaturáltságtól egészen távol áll, *egyformán frekvencia-sokszorozáshoz vezet a $2k+1$ fázisú primár-áramoknak átalakítása egyetlen monofázisú szekundárárammá, és a sokszorozás együtthatója $= 2k+1$, azaz egyenlő az alkalmazott fázisok számával.*

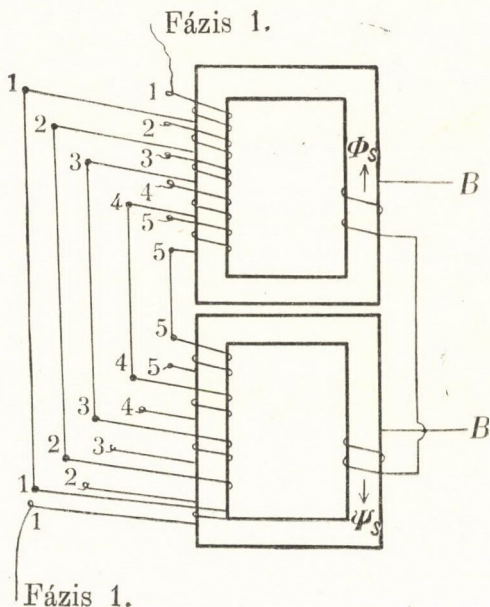
Minthogy az első transzformátor szekundárárama 180° -kal fázisban el van tolva a második transzformátoréhoz képest, ennél fogva a két szekundártekercselést nem egyszerűen sorozatosan, hanem ellentétesen kell kapcsolni, nehogy egymás hatását lerontsák (3. ábra).

Vége (12)-ből azonnal következtethető, hogy a Φ és Ψ függvények FOURIER-soraiban előforduló felsőbb harmonikusok a két függvény mindegyikében ugyanavval az amplitudo- és fázis-szöggel szerepelnek, de ellenkező előjelűek. Ily módon a két függvény összegéből eliminálódnak, úgy, hogy csupán az egyszerű $\Phi_0 \sin \omega t$ sinusfüggvény marad az összeg eredményéül. Egyszerű szerkesztéssel is meggyőződhetni arról, hogy ilyen ellenkező előjelű felső harmonikusok az alapgörbét egyik előjel alkalmazásával lapos lefolyásúvá, az ellenkező előjel használatánál pedig hegyes alakúvá alakítják át. Hasonló vonatkozás ez, mint a mely a mágneses erővonalfolyam és a neki megfelelő elektromos indító erő görbéi között fennáll, azaz valamely periodikus függvény és annak differenciálhányadosa között. Ha az egyiket lapolalakú görbe képviseli, a másiknak hegyesalakú görbe felel meg.

9. — Befejezésül még egy példán be akarjuk mutatni az (5) alatt talált általános tétel elemi bizonyítását, relativ elég jó megközelítést engedő ama feltevés mellett, hogy a tárgyalandó lapolalakú fázisgörbének egy-egy félhulláma részarányos «trapez» által ábrázolható. Ez esetben nem kell FOURIER-sorok-

hoz folyamodnunk, hanem egyszerű közvetlen szerkesztés útján megrajzolhatjuk a fázisok összegének megfelelő görbét.

Példának válaszszuk az ötfázisú generátornak alkalmazását. A gyakorlatban a generátorokat és transzformátorokat összekapcsoló fázisvezetékek száma úgy is csak korlátozott lehet, nehogy bonyolulttá váljék az egész elrendezés. Kilencz vagy tizenegy fázis alkalmazása főképp nagyobb energiamennyiségeknél már eléggé



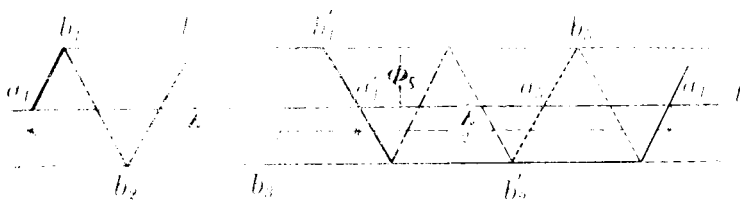
3. ábra.

elfogadható együttthatót szolgáltat a fázis-sokszorozáshoz. Még több fázis alkalmazása a sok vezeték szükséges volta miatt nem lenne ajánlatos.

A választott trapez alapjának hossza a félhullámhossz, $\frac{\lambda}{2}$ (4. ábra), magassága pedig a mágneses telítésnek megfelelő erővonalfolyam Φ_s . Egyszerűsítés kedvéért felteszszük, hogy a szaturálás fokát úgy választottuk, hogy az annak megfelelő Φ_s érték mellett két szomszédos fázishoz tartozó trapeznek egymás ellen hajló ferde oldala ne metszhessen egymást a trapezen

belül, illetőleg az $y = \Phi_s$ egyenlet által képviselt és így az idő-tengelylyel párhuzamos egyenes alatt, hanem vagy ez egyenes felett, vagy éppen ezen az egyenesen. Még további egyszerűsítés végett az utóbbi esetet választjuk, úgy, hogy az $abb'a'$ trapeznek b b' felső csücsai egyszersmind az illető metszéspontok.

Nézzük már most a $2k + 1$, illetőleg jelen példa esetében 5 trapez egyidejű ordinátáinak összegét először is a b pontokon, a hol mind az 5 ordináta (általánosan $2k + 1$ ordináta) egyenlő nagyságú, és pedig Φ_s -sel, a közös trapezmagassággal egyenlő, másodsor pedig a közbenső helyeken, a hol a ferde oldal jelenléte folytán a megfelelő egyik ordináta kisebb a Φ_s értéknél, holott a többi 4 (vagy $2k$) ordináta ott is $\pm \Phi_s$. A má-



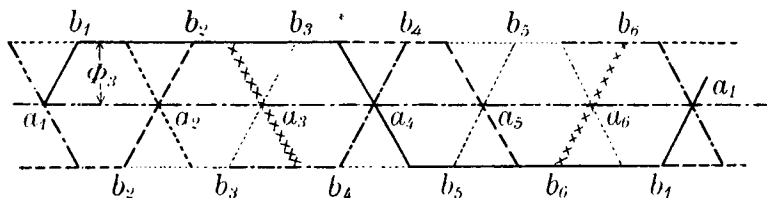
4. ábra.

sodik esetnek speciális pontjai azok az a pontok, a hol a ferde oldalak metszik az abscissatengelyt, a hol tehát a megfelelő ordináta értéke zérus, holott ugyanott 2 (vagy k) görbe pozitív félhullámának Φ_s ordinátája és további 2 (vagy k) görbe negatív félhullámának $-\Phi_s$ ordinátája áll egymással szemben. Ezeken a pontokon tehát az 5 (vagy $2k + 1$) ordinátának összege eltűnik.

A b pontokon egyfelől 3 (vagy $k + 1$) egyenlő Φ_s ordináta van, míg másfelől 2 (vagy k) ellenkező előjelű $-\Phi_s$ ordináta. A kiadódó összeg tehát ezeken pontokon $(k + 1) \Phi_s - k \Phi_s = \Phi_s$ értékű és az ottani hullámhegynek illetőleg hullámvölgynek megfelelő amplitudót jelenti.

Az a és b pontok közé eső pontokra nézve ugyanazok a viszonyok állnak, mint az a pontokra fentebb említettek. Egyfelől k pozitív ordináta Φ_s , másfelől ugyanannyi negatív értékű $-\Phi_s$, úgy, hogy a $2k + 1$ ordináta összege e pontokranézve a ferde oldal megfelelő pontjának ordinátája által képviseltetik.

Végeredményben a ferde oldalak által képezett zezzugos $a_1 b_1 b_2 \dots$ vonal adja a trapezalakú félhullámokból álló $2k + 1$ fázisgörbék egyidejű ordinátái összegének geometriai helyét, és, mint az ábrából látható, ötször, illetőleg $2k + 1$ -szer nagyobb periodicitással bír, mint az említett görbék.



5. ábra.

Ha $2k + 1$ helyett páros $2k$, például 6-fázisú áramot (5. ábra) használtunk volna, akkor minden ponton kivétel nélkül k , illetőleg 3 pozitív Φ_s és ugyanannyi negatív $-\Phi_s$ ordinátával lenne dolgunk, úgy, hogy az összeg értéke mindenütt $k(\Phi_s - \Phi_s) = 0$ értelmében eltűnnék. A páros fázisszám tehát a szóbanforgó elrendezés mellett nem lenne alkalmas frequentia-sokszorozásra.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 december 13.-án tartott üléséből.)

A TALAJISMERET SZEMPONTJÁBÓL
FONTOS MESTERSÉGES ZEOLITHOK ELŐÁLLÍTÁSA,
ÖSSZETÉTELE, SAJÁTSÁGAI ÉS JELENTŐSÉGE.

(Akadémiai székfoglaló értekezés.)

'SIGMOND ELEK levelező tagtól.

Akadémiai székfoglaló értekezésem tárgyát abból a tudománykörből választottam, melyben eddig is legtöbbet dolgoztam. Ez a talajismeret tudománya. Én a talajismeretet önálló tudománynak minősítem és a talajt nem tisztán geológiai, kémiai, fizikai vagy mezőgazdasági szempontokból tanulmányozom. A talaj, nézetem szerint, az összes talajképződési tényezők eredménye. Korát tekintve ugyan a legfiatalabb geológiai képződményekhez tartozik, ámde a többi geológiai formációtól lényegesen különbözik, mert nem élettelen földréteg, hanem úgy magában a talajban, mint annak felszínén állandó szerves élet és soha nem szünetelő kémiai, fizikai és biológiai változások mennek végbe. Már a talaj képződésében igen sok, sajátos és jellemző átalakulás észlelhető, a melyek a többi geológiai képződmény képződési körülményeitől különböznek, és éppen ezek azok, melyek leggyakrabban a talajtypus jellemző sajátosságait megszabják. A talajban végbemenő változások ezzel még korántsem fejeződtek be. Minden évjárat, minden talajművelési vagy javítási eljárás újabb változások kútfeje. A tudományos talajismeretnek az a feladata, hogy mindezeket a jellemző természeti és kulturális jelenségeket tanulmányozza és önálló tudományos alapokon nyugvó rendszerbe foglalja. Önként érthető, hogy a talajismereti tudomány eredményeit azután a geológia, geographia, botanika,

mezőgazdaság és más rokon tudományszakok, illetőleg gyakorlati szakmák a maguk céljaira felhasználják és alkalmazzák. Meggyőződésem azonban, hogy a talaj megismerését sokkal tökéletesebben és több eredménnyel érjük el, ha mindezekről a mellékbefolyásoktól és tekintetektől függetlenítjük és a geológiát, mineralogiát, botanikát, bakteriológiát, physikát, chemiát, meteorológiát és a gyakorlati mezőgazdasági ismereteket csak olyan mértékben vesszük igénybe, a mennyire ez a talaj jellemző sajátságainak kialakulására és felismerésére, a talaj minőségének megítélésére szükséges és kívánatos.

Ez az álláspontom nem új és nem egyedül álló. Először FALLOU (1862) mutatott rá arra, hogy a talajismeretet különálló tudománynak minősíthetjük, jelenleg pedig ennek a fel fogásnak egyik kimagasló megismélysítője a müncheni egyetem nagynevű tanára RAMANN. Mégis szükségesnek véltem ezt az álláspontomat itt megállapítani egyrészt azért, mert ma még sokan a talajismeretet vagy tisztán geologiai, vagy chemiai, physikai, vagy mezőgazdasági szempontokból ítélik meg, másrészt pedig azért, mert ez a megokolása annak, hogy talajismereti kutatásaim tárgyául a mesterséges zeolithok közelebbi tanulmányozását választottam.

A talaj chemiai alkotásának közelebbi ismerete — miként ezt már más helyen ismételtén kifejtettem¹ — úgy tudományos, mint gyakorlati szempontokból elsőrangú fontosságú, a talaj chemiai alkotásában pedig igen jelentékeny szerep jut éppen azoknak az amorph- vagy colloid-természetű elmálási termékeknek, melyek a tanulmányom tárgyául választott mesterséges zeolithokhoz hasonlóan viselkednek és a melyek a tudósok egyik csoportjának véleménye értelmében kovasav- és alumium-oxydhydrát-gélek változó physikai keverékei, a tudósok másik csoportjának véleménye értelmében pedig valódi chemiai vegyületek.

¹ Legújabb idevonatkozó közleményeim közül v. ö. 'SIGMOND E.: A chemiai talajvizsgálati módszerek tanulmányozása (II. közlemény), Magy. Chem. Folyóirat XX. és XXI. évf.; továbbá 'SIGMOND: Über die Charakterisierung des Bodens auf Grund des salzsauren Bodenausuges und des Bodenaustauschvermögens; Intern. Mitt. f. Bodenkunde 1915. évf.

Talajismereti szempontból tekintve, a talaj alkotásában szereplő anyagokat mindenekelőtt két főcsoportba oszthatjuk, úgymint: ásványi, továbbá szerves eredetű anyagokra. Tekintve azt, hogy a jelen dolgozatom tárgyát alkotó anyagok a talaj ásványi eredetű alkotórészeivel függnek össze, a szerves eredetű talajalkotórészekkel ez alkalommal bővebben nem foglalkozom. Az ásványi eredetű talajalkotórészeknek három csoportját különböztethetjük meg, nevezetesen:

1. eredeti, chemiailag változatlan ásványok törmeléke;
2. amorph- vagy colloid-természetű elmálási termékek, melyeknek közelebbi chemiai alkotását még nem ismerjük;
3. határozott és jól jellemezhető chemiai vegyületek, úgynevezett talajsók, melyek a talajelmálás kristalloid-természetű termékei.

Az 1. csoport minőségi és mennyiségi vizsgálatából a talaj ásványi eredetéről és elmálási körülményeiről szerzünk felvilágosítást. *A talaj ijazi jellegét, mely a talajt az eredeti holt közettől megkülönbözteti, főképen a 2. és 3. csoport összetétele adja meg*, mely felöleli mindazt, a mi a talaj képződése és elmálása folyamán az eredeti közetből képződött és a kilúgzás áldozatául nem esett. A talajsók közt találjuk meg a gazdasági növények legfontosabb táplálóanyagait, ugyanis a phosphorsavat, káliumot és calciumot; a 2. csoport anyagát pedig *a növényi táplálóanyagok raktárhelyiségeinek, éléskamráinak* minősíthetjük, melyekben a táplálóanyagfőlölség absorptio útján megkötetik, a szükséglethez mértén pedig a gyökerek rendelkezésére áll. Ha ez az éléskamra jól van megalkotva és a kívánt növényi táplálóanyagokkal telített, a talajkilúgzás kifosztásai ellen pedig kellő védelemben részesül, akkor a talaj a növények termelése szempontjából gazdag. Ha azonban az éléskamra szűk vagy üres, akkor a talaj is szegény. Az éléskamra minőségére és gazdagságára azonban nemcsak a már említett növényi táplálóanyagok sói, de a többi talajsó is sokszor lényeges befolyást gyakorolnak.

Ezek az amorph- vagy colloid-természetű anyagok, különösen a kötöttebb talajnemek (vályog- és agyagtalajok) esetében a talaj physikai sajátságait is lényegesen befolyásolják és már az eddig közölt tapasztalatok alapján is megállapíthatjuk, hogy e tekintet-

ben nemcsak a colloidanyagok mennyisége, hanem minősége, valószínűleg chemiai alkotása is sokszor döntő hatású.¹

Mindezeket összefoglalva beláthatjuk, hogy éppen *a talaj ásványi eredetű alkotórészeinek 2. csoportjába tartozó amorfh- vagy colloid-természetű anyagok a talaj általános jellemzése, táplálóanyag-gazdagsága, továbbá physikai sajátságai szempontjából különösen érdekesek.* Minthogy pedig ezeknek pontos meghatározása vagy elkülönítése a talajból jelenlegi módszereinkkel lehetetlen, a velők rokon mesterséges zeolithokat pedig aránylag könnyen előállíthatjuk és vizsgálhatjuk, kutatásaimat ezeknek a mesterséges zeolithoknak beható tanulmányozásával kezdtem meg, hogy ezeknek chemiai alkotását, sajátságait és változásait közelebbről megismerve, a kapott eredményeket a talajok sajátos viselkedésével összehasonlíthassam.

1. A mesterséges zeolithok előállítása és chemiai összetétele.

Tekintve azt, hogy GANS elmélete értelmében állandó chemiai összetételű vegyületeket — úgynevezett aluminatszilikátokat² — csak akkor kapunk, ha alkaliszilikát és alkalialuminát hat egymásra: kísérleteim anyagát csak azok a nedves úton való eljárások alkották, melyekben mindig natriumszilikát-oldatra natriumaluminát-oldat hatott.

GANS a nedves úton való előállítás közelebbi módját, valamint a kapott eredményeket csak igen röviden írta le.³ SINGER⁴ ez eljárással nem kapott jó eredményeket és módosította az el-

¹ 'SIGMOND E.: A békéscsabai széktalajok fizikai tulajdonságai. Vízügyi Közlemények 1915. évf. 5. füzet.

² GANS R.: Die Charakterisierung des Bodens nach der molekularen Zusammensetzung des durch Salzsäure zersetzlichen silikatischen Anteiles des Bodens. Intern. Mitt. f. Bodenkunde. III. köt. (1913), 529. lap.

³ GANS R.: Konstitution der Zeolithe, ihre Herstellung und technische Verwendung. Jahrb. d. kgl. preuss. geol. Landesanstalt 1906. XXXVII. köt. 1. füz. 75. lap.

⁴ SINGER F.: Über künstliche Zeolithe und ihre konstitutionellen Zusammensetzungen mit anderen Silicaten. Műszaki doktori értekezés. Berlin, 1910.

járás, de ez sem bizonyult megbízhatónak, ezért fordult a sokkal biztosabb olvasztáson alapuló eljáráshoz. STREMMÉ ellenérvül fel is használta GANS eljárásának hiányos ismertetését annak bizonyítására, hogy GANS eljárásával csak akkor kapunk állandó összetételű kovasav- és aluminiumoxydhydrát-gélkeveréket, ha a natriumaluminát és szilikát oldata mindig egyenlő körülmények közt hat egymásra.¹ Ha azonban a kovasav mennyiségét az eredeti oldatban növeljük, egyre emelkedik a kapott termék kovasavtartalma. Következésképen STREMMÉ azt is feltételezi, hogy ha apasztjuk az eredeti oldat kovasavtartalmát, a kapott termékek kovasavtartalma is csökkenni fog. GANS válaszában rámutat, hogy nem az a lényeges, hogy az $\text{SiO}_2:\text{Al}_2\text{O}_3$ molekulák aránya a kísérleti körülmények változtatásával változik, hanem az, hogy SiO_2 és Al_2O_3 alkalikus oldata akként hasson egymásra, hogy a vegyfolyamat befejeztével az oldat még alkalikus maradjon; ilyenkor az Al_2O_3 és bázismolekulák aránya állandó, még pedig 1:1 arálynak felel meg.² «Zu einem konstanten Verhältniss zwischen SiO_2 und Al_2O_3 — írja GANS ugyanott — kommt es nicht, wenn wechselnde Mengen SiO_2 zugegen sind und die überschüssige Alkalität zu gering und daher nicht imstande ist, die über die stöchiometrischen Verhältnisse hinaus anwesende SiO_2 in kristalloider Lösung zu erhalten. Man erhält sodann, worauf ich ausdrücklich aufmerksam machte, eine Fällung, die aus einem Gemisch von Aluminatsilikat mit kolloidaler Kieselsäure besteht.» Ezek szerint a stöchiometriai arányokon túlmenő kovasavtartalmat GANS nem minősíti a vegyülethez tartozónak, hanem az aluminat-szilikáttal egyidejűleg kicsapódott kovasavhydrát-gélnek.

GANS továbbá rámutat még arra, hogy az esetben is, amikor az SiO_2 és Al_2O_3 arány nem ad egész számú molekula-arányokat, ez még nem bizonyítja, hogy a termék nem áll olyan vegyületek keverékéből, melyek teljesen hódolnak a stöchiometria említett követelményének. Ha például feltételezzük, hogy a kapott termék ¹3-a $3\text{SiO}_2 \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{Na}_2\text{O}$ és ²3-a

¹ STREMMÉ H.: Centralbl. f. Min. etc. 1914. évf. 81. lap.

² GANS R.: U. o. 1914. évf. 365. lap.

$4\text{SiO}_2 \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{Na}_2\text{O}$ aluminátszilikátokból áll, akkor a termék chemiai összetétele a következő molekuláris arányt adja:

3 mol. SiO_2	1 mol. Al_2O_3	1 mol. Na_2O
8 " "	2 " "	2 " "
<hr/>		
Összesen 11 mol. SiO_2	3 mol. Al_2O_3	3 mol. Na_2O

a mely 1 mol. Al_2O_3 -ra átszámítva 3.67 mol. SiO_2 . 1 mol. Al_2O_3 . 1 mol. Na_2O összetételnek felel meg.

Mindezek a körülmények a mellett szólottak, hogy próbáljuk meg GANS aluminátszilikátjait a hatóanyagok arányának változtatott körülményei között létrehozni és lehetőleg megállapítani azt, hogy miféle kísérleti körülmények között kapunk azonos összetételű termékeket.

Idevonatkozó előzetes kísérleti eredményeimet mult évben már más helyen¹ közöltem. Ezeket a tájékoztató kísérleteket azóta újakkal bővítettem és a kísérletezés körülményeit is behatóbban tanulmányoztam.

Minden kísérletemhez chemiailag tiszta kosasavhydrátot, illetőleg aluminiumoxydhydrátot normál-natriumhydroxyd-oldatban oldottam és így a hatóanyagok mennyiségét ismertem. A különböző arányokban megszabott oldatokat nagyrészt nikkelhengerpoharakba mértük le és összekeverés előtt felforraltuk. A külön felforralással kettős célzt akartam elérni: 1. előzetes kísérletek alapján azt tapasztaltam, hogy a hidegen összeöntött oldatok forralása veszélyes, mert az oldat a kivált csapadék következtében erős lökéseket okoz és a forralási idő nem tartható be oly egyenletesen, mintha már forró oldatokat keverünk össze; 2. arról is meg akartam győződni, hogy ezek a részben colloidoldatok (nevezetesen az SiO_2 oldatok ultramikroszkop alatt ilyeneknek bizonyultak) forralás közben már magukban nem adnak-e csapadékot. Ez egyik esetben sem fordult elő. Midőn a forró oldatokat összeöntöttük, azonnal nagy tömegben gélyszerű csapadék keletkezett. A keveréket állandó és erélyes kavarás közben 15 percig forraltuk. Ha a kavarás nem elég

¹ Magy. Chem. Folyóirat XX. és XXI. évf.; továbbá Intern. Mitt. f. Bodenkunde 1915. évf. idézett értekezéseimben.

élénk, a csapadék leülepszik és olyan lökések jelentkeznek, hogy e miatt a kísérlet több ízben meghiusult. A keverék forralásának az volt a célja, hogy egyrészt a reactio tökéletesebb és a kapott termék egyneműbb legyen, másrészt pedig, hogy a kezdetben kivált laza csapadék tömörüljön. A kapott csapadékot az oldattól azonnal a forralás befejeztével szivótölcséren gyűjtöttük és forró 2%, illetőleg 1%-os NaCl -dal mostuk, míg a lúgos reactio lakmuszpapírral kémelve alig volt észlelhető. A csapadékot forró víz helyett azért mostam előbb konyhasó-oldattal, hogy a natriumzeolith dissociációja, illetőleg ionizálódása következtében kimosható bázisvesztéseget a Na -ionok koncentrációjának növelésével lehetőleg kiküszöböljem. A konyhasó-oldat feleslegét azután 2%, illetőleg 1%-os CaCl_2 -dal távolítottam el. Ilyen körülmények közt elértem azt, hogy a CaCl_2 oldatot csak akkor alkalmaztam az átalakításra, amikor a csapadék már nem tartalmazott érdemleges mennyiségben szabad lúgot, a mely GANS szerint a CaCl_2 -ra hat és $\text{Ca}(\text{OH})_2$ -ot választ ki, a mi megint a kapott termék tisztaságát veszélyeztetheti. A CaCl_2 oldattal azt is elértem, hogy a kapott natriumvegyületek nagyrészt calciumvegyületekké alakultak és könnyen szűrődtek. Ennek a lehető tökéletes elérése céljából a kellő mértékben már kimosott csapadékot a szűrőtölcséren 20%-os CaCl_2 -dal üvegpalczkba mostam és még fölösleges 20%-os CaCl_2 -ot öntve hozzá, a palaczka tartalmát ismételten felrázva, 2—3 napig állani hagytam. Minthogy az idevonatkozó tapasztalatok azt bizonyítják, hogy ilyen koncentrált sóoldatok hatására a báziskicserélődés már 24 óra elteltével biztosan elérte a maximumát, feltételezhettem, hogy a kezdetben előállított natriumvegyületek a lehetőségig teljesen calciumvegyületekké alakultak. Ezt a feltevésemet a kapott eredmények igazolták. Ezután a csapadékot megint szivótölcséren összegyűjtöttem és most forró vízzel mostam a Cl -reactio eltüntéig. Ez esetben a bázis kimosásától már nem kellett tartanom, mert a tapasztalat azt bizonyítja, hogy ezekből a calciumvegyületekből a Ca -ion nem mosható ki forró vízzel.

A kész calciumvegyületeket lehetőleg hiány nélkül összegyűjtöttük és vízfürdön, majd vízköpenynyel felszerelt 98°-os szárítóban szárítottuk, hogy a nedvesség nagyrésztét eltávolítsuk.

Leggyakrabban azonban nem vártuk be, míg az anyag 98°-on állandó súlyt adott. Az így szárított anyagot jól záró üveg-dugós porüvegekbe zártuk és ez szolgált a további vizsgálat anyagául.

A chemiai vizsgálat eredményeit az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat.

Zeolith sor-száma	H ₂ O% 110° C-on szárítva	H ₂ O% 110° C— izzításig hevítve	SiO ₂ %	Al ₂ O ₃ %	CaO %	Na ₂ O %	Össze- gezés
1	22·64	10·94	34·72	21·98	9·86	—	100·14
2	25·95	9·64	33·75	20·59	10·26	—	100·21
3	13·24	11·49	39·90	23·04	11·91	—	99·58
4	35·39	8·37	31·12	15·48	9·29	—	99·65
5	12·44	11·88	42·76	20·01	11·45	—	98·54
6	9·65	12·21	49·16	18·21	9·57	0·25	100·05
7	34·70	9·58	37·70	10·64	7·33	0·75	100·70
8	—	15·36	48·64	23·43	12·43	0·91	100·77
9	5·08	13·86	44·78	22·02	14·03	1·02	100·79
10	8·47	11·16	43·25	24·16	12·04	1·66	100·74

Az első öt zeolithban a Na₂O-t nem határoztuk meg, tekintve azonban azt, hogy a többi elemzés bizonyossága szerint ez mindenkor elenyésző mennyiségű, továbbá az 1—5. sz. zeolithban meghatározott értékek összege közel fekszik a 100-hoz, feltételezhetjük, hogy a Na₂O ezekben a zeolithokban sem haladta meg az 1%-ot, a mi a molekuláris arányokban alig ad 0·06—0·09 molekula R₂O-t.

STREMMÉ már idézett¹ ellenvetései között nagy súlyt látszik helyezni arra, hogy a kovasav- és alumíniumoxydhydrát lúgos oldataiból csak akkor képződnek csapadékok, ha a kovasav, illetőleg alumíniumoxydhydrát lúgos oldatainak Na₂O koncentrációja különböző, vagy a lúgosságot annyira gyöngítjük, hogy a gél-csapadékok már magukban is kicsapódnának: «Doch hat

¹ Centralbl. f. Mineralogie 1914. évf. 81. lap.

GANS den vielleicht wichtigsten Versuch nicht angegeben: wenn die Einzellösungen von Tonerde und Kieselsäure gleiche Konzentration der Natronlauge haben, dann ergibt ihre Mischung keine Fällung. Wenn aber *Konzentrationsunterschiede* vorliegen, oder die Lauge so weit abgeschwächt wird, dass auch *jedes der Gele allein niederschlagen würde*, so entstehen die gemeinsamen Fällungen. Hieraus folgt, dass an sich hierbei *eine Reaktion zwischen der Tonerde und der Kieselsäure nicht eintritt*, sondern die Fällungen sich lediglich den Änderungen des Gleichgewichtes anpassen.» GANS kísérleteinek leírásából az oldatok Na_2O koncentrációja nem állapítható meg. Az én kísérleteimben azonban, ha feltételezzük, hogy a kezdeti oldatokban az SiO_2 és Al_2O_3 nem mint Na_2O vegyületei, hanem mint hidrogélek vannak feloldva, akkor *mindenik esetben az Na_2O concentratio a normallúg összetételének felelt meg és az oldatok magukban még forralás következtében sem coagulálódtak*. Ez tehát megfelelne STREMMÉ követelésének az Na_2O egyenlő koncentrációját illetőleg keverés előtt és után. A valószínűségben azonban az oldatok lúgossága nem volt egyenlő, nevezetesen a kovasavoldatok mindenkor kevésbé lúgosak voltak, mint az alumínátoldatok. Tekintve azt, hogy az oldatok úgy készültek, hogy a normallúgot fölös mennyiségű kovasav-, illetőleg alumíniumoxyhydráttal hosszabb ideig ráztuk és az utóbbiból mindig sokkal kevesebb oldódott, mint a kovasavból, ha a gélek kicsapódása csupán a nátronlúg koncentrációváltozása miatt következett volna be, akkor feltételezhetjük, hogy a keveréskor *annak a gélnek kellett volna mind nagyobb mennyiségben kicsapódnia, a mely a lúgos oldatban kevésbé oldódott, ugyanis az Al_2O_3 -nak*, már pedig a végzett kísérletekben hol az Al_2O_3 , hol az SiO_2 vált le nagyobb mértékben *a szerint, hogy a képződött termékekben miként változott a kettő molekuláris aránya*. A 2. táblázatban foglaltam össze azokat az értékeket, melyek kifejezik, hogy a kísérletekhez használt eredeti oldatok SiO_2 , illetőleg Al_2O_3 tartalmának hány %-a vált le a zeolithok képződésekor.

2. táblázat.

Zeolith sorszám	Az eredeti oldatban foglalt alkotórésznek hány százaléka vált ki a zeolithban?	
	$SiO_2\%$	$Al_2O_3\%$
1	100	37·39
2	100	75·06
3	93	95·2
4	79	92·6
5	70·8	97·7
6	46·4	100
7	32·1	100
8	30·01	85·41
9	26·27	76·38
10	20·61	68·05

Ebből azt látjuk, hogy az 1. és 2. kísérlet esetében, mikor a kovasav mennyisége nem volt elegendő ahhoz, hogy az összes Al_2O_3 -ra számítva az $Al_2O_3:SiO_2$ arány 1:3-nak feleljen meg, az összes kovasav kicsapódott, az Al_2O_3 -ból pedig annál kevesebb, minél távolabb esett a két hatóanyag molekuláris aránya az 1:3-tól. A 3. kísérlet esetében ez az arány már az eredeti keverékben megvolt és mindkét hatóanyagból az eredeti oldat tartalmához viszonyítva közelítőleg ugyanolyan arányban csapódott ki az SiO_2 és Al_2O_3 . A 4—10. kísérletben lefelé haladva, az eredeti oldatkeverék mindig több SiO_2 -t tartalmazott, mint a mennyi az 1:3 aránynak megfelelt és ez esetekben a kivált kovasav viszonylagos mennyisége mindig kevesebb volt, mint az Al_2O_3 kivált mennyisége. A táblázat adatai értelmében a 6. és 7. kísérletben az összes Al_2O_3 kicsapódott, a feloldott kovasavnak ellenkezőleg csak 46·4, illetőleg 32·1 %-a. A 8. kísérlettől kezdve a törvényszerűségben némi változás mutatkozik, mert ezekben az esetekben nem vált ki az összes Al_2O_3 , ámbár az $SiO_2:Al_2O_3$ arány 10:1-nek felelt meg, miként a 6. kísérlet esetében. Ennek az a magyarázata, hogy a 8—10. kísérlet esetében sokkal több volt a lúg viszonylagos

menyisége, mint a 7. és az előző kísérletekben és maguk a képződött csapadékok — miként ezt már GANS is megemlíti és magam is tapasztaltam — szabad alkáliákban, sőt szóda oldatában is részben oldódnak és megbonthatók. *Mindezekből tehát azt következtetem, hogy a gélszerű csapadék keletkezése nem a lúgos oldatok concentratio-különbségével, hanem az SiO_2 , Al_2O_3 és Na_2O molekuláris arányával függ össze, és ha itt egyensúlyi állapotokról beszélünk, azt nem minősíthetjük egyszerűen a kovasav- és alumíniumoxydhydrát-gélek physikai oldódási vagy dispersiós egyensúlyi állapotának, hanem inkább a molekuláris arányokkal kapcsolatos chemiai egyensúlyinak.*

A chemiai reactio mellett szól még az a tapasztalat, hogy a szilikát képződése közben a lúgos oldat lúgossága csakugyan növekedett. Ezt a 8. kísérlet vizsgálati adataiból közvetlenül bizonyíthatom be.

Az eredeti keverék-oldatban:

	SiO_2	Al_2O_3	$\text{SiO}_2 + \text{Al}_2\text{O}_3$ millimol
100 millimol Na_2O -ra jutott	85·59	8·56	94·1;
az eredeti oldatról leszűrt anyaoldatban (A-oldat):			
100 millimol Na_2O -ra jutott	75·78	0·72	76·50;
a különbség tehát volt ...	9·81	7·84	17·60;

vagyis az A-oldatban összesen 17·6 millimollal kevesebb savgyök jutott 100 millimol Na_2O -ra, mint az eredeti keverék-oldatban. Hasonló számítások alapján a többi kísérletben is megállapítható, hogy a reactio közben alkalilúg szabadul fel, a mit különben az oldatok titrálási adatai is megerősítettek.

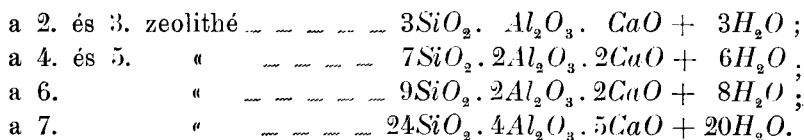
Mindezek a kísérleti eredmények azt a feltevést támogatják, hogy a kapott termékek nem egyszerű physikai, hanem legalább is nagymértékben chemiai változások termékei. Ezt a feltevést támogatja a kísérlethez lemért, a keverékben előforduló és a kész termékekben talált alkotórészek molekula-aránya. Ezeket az értékszámokat a 3. táblázatba foglaltam össze.

3. táblázat.

Kísérletek sorszám	A kísérlethez lemért oldatok keverékében a molekulaarány			100 molekula Na_2O -ra jutott molekula:					Molekulaarány a kész zeolithban: 110 C°-on szárított anyagban:				
	SiO_2	Al_2O_3	Na_2O	szilikát- oldatban SiO_2	aluminát- oldatban Al_2O_3	az összekevert oldatban			H_2O	SiO_2	Al_2O_3	CaO	Na_2O
						SiO_2	Al_2O_3	$SiO_2+Al_2O_3$					
1	1	1	1·55	288·6	80·5	63·0	63·0	126·0	3·19	2·67	1	0·82	—
2	2	1	1·93	288·6	80·5	103·5	51·75	155·1	2·99	2·71	1	0·91	—
3	3	1	2·28	288·6	80·5	131·6	43·87	175·5	3·19	2·93	1	0·94	—
5	4	1	2·68	288·6	76·9	148·9	37·23	186·1	3·07	3·40	1	1·09	—
5	5	1	2·97	288·6	80·5	168·2	33·62	201·8	3·37	3·61	1	1·04	—
6	10	1	4·58	325·1	66·6	218·5	21·85	240·3	3·80	4·57	1	0·96	0·02
7	20	1	7·65	325·1	66·6	261·4	12·94	274·3	5·11	6·00	1	1·25	0·12
8	10	1	11·68	198·6	15·0	85·59	8·56	94·1	3·71	3·47	1	0·96	0·06
9	10	1	10·62	310·5	13·5	94·12	9·41	103·5	3·57	3·44	1	1·16	0·06
10	10	1	21·25	310·5	13·5	47·06	4·70	51·8	2·62	3·03	1	0·91	0·09

Az 1—7.-ig terjedő mesterséges zeolithok molekuláris összetételével már fent idézett korábbi közleményeimben is foglalkoztam.¹

Rámutatottam ugyanis arra, hogy noha az oldatok arányát változtatva a kapott termékek chemiai összetétele is változik, de a kapott termékek összetételéből *elég egyszerű molekuláris arányokat lehetett felállítani*. Már akkor a kapott zeolithok chemiai összetételét a következő képletekben állapítottam meg:



Ezek a képletek nemcsak közelítőleg felelnek meg a 3. táblázatban található molekula-arányoknak, de maguk közt összehasonlítva is határozott törvényszerűséget árulnak el. Úgy látszik ugyanis, hogy a 2. és 3. zeolith alkotja a legegyszerűbb, alapvegyületcsoportot, ennek két molekuláját egy molekula-kovasavval összekötve, kapjuk a 4. és 5. zeolithot, és ha ehhez még két molekula-kovasavgyök kapcsolódik, kapjuk a 6. zeolithot. A 7. zeolith esetében úgy látszik, hogy a zeolithhoz még 1 mol. CaSiO_3 csatlakozik. Ha ezt feltételezzük, a mi az alkalmazott nagy kovasavfelesleget tekintve, könnyen érthető, akkor a 7. zeolith képlete a következő: $23\text{SiO}_2 \cdot 4\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 4\text{CaO} + 20\text{H}_2\text{O}$.

Az alapvegyületből levezetve ez a vegyület úgy képzelhető, hogy az alapvegyület négyszeresét 3 molekula-kovasav köti össze és ehhez még 8 molekula-kovasav kapcsolódik. Az 1. sz. zeolith molekula-arányából azt következtetem, hogy abban az Al_2O_3 feleslege az alapvegyülettel kicsapódott, a mi megint a kezdeti állapot körülményeiből könnyen érthető.

Ezeket a chemiai törvényszerűségeket nagy mértékben megerősíti a 8., 9. és 10. zeolith molekula-aránya. Ezekben a kísérletekben arra gondoltam ugyanis, hogy ha megtartom a 6. zeolith készítésekor használt $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ arányt, de fokozatosan növelem

¹ Magy. Chem. Folyóirat XX. évf. 12. füz. és XXI. évf. 1—4. füzet. (1915. év.) Intern. Mitt. f. Bodenkunde. 1915. évf.

a Na_2O arányát, akkor egyszerűbb zeolithokat kell kapnom. GANS elmélete ugyanis feltételezi, hogy alkalikus oldatok esetében a törekvés az, hogy a $3\text{SiO}_2 \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$ vegyület keletkezzék; a hol a kapott termékekben az SiO_2 több, ott nem volt elég fölösleges lúg ennek oldatban tartására. Ez a feltevés a 8. és 9. kísérlet esetében igazolást nyert, mert mindkét esetben az $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ arány az eredeti oldatkeverékben 10:1-nek felelt meg, vagyis megegyezett a 6. kísérlet kezdeti állapotával; de míg utóbbi esetben 100 mol. Na_2O -ra 240·4 mol. $\text{SiO}_2 + \text{Al}_2\text{O}_3$ jutott, a 8. kísérletben csak 94·1, a 9.-ben 103·5 mol. Az eredmény az volt, hogy ez esetben nem a 6. sz., hanem a 4. és 5. sz. mesterséges zeolith összetételének megfelelő terméket kaptuk, még pedig mindkét esetben (8. és 9. zeolith) hasonló összetételű terméket kaptunk, annak bizonyságául, hogy a megegyezés nem valami véletlen, közelebbről nem ismert colloidállapotnak, hanem valószínűleg határozott chemiai egyensúlyi állapotoknak tulajdonítható. A 8. és 9. zeolith megegyező összetétele még azt is bizonyítja, hogy *ha az eredeti oldatok összetétele, vagyis például az $\text{SiO}_2 : \text{Na}_2\text{O}$ molekula-aránya változik is, de a keverékoldatban a három hatóanyag aránya állandó, akkor mindig ugyanazt az összetételű vegyületet kapjuk.* Ez a jelenség megint a *chemiai* jelenség természete mellett bizonyít.

A 8. zeolith készítéséhez a 3. táblázat adatai értelmében olyan szilikátoldatot használtunk, melyben 100 mol. Na_2O -ra csak 198·6 mol. SiO_2 jutott, a 9. zeolith esetében ellenkezőleg 310·5 mol. SiO_2 . Ha pedig a 9. kísérlet eredeti oldatait a 4. és 5. kísérlet oldataival hasonlítjuk össze, azt látjuk, hogy a három kísérletben a kovasavoldatban az $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ arány közelítőleg megegyezik, az alumínátoldatokban azonban az $\text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Na}_2\text{O}$ a 9. kísérlet esetében sokkal tágabb (100 mol. Na_2O jut 13·5 Al_2O_3), mint a 4., illetőleg 5. kísérletben (76·9, illetőleg 80·5 Al_2O_3).

Még érdekesebb a 10. kísérlet eredménye, mert ez alkalommal a Na_2O molekulák szaporításával sikerült az *alapvegyület összetételét elérnem.* Ebben az esetben az eredeti keverékben az $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ mol. aránya ismét 10:1-nek felelt meg, de a Na_2O

molekulák aránya körülbelül kétszer akkora volt, mint a 8. és 9. kísérletben, illetőleg 5-ször akkora, mint a 6. kísérletben. A kapott termék, a 10. zeolith, molekuláris összetétele a 3. zeolithéval csaknem tökéletesen megegyezik. Így tehát sikerült megvalósítanom GANSnak azt a feltevését, hogy *ha elegendő a lúgfelesleg, akkor még oly nagy kovasavfelesleg esetében is, mint jelen esetben, a normalis zeolithnak megfelelő összetételű vegyület keletkezik.* Ha a 3. táblázatban a 3. és 10. kísérlet eredeti és keverékoldatainak 100 mol. Na_2O -ra számított értékeit összehasonlítjuk, az eredeti állapotnak megfelelő molekula-arányok a hatóalkatrészek között még sokkal nagyobb különbségeket árulnak el, mint a 6. és 8., illetőleg 9. kísérlet esetében. Az eredmény mégis ugyanahhoz az összetételhez vezetett.

A nedves úton készített mesterséges zeolithok előállításai körülményeit és a kapott termékek chemiai összetételét mér- a legelve, tehát a következőket állapíthatom meg:

1. Ha csupán az SiO_2 és Al_2O_3 molekuláris arányát vizsgáljuk, akkor *látszólag* igazolódik STREMMÉ elmélete, hogy a kapott colloidesapadékokban az SiO_2 és Al_2O_3 mol. aránya a kísérleti körülmények változtatásával változik. *Ez a változás azonban korántsem szabálytalan, hanem a stöchiometriai törvényeinek látszik hódolni, mert:*

a) az SiO_2 és Al_2O_3 molekulák nem a kezdeti állapotnak megfelelő arányban, hanem határozott, *ugrásszerű törvényszerűség alapján, még pedig egész molekuláknak közelítőleg megfelelő arányban válnak ki az oldatokból.*

b) *Annál több SiO_2 molekula kapcsolódik az Al_2O_3 molekulához, minél távolabb volt a kezdeti arány a két gyök között és minél kevesebb volt az eredeti keverékoldatban az Na_2O -felesleg.*

2. *Bármiként változtattuk a hatóanyagok molekula-arányát a kapott termékekben, az $\text{Al}_2\text{O}_3 : \text{R}^{\text{II}}\text{O}$ (illetőleg $\text{R}^{\text{II}}\text{O} + \text{R}_2^{\text{I}}\text{O}$) arány közelítőleg mindig 1:1-nek felelt meg.* Ez GANSnak azt a feltevését látszik igazolni, hogy ilyen körülmények között valóban az Al_2O_3 és a bázismolekulák között szoros kapcsolat áll fenn, mely a természetben is előforduló alumínátok stöchiometriai arányának felel meg ($\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{R}^{\text{II}}\text{O}$, vagy $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{R}_2^{\text{I}}\text{O}$).

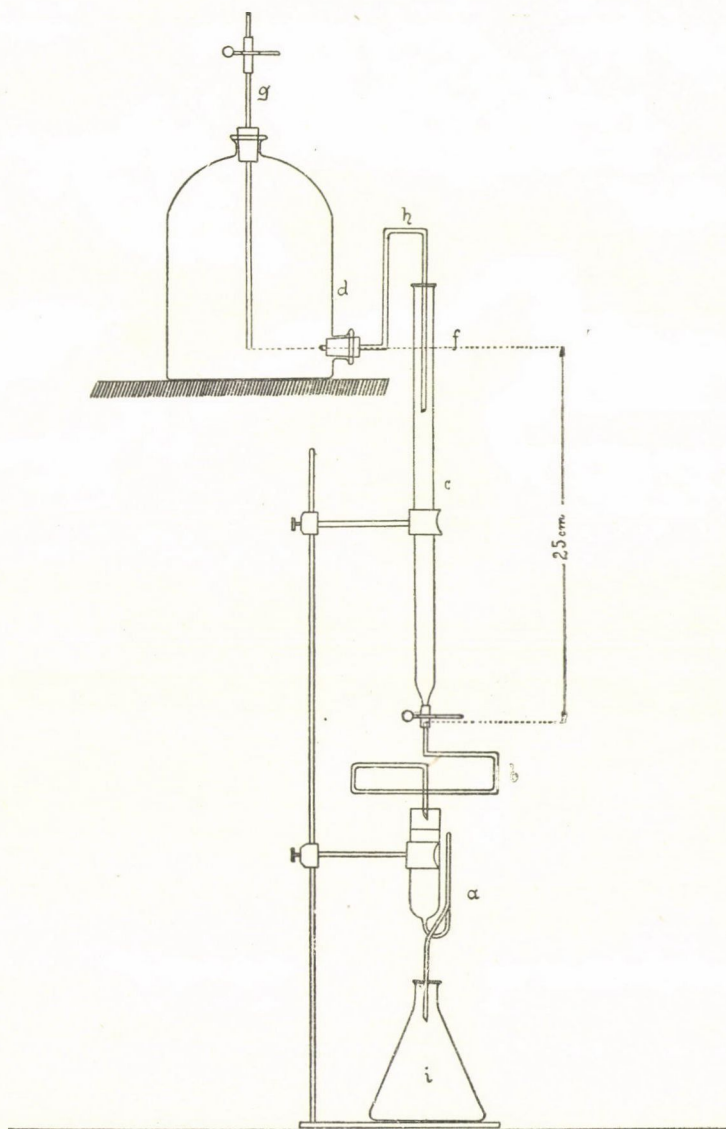
Az 1. és 7. zeolith e tekintetben némileg eltér ugyan e szabálytól, ezek a látszólagos kivételek azonban a kísérleti körülményekből könnyen magyarázhatók.

3. Kétségtelen, hogy a kezdeti oldatok koncentrációjának változtatásával a kapott termékek összetétele is gyakran változik, de *ez a változás sem szabálytalan és kémiai vonatkozásokkal magyarázható*. Ezek a kémiai vonatkozások különösen azokban az esetekben domborodnak ki, midőn a kezdeti állapot nagyon különböző, a kapott termék pedig csaknem teljesen meg-egyező kémiai összetételű volt, épúgy mint a valódi kémiai reakciók lefolyása esetében.

2. A mesterséges zeolithok báziskicserélődése.

Már fent idézett közleményeimben rámutattam, hogy a nedves úton készített zeolithok bázisai $\frac{n}{10}$ ammoniumchlorid-oldattal bázisaiknak átlag 30%-át, 10%-os ammoniumnitráttal pedig 70%-át cserélik ki, és hogy e tekintetben a különböző készítmények között érdemleges különbség nem mutatkozott. A RIEDEL-féle permutittal és a 3. sz. zeolithtal végzett kísérleteimből az is kitűnt, hogy az ezekben foglalt fémgyökök $2.5\ n - CaCl_2$, illetőleg 10%-os $(H_4N) NO_3$ oldattal igen gyorsan és csaknem teljesen kicserélhetők. Most ezeket a tájékoztató kísérleteket újabb beható kísérletekkel egészítettem ki. Elvben ugyanazt az eljárást alkalmaztam, mint ezt már idézett közleményeimben leírtam, csak a készülék összeállítása volt egyszerűbb és szűrő gyanánt nem használtam ultraszűrőhártyát, mert ezzel igen lassan megy a szűrés, hanem a SOXHLET-féle extrahálóban használatos SCHLEICHER- és SCHÜLL-féle tubusokat. A készülék összeállítását az 1. ábra mutatja.

Az ábrán *a* az extrahálónak megfelelő üvegszivornya, melybe a zeolithot tartalmazó papirhüvelyt helyeztük; *b* a kapilláris, mely a folyadékpótlás egyenletességét szabályozza; *c* közönséges bürettacsó, melyben állandó folyadékoszlopot állítottunk elő az által, hogy az oldat a *d* palaczkból az elhasználáshoz képest az *f* vonal szintjében állandóan pótlást nyert, ugyanekkor



1. ábra.

a *g* üvegcsövön át ugyanannyi térfogatú levegő szívódott be, a mennyi a *h* szivornyán lefolyt. Kísérlet folyamán az összes szorítócsapok nyitva állanak és csak arra valók, hogy ha bármilyen okból a kísérletet megszakítjuk, az oldatok állapotát fenntarthassuk. A leszűrt oldatot az *i* hosszúnyakú üvegpalaczkba gyűjtöttük és mennyiségét súly szerint állapítottuk meg. A térfogatot azután a lemért súlyból és az oldat fajsúlyából számítottuk. A párolgás lehető kiküszöbölése végett a hosszúnyakú palaczk nyílását fenn vattapamacscaal zártuk el.

A kísérlet anyagául a 6. és 7. sz. zeolith szolgáltat; mindenikből pontosan 2·5 g.-ot mértünk le, még pedig a 6. sz. zeolithból egy, a 7. sz.-ból 4 kísérlethez. Az utóbbi 4 próbával 4 külön kísérletet végeztünk, melyek egymástól csak abban különböztek, hogy a kapillárisok méreteit változtatva, különféle sebességgel szűrődött át az oldat a zeolithon. A kicserélődést előidéző oldat valamennyi kísérletben pontosan beállított 10%-os ammoniumnitrátoldat volt. Eredetileg az volt a célom, hogy nemcsak az oldatban volt bázist, hanem az oldatból hiányzó ammoniumot is meghatározzuk, ez azonban ilyen koncentrált oldatokkal pontos eredményre nem vezetett. A kísérlet befejeztével ellenőrzésképen meghatároztuk a zeolithban még visszamaradt *CaO*-ot, de a lekötött ammoniumot ismét nem határozhattuk meg, mert a zeolithból a fölös ammoniumnitrát kimosása veszteséget okozott volna. A kísérlet eredményeit a 4. táblázat tartalmazza.

A táblázat adataiból mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy ha a kísérlet nem tartott nagyon sokáig, mint a 7. zeolithtal való 4. kísérlet esetében, akkor az átszűrt oldatokban talált és a zeolithban visszamaradt *CaO* összege alig különbözött a lemért zeolithokban foglalt *CaO*-tartalomtól. Ha azonban a kísérlet sokáig tart és a zeolithból kicserélt bázis kevés, a kísérleti hibák a pontosság rovására érvényesülnek. Az is kitűnik a 7. zeolith 1. kísérletéből, hogy ha a lemért zeolith csak körülbelül 3 millimol kicserélhető *CaO*-ot tartalmaz, ez a mennyiség közelítőleg már 24 óra alatt kicserélődik, ha ez alatt körülbelül 1400 cm³ 10%-os (*H₄N*) *NO₃* oldat szűrődik át a zeolithon. A kicserélt bázisnak mintegy fele már az első három óra alatt

4. táblázat.

Kísérlet időtartama és egyéb körülmények jelölése	Kísérlet a 6. zeolithtal		Kísérletek a 7. zeolithtal							
			1. kísérlet		2. kísérlet		3. kísérlet		4. kísérlet	
	CaO mg.	CaO millimol	CaO mg.	CaO millimol	CaO mg.	CaO millimol	CaO mg.	CaO millimol	CaO mg.	CaO millimol
3 óra alatt átszűrt oldatban volt...	—	—	89·1	1·588	—	—	—	—	—	—
6 „ „ „ „ „	—	—	139·6	2·488	70·5	1·256	—	—	—	—
24 „ „ „ „ „	187·9	3·349	180·8	3·223	135·5	2·411	119·9	2·137	84·7	1·510
30 „ „ „ „ „	—	—	—	—	141·4	2·520	—	—	—	—
2 nap „ „ „ „ „	218·0	3·886	—	—	153·0	2·727	139·3	2·483	109·6	1·953
3 „ „ „ „ „	233·0	4·153	—	—	—	—	152·8	2·723	121·6	2·167
4 „ „ „ „ „	—	—	—	—	—	—	165·7	2·953	129·0	2·299
5 „ „ „ „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	135·5	2·415
6 „ „ „ „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	140·4	2·502
7 „ „ „ „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	146·2	2·606
Kísérlet előtt a lemért zeolithban volt:	239·5	4·269	182·0	3·244	182·0	3·244	182·0	3·244	182·0	3·244
Kísérlet befejeztével a zeolithban volt:	2·6	—	3·1	—	25·0	—	13·4	—	15·4	—
Kísérlet folyamán meg nem határozott különbség volt:...	—3·9	—	+1·9	—	—4·0	—	—2·9	—	—20·4	—
Kísérlet tartama napokban:...	3 nap		3 nap		3 nap		7 nap		8 nap	
Naponként átszűrt oldat átlagos mennyi- sége cm ³ -ekben...	1362·1		1425·1		721·2		312·0		167·6	

20*

szabadult fel, a 2. három óra alatt a kicserélődés gyorsasága már a felére csökkent és az utolsó részlet felszabadítására, tehát a 3. negyedrésze már 18 óra volt szükséges. Ha azonban az oldat átszűrődési sebességét csökkentettem, akkor a kicserélődés gyorsasága jobban csökkent, mint az átszűrődés gyorsasága. A 7. zeolith esetében a 24 óránként átszűrt oldatmennyiségeket úgy szabtam meg, hogy a 2. kísérletben körülbelül félannyi szűrődött át, mint az első kísérletben, a 3. kísérletben körülbelül félannyi, mint a 2.-ban és a 4. kísérletben ismét körülbelül félannyi, mint a 3.-ban. Ezzel ellenkezőleg a bázisok felszabadítása fokozott mértékben lassúdott meg.

A 6. zeolithtal csak a legnagyobb sebességgel dolgoztam, mely körülbelül megegyezett a 7. zeolith 1. kísérletének sebességével. Minthogy azonban a lemért zeolithban 1 millimollal több volt a CaO , ez esetben az első 24 óra nem volt elegendő az összes CaO -nak kicserélésére, habár abszolút mértékben ez alatt még valamivel több cserélődött ki, mint a 7. zeolithból. Minthogy azonban a két zeolith kémiai összetétele nem azonos, a szerzett tapasztalatok alapján még nem dönthetjük el biztosan azt, hogy ez az eltérő viselkedés az anyagok különböző kémiai összetételéből, vagy a hatóanyag koncentrációjának megváltoztatásából eredt-e.

Az a körülmény, hogy WIEGNER a permutittal végzett kísérletei folyamán szintén azt tapasztalta, hogy a permutit mennyiségének növelésével az abszorbeált ammonia kisebb mértékben növekedett, mint a mennyi a permutit-mennyiség növelésének megfelelt,¹ megerősíti egyrészt GANSNAK azt az állítását, hogy a nedves úton készített aluminátszilikátok (mesterséges zeolithok) teljesen hasonló módon viselkednek, mint az olvasztással előállított hasonló termékek (permutitok), másrészt pedig azt a feltevést támogatja, hogy fenti esetben is a báziskicserélődés a 6. zeolith kísérletében azért volt viszonylagosan lassúbb, mert a hatóanyag kezdeti koncentrációja a 7. zeolith 1. kísérletéhez viszonyítva megváltozott.

A báziskicserélés lefolyását szemléltetővé tehetjük az által,

¹ Journ. f. Landw. (1912), 60. köt. 143. lap.

ha a 4. táblázat adatait akként számítjuk át, hogy az átszűrt oldatok CaO tartalmát a lemért zeolith CaO tartalmának százalékaiban fejezzük ki. A számítás eredményeit az 5. táblázat tartalmazza.

5. táblázat.

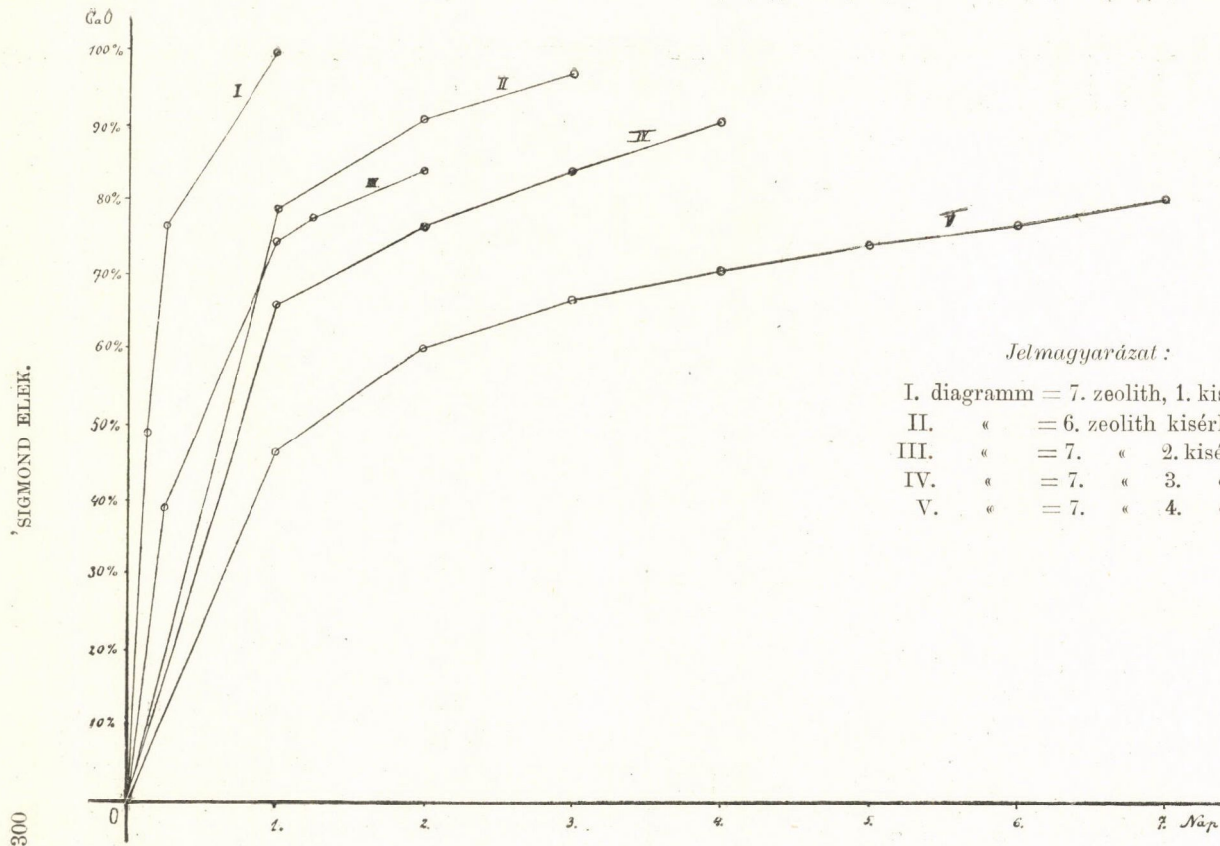
Az átszűrődés ideje	Kísérlet 6. zeolithtal	Kísérletek a 7. sz. zeolithtal			
		1	2	3	4
	CaO tartalom a lemért zeolith CaO tartalmának százalékaiban kifejezve				
3 óra alatt átszűrt oldatban	—	48·9%	—	—	—
6 „ „ „ „	—	76·7%	38·7%	—	—
24 „ „ „ „	78·5%	99·3%	74·5%	65·9%	46·5%
30 „ „ „ „	—	—	77·7%	—	—
2 nap „ „ „ „	91·0%	—	84·0%	76·5%	60·2%
3 „ „ „ „	97·3%	—	—	84·0%	66·8%
4 „ „ „ „	—	—	—	91·0%	70·9%
5 „ „ „ „	—	—	—	—	74·5%
6 „ „ „ „	—	—	—	—	77·1%
7 „ „ „ „	—	—	—	—	80·3%

Ha ezeket az értékeket derékszögű koordináta-rendszerben grafikusán tüntetjük fel, akkor a 2. ábrán felrajzolt görbéket kapjuk. Ezekből a görbékből azt látjuk, hogy ha nagyon gyorsan cseréljük ki a hatóoldatot, akkor a báziskicserélődése csaknem egyenes vonal irányában és igen meredeken tör felfelé. Mennél lassúbb volt a reactio lefolyása, a görbének alakja annál jobban közelíti meg a parabola görbét.

Azok a görbék, melyeket SCHREINER és FALLYER a talajnak káliumabsorptiójára nézve kapott,¹ nagyon hasonlítanak ezekhez a görbékhöz, a miből megint azt következtetem, hogy *a báziskicserélődés a talajokban hasonló törvények értelmében megy végbe, mint a fent ismertetett zeolithokban.* Ugyanehhez az eredményhez jutott WIEGNER² más úton, és GANS már fent

¹ U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils, Bull. No. 32. (1906).

² U. o.



2. ábra.

idézett értekezéseiben egyenesen rámutat arra, hogy a talaj báziskicserélő-képességét az ilyen víztartalmú, colloid-halmaz-állapotú aluminátszilikátok okozzák.

Mindezek után kétségtelen bizonyossággal állíthatjuk, hogy azok a vegyületek (GANS szerint), illetőleg gélkeverékek (STREMMÉ vagy WIEGNER szerint), melyek a talajokban a bázisok egyenértékű kicserélésével kapcsolatos absorptiót előidézik, hasonlók azokhoz a mesterséges termékekhez, melyeket GANS előírása alapján olvasztással (permutitok), vagy nedves úton (aluminátszilikátok) mesterségesen is előállíthatunk, és a melyeket a természetben előforduló zeolithokhoz való rokon viselkedésük és hasonló összetételük alapján mesterséges zeolithoknak nevezhetünk.

Éppen ezért ezeknek a mesterséges zeolithoknak beható tanulmányozása a talajismeret szempontjából igen becses tanulságokra vezethet, melyekről néhány tapasztalati eredményem alapján értekezésem utolsó fejezete tanuskodik. Kivánatos éppen ezért, hogy az a vitás kérdés is végérvényesen megoldassék, vajjon ezek a mesterséges zeolithok valódi chemiai vegyületek-e, vagy gélkeverékek. Ezt azonban csak tiszta és egynemű anyagon tanulmányozhatjuk. Ezért a fent ismertetett mesterséges zeolithokat előbb ilyen irányban kellett tanulmányoznom.

3. A mesterséges zeolithok mineralogiai-mikroszkopi vizsgálata.

Az ilyen colloid- vagy amorph-anyagok egyneműségét ugyan nehéz megállapítani, mégis a rendelkezésre álló módszerekkel megpróbáltam, hogy a feladat megoldásához legalább közelebb jussak. E végből két módszer kínálkozott, az egyik a mineralogiai-mikroszkopi vizsgálat, annak eldöntésére, hogy az amorph-anyag tartalmaz-e kristályos anyagokat; a másik az ellenkező jellegű festékekkel való festési kísérletek.

A mineralogiai-mikroszkopi vizsgálatok végzésére dr. SCHAFARZIK FERENCZ műegyetemi tanárkollegámat kértem fel, ki időt és fáradságot nem kimélve, készítményeimet nagyon alaposan és nagy érdeklődéssel megvizsgálta. Szíves fáradozásáért e helyen

is hálás köszönetemet nyilvánítom. A vizsgálat eredményeit a következőkben foglalhatom össze:

A vizsgálat tárgyát főképen az 1—7. sz. zeolithok alkották. Ezek közül a 3. zeolith szilánkosan és kagylósan törő, csaknem egynemű anyagból állónak bizonyult, mely keresztezett nikolok között megfigyelve, még a gipszlemez elsőrendű vörös színében is isotrop volt. Ismételt megfigyelések alapján ugyan sikerült kevés kristályos, anisotrop-képződményt is találni, de ezek száma elenyészően kevés volt. Ezek az amorph-szilánkok fény-



a) 1. sz. zeolith.



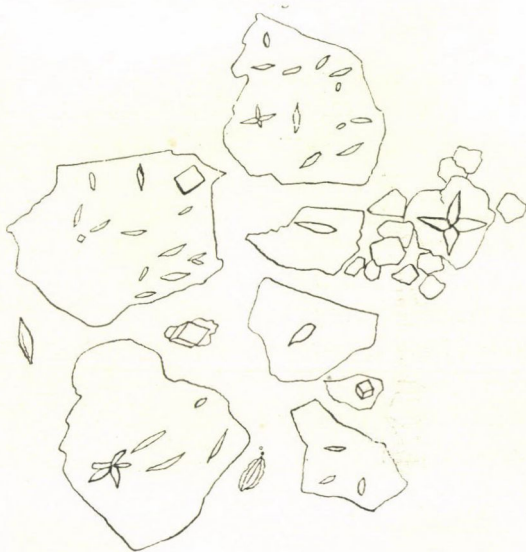
b) 2. sz. zeolith.

3. ábra.

törésmutatója a BECKE-féle vonalak viselkedése alapján a vízé ($n = 1.3305$) és a kanadabalzsamé ($n = 1.536$) közé esik.

A többi hat vizsgált zeolith már ennyire sem bizonyult egynemű és isotrop anyagnak. Az anyag túlnyomó része ugyan ezekben is a 3. sz. zeolith szilánkosan és kagylósan törő egynemű és isotrop anyagához hasonlóan viselkedett; azonban részint az amorph-alapanyagban beágyazva, részint ebből — valószínűleg az anyag szétzúzása következtében — kihullottan határozottan kétféle kristályos anyagot lehetett megállapítani. Az egyik rendetlen fekvésű, apró orsóalakú kristályrudimentumok alakjában fordult elő, a mely kristályrudimentumok keresztezett nikolok között erős interferentia-színeket árultak el. Egyenes kioltódásúak és

valószínűleg rhombos kristályzatúak. Megjegyzendő azonban, hogy e kristálykák, pusztán csak az egyenes kioltódásukat véve alapul, lehetnének a rhomboson kívül — ha hosszirányuk a c tengelynek megfelel — még négyzetes, vagy hatszöges rendszerűek, sőt szem előtt tartva azt az eshetőséget, hogy hosszirányuk a b tengelyt képviselheti, még egyhajlású kristályrendszerűek is. E kristályos képződmények fénytörőképessége is az amorph-alapanyagától lényegesen eltért, még pedig a BECKE-féle vonalak

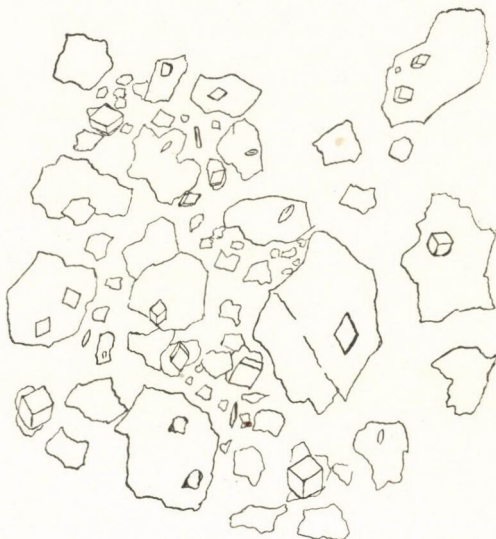


4. ábra.

viselkedéséből ítélve, a kristályos anyag fénytörésmutatója nagyobb, mint az amorph-alapanyagé. Az 1. sz. zeolithban, ahol ezek az orsóalakú kristályos képződmények nagy mennyiségben fordultak elő, a színtelen alapanyagtól eltérőleg az apró orsók egyszerű napfényben halvány-sárga színárnyalatot árultak el.

A másik kristályos képződmény rhomboéderesnek bizonyult. Az 5. sz. zeolithban *szépen kifejlődött rhomboéder* volt megfigyelhető, még pedig ennek polus-csúcsa és a lapok élei oly élesen voltak láthatók, hogy a rhomboéderlap tompa szögét is sikerült megmérni. Ez $111^{\circ} 30'$ -et kitevő szögnek felelt meg. Hasonló

rhomboédereket azután nagyszámmal a többi készítményben is találtunk. E kristályos képződményeknek kettős fénytörőképessége láthatólag gyengébb volt, mint az orsóalakú képződményeké, ezért a jelenség különösen az elsőrendű vörös színben volt élénken látható. A kioltódás a rhomboéderlap rövidebb diagonálisa szerint következett be. Fénytörőképességük a BECKE-féle vonalak viselkedéséből megítélve az amorph-alapanyagénál erősebb, de az orsóalakú kristályrudimentumokénál gyengébb volt.



5. ábra.

Az említett kristályos képződményeknek sűrű előfordulásáról az amorph-alapanyagban a 3. ábrán feltüntetett két mikroszkopos fényképfelvétel keresztezett nikolok között nyújt tájékoztatást. Az *a* felvétel az 1. sz., a *b* felvétel a 2. sz. zeolithtal készült. A fekete mezőben látható világos pontok a kristályos képződmények sűrűségét ábrázolják. A kristályos képződmények alakjáról, előfordulási körülményeiről és az amorph-szilánkok alakjáról a fenti rajzok nyújtanak felvilágosítást.

Az orsóalakú kristályrudimentumok nagyított rajzát a 4., a rhomboéder-kristályok nagyított rajzát pedig az 5. ábra mutatja be.

A mi az említett kristályos képződmények előfordulásának sűrűségét illeti, e tekintetben a különböző zeolithok némi különbségeket árultak el; az eredményeket a következőkben foglalhatom össze:

1. sz. *zeolithban* az orsóalakú kristályrudimentumok igen sűrűn fordultak elő és látszólag túlsúlyban vannak a rhomboéderes képződmények felett.

2. sz. *zeolithban* a rhomboéderes kiválás van túlsúlyban.

3. sz. *zeolithban* kristályos képződményeket alig sikerült felfedezni.

4. sz. *zeolithban* a rhomboéderes több, az orsóalakú kevés.

5. sz. *zeolithban* és 6. sz. *zeolithban* a kristályos előfordulás a 4. sz. *zeolith*éval körülbelül megegyezett.

7. sz. *zeolithban* az orsóalakú képződmények megint nagyobb számmal fordultak elő.

A 8. sz. *zeolithból* nem maradt anyag a mikroszkopos vizsgálatra, de a hasonló összetételű és előállítású 9. sz.-ban a rhomboéderek bár kisebb számmal, de mégis előfordultak. Még kevesebb rhomboéder volt a 10. sz. *zeolithban*. A készítmény tehát ebben a tekintetben is megegyezett a 3. sz. *zeolith*tal. Orsóalakúakat sem a 9., sem a 10. számúban nem sikerült felfedezni.

A fent felsorolt készítmények tehát a mineralogiai-mikroszkopi vizsgálat alapján *nem bizonyultak egynemű anyagoknak, hanem legalább három különböző anyag keverékének*, nevezetesen: a szilánkosan és kagylósan törő *amorph-alapanyag*, a *rhombos kristályok és az orsóalakú kristályrudimentumok keverékének*. Ezek közül a főmennyiség kétségtelenül az *amorph-alapanyag*, de a kristályos képződmények is helyenként oly sűrűn fordulnak elő az alapanyagban, hogy ezeknek képződése az *alapanyaggal szorosabb kémiai összefüggést árul el*. Ha mérlegeljük azt, hogy a kristályos képződmények kétségtelenül valódi kémiai vegyületek és ezeknek változó mennyisége ellenére a készítményekben az $SiO_2:Al_2O_3:H^+O$ molekuláris aránya közelítőleg egész molekulák arányában változik: *feltételezhetjük azt is, hogy az amorph-alapanyag összetétele is a stöchiometria*

szabályainak hódol. A további kutatások feladata, hogy a kristályos képződmények képződési körülményeit és közelebbi összetételét felderítse. Ha sikerülne ezeket az alapanyagtól valami módon elkülöníteni és az amorph-alapanyagot külön vizsgálni, akkor ez utóbbinak chemiai alkotását is megállapíthatnánk.

Ne feledjük azt sem, hogy ezek a készítmények a kristályos előfordulások változó mennyisége és előfordulása ellenére is bázisaik kicserélődésében észrevehető különbségeket nem árultak el, *a mely körülmény szintén arra enged következtetni, hogy az amorph-alapanyag a báziskicserélődés szempontjából legalább is hasonlóképen viselkedik, mint a kristályos képződmények.*

Az amorph-alapanyag egynemű voltának felderítése céljából néhány festési kísérletet hajtottam végre. Ismeretes ugyanis, hogy a kovasavhydrát úgynevezett *bázikus* festésekkel, mint például a methylen-kékkel igen jól festődik, a megkötött festék pedig vízzel nem mosható ki. Ezzel ellenkezőleg az amorph-aluminiumpydroxidhydrát hasonló körülmények között szintelen marad. Megkísérletem az utóbbit *savanyú természetű festékekkel*, alkoholban oldott alizarinnal festeni. Ez igen jól sikerült. Hasonló módon eljárva a kovasavhydrát nem festődött. Ha pedig a kovasavhydrátot és aluminiumpydroxidhydrátot egymással kevertem és előbb alizarinoldattal, majd methylen-kékkel festettem a keveréket, akkor a mikroszkóp alatt a kékre festett kovasavszilánkokat az élénk vörös aluminiumpydroxidhydrátszilánkoktól jól meg lehetett különböztetni.

A fenti zeolithokkal hasonló festési kísérleteket hajtottam végre. A készítményeket először alizarinnal festettem és azt tapasztaltam, hogy habár a festődés nem volt oly erős, mint a tiszta aluminiumpydroxidhydraté, de határozottan megállapíthattam azt, hogy a készítmények mind festődtek alizarinnal. A mikor azután az alizarinnal festett készítményeket methylen-kékkel is megfestettem, a szilánkok kék vagy ibolyás színt öltöttek, a szerint, hogy a készítményben az SiO_2 , illetőleg az Al_2O_3 molekula aránya növekedett. A készítmények tehát látszólag amphoter-viselkedésűek, mert savanyú, illetőleg bázikus festékekkel is festhetők, holott a kiindulási anyagok ellenkezően viselkedtek.

Feltételezhetjük ugyan azt is, hogy a készítményekben a kovasav-gél és alumíniumoxydhydrátgél oly bensőleg és egyenletesen keveredett, hogy mindkét festéket felveszi és a két szín különböző arányú keveréke azután hol a kék, hol pedig a vöröses ibolya árnyalatát árulja el. Látszólag azonban az egyes készítmények amorph-alapanyaga egyneműnek mutatkozott.

A festés a szilánkok likacsos szerkezetét is szemléltethetvén tette. A vékonyabb szilánkok ugyanis csaknem szintelenek és a festett pontok tömegével telve voltak.

Megjegyzem, hogy a fent említett kristályos képződmények e közben nem festődtek és hacsak nem voltak az amorph-anyaggal erősen beburkolva, még élesebben látszottak, mint a festetlen készítményekben.

Az elmondottakat összegezve megállapíthatjuk, hogy a fenti zeolithtermékek készítésekor határozott chemiai reakciók is mennek végbe, melyek folyamán határozottan kristályos termékek is képződnek; ez utóbbiak képződése pedig szoros rokonságban látszik lenni az amorph-alapanyaggal. A készítmények tehát nem állanak egynemű anyagból és ezért előbb gondoskodnunk kell a különböző termékek (kristályos és amorphképződmények) elkülönítéséről vagy külön előállításáról és csak azután foglalkozhatunk behatóbban a tisztán előállított egynemű anyagok chemiai vagy physikai természetével.

WIEGNER közleményéből¹ úgy látszik, hogy a kísérleteihez használt permutit is tartalmazott kristályos képződményeket, SINGER pedig olvasztás útján sok és különböző összetételű kristályos készítményhez jutott, de nem közölte a mineralogiai-mikroskopi vizsgálat eredményét és így nem tudjuk megítélni, hogy egynemű vagy különemű anyagokból állottak-e készítményei.²

Ha tehát ezek a nedves úton készített zeolithok nem is bizonyultak egynemű chemiai vegyületeknek, a fent leírt jelenségek bennem mégis azt a feltevést keltik, hogy az amorph-alapanyag a kristályos képződményekhez közelálló chemiai

¹ U. o. 130. lap.

² SINGER: Über künstliche Zeolithe stb.

képződmény, a melyből kedvező viszonyok között az ismertetett kristályos képződmények alakultak ki.

4. A mesterséges zeolithok talajismereti jelentősége.

A talaj alkotásában szereplő alumoszilikátok elmálása közben meg van a lehetőség arra, hogy oldható alkaliszilikátok és alumínátok képződjenek és így, ha a talajképződési körülmények nem kedvezőtlenek, az is lehetséges, hogy az előbbieken ismertetett mesterséges zeolithokhoz hasonló termékek keletkezzenek.¹ GANS a talajokban az ilyen víztartalmú alumoszilikátoknak két csoportját különbözteti meg, az egyik a báziskicserélődés szempontjából sokkal reakcióképesebb, mint a másik. Az első csoportba osztja a fent ismertetett mesterséges zeolithokat, melyeket aluminátszilikátoknak nevez, a másik csoportba az allophanszerű anyagokat, illetőleg az SiO_2 és Al_2O_3 gélek keverékeit. GANS tapasztalatai alapján azt következteti, hogy a talajban ez utóbbiak rendszeren csak alárendelt mennyiségben fordulnak elő és hogy a zeolithszerű amorphvegyületek alkotják a talajnak azt a reakcióképes anyagát, melyben a legfontosabb növénytaplálkozási reakciók végbemennek és a mely a talaj sajátos chemiai jellegét megszabja. Már WAX 1850-ben és utána igen sokan megállapították, hogy a talaj hasonló báziskicserélőképességgel bír, mint a nevezett mesterséges zeolithok.² Ezt saját tapasztalataim is megerősítették. Az említett két körülmény feljogosíthat arra a feltevésre, hogy *a talaj báziskicserélődését legalább részben hasonló zeolithok okozhatják.* Már most hangsúlyozom azonban azt az álláspontomat, hogy a báziskicserélődést valószínűleg *csak részben* okozzák a talaj zeolithjai, mert éppen a még eddig nem közölt tapasztalataimból azt kell következtetnem, hogy a talajban a

¹ GANS R.: Intern. Mitt. f. Bodenkunde 1913. évf. 540—555. lap.

² V. Ö. HEIDEN E. Lehrb. d. Düngerlehre cz. munkájában a talajabsorptióra vonatkozó történeti részt; továbbá WIEGNERnek a Journ. f. Landw. cz. folyóiratban a talaj absorptiójáról szóló fent idézett közleményét és GANS idézett dolgozatait.

jelenségek sokkal bonyolultabbak és hogy valószínűleg még más talajalkotórészek is a báziskicserélődés szempontjából hasonló jelenségeket árulnak el, mint a mesterséges zeolithok. Ha ma ezek a kutatások nem is fejeződtek még be, annyit mégis már eddig megállapíthattam, hogy *a kicserélt bázisok minősége és molekuláris aránya a talajok chemiai és physisikai sajátágaival szorosan összefügg.*

Már a bevezető részben rámutattam arra, hogy a talaj alkotásában szereplő anorganikus rész második csoportját, nevezetesen az amorph- vagy colloid-természetű elmálási termékeket, a hová az ismertetett zeolithszerű vegyületek is beleillenek, *a növények éléskamrájának minősíthetjük a talajban.* Ebben halmozódnak fel ugyanis a legértékesebb növényi táplálóanyagok, ha pedig ez az éléskamra üres vagy értéktelen anyagokat tartalmaz, vagy maguk ezek az elmálási termékek csak kis mennyiségben fordulnak elő: akkor a talaj szegény. KNOP már 1871-ben a termőtalajok természettudományi alapon nyugvó becslési eljárásában nagy súlyt helyezett a talajok bázisabsorptio-képességére.¹ Eljárása azonban a gyakorlatban nem vált be. Ennek egyik főoka az, hogy KNOP megelégedett azzal, hogy megállapítsa, mennyi nitrogent, illetőleg kaliumot absorbeálnak a talajok neutrális sóoldatokból, de nem határozta meg az abszorbeált bázisokkal äquivalens értékben felszabadított bázisok minőségét és mennyiségét. Már pedig könnyen belátható, hogy ha a fent ismertetett zeolithokhoz hasonló vegyületek okozzák a talaj bázisabsorptiójának zömét, a növénytáplálkozás szempontjából nem közömbös, hogy ezekben a zeolithokban minő bázisok vannak lekötve és milyen mennyiségben.

Egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy az egyik talajban főképen calcium- és kalium-zeolithok, a másik esetben magnesium- és natrium-zeolithok fordulnak elő. Ha KNOP szerint $(H_4N)Cl$ oldattal meghatározzuk a két talaj nitrogen-absorptio-képességét, előfordulhat, hogy az első talaj kevesebb ammoniumot köt meg, mert absolute kevesebb a báziskicserélődésre alkalmas

¹ KNOP W.: Die Bonitierung d. Ackererde 1871. Leipzig, 79—88. lap.

zeolith, mint a második talajban, mégis növénytáplálkozás szempontjából az első talaj sokkal gazdagabb, mint a második.

Sokat vitatott növény-physiologiai kérdés az, hogy gazdasági növényeink miként veszik fel a talajból a táplálóanyagokat. Vannak, a kik azt állítják, hogy a gyökérzet egyedüli oldószere a kiválasztott széndioxyd,¹ következésképpen feltételezik, hogy csak a szénsavval telített vízben oldható táplálóanyagokat vehetik fel a növények (MITSCHERLICH). Mások erősebb hatású gyökérváladékokat is feltételeznek (CZAPEK, KUNZE stb.) és azt állítják, hogy a szénsavas vízben, illetőleg a talajoldatban feloldott táplálóanyagok magukban nem elegendők a gazdasági növények táplálóanyagszükségletének kielégítésére (SCHLÖSING-FILS, SIGMOND²) és ezért híg savakat ajánlanak a könnyen átszajátítható növényi táplálóanyagok meghatározására a talajban. Újabban egyesek (BAUMANN és GULLY³) a gyökér sejtjeiben előforduló colloidanyagoknak physikai absorptióval kapcsolatos bontó hatást tulajdonítanak és ezzel magyarázzák oldhatatlan talajsóknak felvételét. Bármiként oldódjék is meg jövőben ez a most még vitás kérdés, az kétségtelen, hogy az *oldhatatlan táplálóanyagoknak a talajban előbb valami módon oldódnia kell és csak azután juthatnak a gyökerek sejtjeibe. Erre pedig igen alkalmasak éppen a talajzeolithokban megkötött bázisok*, mert ezek nemcsak széndioxyd és más gyenge savak, hanem neutrális sóoldatok hatására is, sőt kis mértékben már vízben is feloldódnak. Feltételezhetjük tehát, hogy azok a talajok, melyek aránylag sok könnyen kicserélhető calciumot és kaliumot tartalmaznak, a gazdasági növények táplálkozását könnyebben látják el, mint azok, melyekben a kalium helyett natrium, a calcium helyett magnesium fordul elő. E tekintetben pedig, úgy látszik, a talajok feltűnő különbségeket árulnak el. Példaképpen szolgáljon a 6. táblázatban összeállított néhány kísérleti eredményem.

¹ STOCKLASE: Jahrb. wiss. Botanik 46. köt. (1906), 55. lap.

² Math. és Természettud. Közl. XXIX. 1. sz. (1906).

³ Mitt. d. kgl. bayr. Moorkulturanstalt. (1910), 4. füz. 31. lap.

6. táblázat.

	CaO	MgO	K ₂ O	Na ₂ O	Össze- sen	
	100 gr. talajban talált millimolokban					
Hortobágyi 1. sz. talaj	2.60	1.34	0.94	9.62	14.50	szikes, rosz- szul szűrő talajok
Békéscsabai 5. sz. "	8.32	3.86	0.14	7.30	19.62	
Mezőhegyesi szikes "	17.65	2.54	0.55	4.68	25.42	
Békéscsabai 1. sz. "	13.58	5.18	0.44	—	19.20	nem szikes, jól szűrő talajok
" 2. " "	11.22	2.32	0.50	—	14.04	
" 11. " "	11.94	4.16	0.72	0.16	16.98	
Keszthelyi 1. " "	15.958	1.753	0.332	0.194	18.237	
" 22. " "	15.182	1.820	0.414	0.124	17.540	
	Millimolszázalékokban					
Hortobágyi 1. sz. talaj	17.93	9.24	6.48	66.35	100	szikes, rosz- szul szűrő talajok
Békéscsabai 5. sz. "	42.41	19.67	0.71	37.21	100	
Mezőhegyesi szikes "	69.43	10.00	2.16	18.41	100	
Békéscsabai 1. sz. "	70.73	26.93	2.29	0	100	nem szikes, jól szűrő talajok
" 2. " "	79.92	16.52	3.56	0	100	
" 11. " "	70.32	24.50	4.24	0.94	100	
Keszthelyi 1. " "	87.56	9.61	1.82	1.01	100	
" 22. " "	86.55	10.38	2.36	0.71	100	

Ha e táblázatban végignézzük az egyes kicserélhető bázisok mennyiségének és molekuláris arányának változását, *azonnal szembetűnik az a lényeges különbség, mely a szikes és nem szikes talajok CaO és Na₂O molekuláris aránya között fennáll.* De egyszersmind azt is látjuk, hogy szikeseinkben a calciumzeolithok sok esetben igen alacsony mennyiségre redukálódhatnak. Ennek természetes oka az, hogy utóbbi esetekben a talajoldatban a nátriumsók uralkodnak és uralkodtak már a szikes talaj kialakulása óta állandóan. Ez a körülmény egyenértékű azzal, mint midőn például a fent ismertetett calciumzeolithokon állandóan NaCl vagy Na₂SO₄ oldatot szűrünk át. A calciumzeolithok az oldat koncentrációjához és a hatás

időtartamához mérten natriumzeolithokká alakulnak át. Az ilyen talajokban azután könnyen képződhet szóda, ha a natriumzeolithok calciumcarbonat-oldattal érintkeznek. Tapasztalataim valóban igazolták azt, hogy szódát csak azok a szikesek tartalmaznak, melyek szénsavas meszet is bőven tartalmaznak. Ennek híján a szikesekben szódát sohasem találtam.¹ De egyszersmind *ez a körülmény adja meg e talajok jellemző bélyegjét, mely még akkor is megmarad, ha a körülmények változtával a vízben oldható nátriumsók már kihúzódtak, de a natriumzeolithok még megmaradtak.* A szikes talaj tehát még akkor is sziktalaj marad, ha káros sókat már nem tartalmaz.

Utóbbi körülménynek tulajdonítom kötött sziktalajaink rossz vizetáteresztő-képességét, jellemző szétfolyását és kergesedését.

Már GANS megfigyelte,² hogy a víztartalmú colloid-alkali-aluminátszilikátok nyálkás és nehezen szűrő, a megfelelő alkali-földfémvegyületek pedig szemcsés és jól szűrő anyagok.

A fent ismertetett mesterséges zeolithok készítésekor magam is azt tapasztaltam, hogy a kezdetben képződött natriumzeolithok nagyon nehezen szűrtek, mihelyt azonban calciumvegyületekké alakítottam át, a szűrődés sokkal gyorsabb volt.

Ha tehát a talajban a báziskicserélődésben szereplő anyagok hasonlóak az említett mesterséges zeolithokhoz, akkor feltételezhetjük, hogy *a talaj szűrőképessége is a szerint változik, hogy a talajzeolithokban mennyi az alkali, illetőleg alkaliföldfém-bázis.*

HISSINK D. J.³ ez utóbbi körülményt jó szűrőképességű talajon tanulmányozta. Ugyanazt a talajt különböző sóoldatok hatásának vetette alá és azt tapasztalta, hogy CaCl_2 oldat hatására a talaj szűrőképessége jelentékenyen növekedett, natriumchlorid vagy más alkalisóoldat hatására csökkent és messze elmaradt a calciumchloriddal végzett kísérlet eredményétől. Már HISSINK a talaj zeolithszerű szilikátjainak átalakulásaira vezeti vissza e je-

¹ V. ö. Kisérlet. Közl. VIII. köt. (1905), 417. lap.

² GANS R.: Jahrb. d. kgl. preuss. geol. Landesanstalt. (1905. év). XXVI. köt. 2. füzet. 210. lap.

³ Dr. HISSINK D. J.: Die Einwirkung verschiedener Salzlösungen auf die Durchlässigkeit des Bodens. (Ausstellung's Gravenhage 1907.)

lenséget. Ennek a jelenségnek éppen az ellenkezőjét tapasztaltam rossz szűrőképességű sziktalajok esetében. Ha még hozzáfűzöm azt, hogy a 6. táblázatban feltüntetett szikesek a nem szikesekhez viszonyítva mind rossz szűrőképességűek, sőt a rossz szikesek némelyikén a víz hetekig megáll és nem szivárog be, megállapíthatom, hogy *a szikesek rossz vízszűrő tulajdonságát a talajzeolithokban nagymértékben megkötött natrium okozza.* Így érthetővé válik, hogy olyan szikesek is, melyekből a szóda hiányzik és a natriumsó mennyisége alárendelt, a kötött szikekre jellemző *rossz fizikai sajátságokat árulnak el*, mert ezek is fölös natriumsóoldatok hatása alatt képződtek és zeolithjaikban a natrium a rendesenél nagyobb mértékben szerepel. Ha az ilyen rossz szűrőképességű talajt gipszszel keverjük vagy calciumsóoldatok hatásának vetjük alá, a szűrőképesség egyszerre megjavul, az átszűrt oldatban pedig a calciumot részben natrium helyettesíti. Így magyarázható, hogy a gipszezésnek ott is lehet szikjavító hatása, a hol a talaj szódát nem tartalmaz, másfelől pedig érthetővé válik, hogy erősen szikes és szódát tartalmazó talajok megjavításához annyi gipsz szükséges, hogy ennek gyakorlati megvalósítása nem lehet jövedelmező. Valószínű az is, hogy a szikesek *digózásának* sikere is a *«digó»-föld* calcium- és magnesiumszulfát-tartalmában keresendő.¹

Önként értetődik az elmondottakból az is, hogy a kaliumtrágyák iránt azok a talajok éreznek hiányt, melyek zeolithjaiban aránylag kevés a kalium. A calcium rendesen túlsúlyban van, úgy hogy mint növényi táplálóanyag pótlásra ritkán szorul. Mégis a zeolithokban lekötött calciumnak igen fontos a szerepe. Az egyik a már fent említett fizikai hatásában nyilvánul meg, a mi megmagyarázza a mésztrágyázásnak és gipszezésnek ismert fizikai hatását is. Úgy látszik azonban, hogy a zeolithok calciumának még a növénytáplálkozás szempontjából is van különleges szerepe. *Ez a phosphorsavnak megkötése és megóvása a talaj vasvegyületei ellen.* Ha ugyanis az ismertett mesterséges calciumzeolithokon át vízben oldható, például natriumphosphátoldatot

¹ V. ö. 'SIGMOND E.: A szikes talajok tanulmányozása. III. közl. Kísérletügyi Közlemények. VIII. köt. (1905), 3. füzet. 413. lap.

szűrünk át, azt tapasztaljuk, hogy a phosphorsav is és a natrium is az oldatból vagy teljesen eltűnik, vagy legalább is megapad. ROSTWOROWSKI és WIEGNER¹ megállapította ugyan, hogy az alkali-aluminátszilikátok (alkalipermutit) alkaliphosphátok oldataiból phosphorsavat nem kötnek meg, GANS kimutatta azonban² és erről kísérletileg magam is meggyőződtem, hogy *ha calciumpermutiton szűrünk át alkaliphosphátoldatot, a calciumpermutit kezdetben tökéletesen megkötí a phosphorsavat.* Ez a jelenség akként magyarázható, hogy az alkaliphosphát hatására a calciumzeolith calciumja helyet cserél az alkaliphosphát alkalifémházával és egyidejűleg vízben oldhatatlan calciumphosphát keletkezik. GANS azt is megállapította, hogy ez a nagy felületen kiválasztott calciumphosphát kaliumnitrátoldattal ismét oldhatóvá válik, holott ha Al_2O_3 vagy Fe_2O_3 gél kötötte meg a talajban a phosphorsavat, az ilyen phosphorsav hasonló körülmények közt nem oldódik.

Ha megint a mesterséges zeolithok ezen viselkedését a talajzeolithokra alkalmazzuk, beláthatjuk, hogy ha az oldott phosphorsav, még mielőtt oldhatatlanná válnék, a talajban elég bőven találkozik calciumzeolithokkal, akkor *az így megkötött phosphorsavat a növények könnyebben értékesíthetik, mint a másként lekötött phosphorsavat.*

A nitrogéntáplálóanyag szempontjából is a calciumzeolithoknak különleges szerep jut. A szervesanyag bomlásakor keletkezett ammoniumsók zöme szénsavas ammonium. Ha ez hat a calciumzeolithokra, ammoniumzeolith és finoman eloszlott szénsavascalcium keletkezik. Tudjuk, hogy a nitrifikáló baktériumok az ammoniumsók oxydálását szénsavas calcium jelenlétében hajtják végre leggyorsabban. A fenti esetben a szénsavas carbonát és ammoniumsó közel egymás mellett áll a nitrifikáló baktériumok rendelkezésére és a calciumbázis az ammonia oxydálásakor képződött salétromsavat azonnal le is kötheti.

Látni e néhány szembeszökő talajismereti jelenségből, hogy habár a mesterséges zeolithok behatóbb chemiai tanulmányozását még alig kezdtük meg, már is igen nagy horderejű

² Journ. f. Landwirtschaft. (1912. év). 60. köt. 223—235. lap.

¹ Intern. Mitt. Bodenkunde. (1913. év). 562. lap.

talajismereti jelenség megfejtéséhez jutottunk. Feltételezhető, hogy a talaj képződési körülményeinek behatóbb chemiai tanulmányozásával kapcsolatban ezeknek a mesterséges készítményeknek talajismereti jelentősége még egyre növekedni fog. Ez indokolja a mesterséges zeolithoknak talajismereti szempontból való tanulmányozását és példával erősíti meg azt a kiinduláspontomat, hogy ha a talajismeretet mint önálló tudományt műveljük, célunkhoz közelebb jutunk, mint ha csupán más tudományos vagy gyakorlati cél segédeszközének minősítjük.

*

Mielőtt értekezésemet lezárom, elismerő köszönettel adózom azoknak a fiatal chemikusoknak, kik munkálataimban segítettek, névleg: KOTRBA GÉZA tanársegédemnek, továbbá GLÖTZER JÓZSEF, SZÁRAZ ISTVÁN, GEHRING KÁLMÁN és GARAI JENŐ okl. vegyészmérnöknek.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 február 14.-én tartott üléséből.)

A LINEÁRIS INTEGRODIFFERENTIÁL-EGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.

(Második közlemény.)

SCHLESINGER LAJOS I. tagtól.

IV. Tartományok compositiója. A compositio formális tulajdonságai.

15. A 9. pont alatt megmutattuk, hogy az n^2 elemű matrixok compositio's képletéből, ha abban az $n \rightarrow \infty$ -nek megfelelő határátmenetet megcsináljuk, a

$$c(i, k) + y(i, k) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, k) d\lambda \quad (1)$$

képlet származik, melynek elméletünkben való jelentőségét a megelőző fejezetben több ízben láthattuk. Egyelőre maradjon eldöntetlen, vajjon az (1)-ben szereplő $c(i, k)$, $y(i, k)$ tartományok a z változótól függenek-e vagy nem; de tegyük föl, hogy e tartományok

$$\text{Det } c(i, k), \quad \text{Det } y(i, k) \quad (2)$$

FREDHOLM-féle determinánsai nullától különbözők.

Ekkor az (1) alatti tartományról azt mondjuk, hogy a $c(i, k)$ és $y(i, k)$ -ből *van componálva*; persze fontos a *componensek sorrendje*, melyet úgy jelölünk, hogy azt mondjuk: a $c(i, k)$ *balfelé* componálva $y(i, k)$ -val (vagy $y(i, k)$ *jobbfele* componálva $c(i, k)$ -val) adja az (1) alatti tartományt. Már több ízben alkalmaztuk a tételt, hogy a componált tartomány FREDHOLM-deter-

minánssa a componensek determinánsainak szorzata. A compositio jelölésére a $\{\cdot\cdot\cdot\}$ *symbolumot* vezetjük be, úgy hogy

$$\{c(i, k)\} \cdot \{y(i, k)\} = \{c(i, k) + y(i, k) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, k) d\lambda\}.$$

E symbolumra ugyanazok a szabályok érvényesek, mint a matrixok compositiójára.¹

A 13. pont (III) és (IV) egyenletei definiálják egy $a(i, k)$ tartomány invers tartományát: $a(i, k)$ -t. E tartomány, mint a compositio tárgya,

$$\{a(i, k)\} = \{a(i, k)\}^{-1}$$

módon jelöltessék. E most bevezetett művelet-kalkulusban a nulla, symbolikusan $\{0\}$, az *egység* szerepét játssza, a meny-nyiben

$$\{a(i, k)\} \{a(i, k)\} = \{0\}, \quad \{a(i, k)\} \{a(i, k)\} = \{0\}.$$

Ha

$$\{y(i, k)\} = \{c(i, k)\} \{y(i, k)\},$$

akkor

$$\{\gamma(i, k)\} = \{y(i, k)\}^{-1} \cdot \{c(i, k)\}^{-1}$$

megfelel a

$$\{y(i, k)\} \{\gamma(i, k)\} = \{\gamma(i, k)\} \{y(i, k)\} = \{0\}$$

egyenleteknek, vagyis

$$\{\gamma(i, k)\} = \{y(i, k)\}^{-1}.$$

16. Ha $y(z | i, k)$ a (Ib) tartományegyenletnek egy megoldási tartománya, akkor ez, miközben z egy zárt úton halad végig, balfelől componáltatik az állandók egy tartományával: $c(i, k)$ -val, vagyis átmegy a

$$\{c(i, k)\} \{y(z | i, k)\}$$

¹ Lásd például KOWALEWSKI idézett könyvét, pg. 500. Figyelembe veendő a különbség a FREDHOLM-féle függvényoperatórió és a fenti compositio közt. Az előbbi az n változó lineáris transformatiójának transcendens megfelelője; a mi compositiónknál az egyedül lényeges pont az *associativ* törvény érvényessége.

tartományba. (Lásd a 14. pontot.) Legyen

$$\{\eta(z|i, k)\} = \{a(i, k)\} \{y(z|i, k)\} \quad (3)$$

egy másik megoldási tartomány; akkor $a(i, k)$ is az állandók oly tartománya, melynek FREDHOLM-féle determinánsa nem nulla. A (3)-ból következik, hogy

$$\{y(z|i, k)\} = \{a(i, k)\}^{-1} \{\eta(z|i, k)\}, \quad (4)$$

s így az állandók tartománya, melylyel $\eta(z|i, k)$ balfelől componáltatik, miközben z ugyanazon zárt úton fut végig, a következő:

$$\{a(i, k)\}^{-1} \{c(i, k)\} \{a(i, k)\}. \quad (5)$$

Az (5) alatt $c(i, k)$ -ra alkalmazott műveletet nevezzük « $a(i, k)$ -val való transzformáció»-nak. Fontos kérdések vonatkoznak a transzformáció által egymásból kikerülő («hasonló») tartományok invariánsaira; e kérdések szoros összefüggésben vannak az önértékek (Eigenwerte) kérdésével, melyet itt nem tárgyalunk, de a melyre rátérünk az V. fejezet 22. pontjában. Itt csupán az integrálegyenletek e

$$\phi(i) = \varphi(i) + z \int_0^1 \eta(i, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda \quad (6)$$

alakjára vonatkozólag teszünk egy megjegyzést. Az «önértékek theoriá»-jában tudvalevőleg az integrálegyenlet e (6) alatti alakban lép föl. Ha

$$z \cdot \eta(i, k) = y(z|i, k), \quad (7)$$

akkor

$$\frac{dy(z|i, k)}{dz} = \eta(i, k).$$

Ha már most $a(z|i, k)$ -val jelöljük ama (B) jelű tartományegyenlet együtthatótartományát, mely egyenletnek a (7) jelű tartomány eleget tesz, akkor (8) szerint

$$\eta(i, k) = a(z|i, k) + z \int_0^1 \eta(i, \lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda,$$

vagyis $-z \cdot a(z|i, k)$ a $z \cdot \eta(i, k)$ -hoz tartozó megoldó mag, vagy

a mi jelölésünkben a $z \cdot \eta(i, \lambda)$ tartomány inverse. A 8. pont (F) alatti tétele ez esetben a következő egyenletet adja:

$$\frac{d \log \text{Det} \cdot z \eta(i, k)}{dz} = \int_0^1 a(z | \lambda, \lambda) d\lambda,$$

a mi az integrálegyenletek elméletének egy ismert képletével azonos.¹

17. A következő megfontolásoknál az együtthatótartománynak egy rationalitási- vagy pontosabban: *monodromiatartományát* kell alapul venni; legyen ennek jele (R) . Ez az (R) lehet például egy oly tartomány, melyben egy racionális függvény holomorph, vagy lehet egy izolált singuláris helynek, például polusnak oly környezete, melyben az együtthatótartomány egyértékű.² Vágjuk fel ezt az (R) tartományt a q_1, q_2, \dots vonalak mentén úgy, hogy a felvágott (\bar{R}) tartomány egyszerűen összefüggő legyen.

Legyenek $c, (i, k), c_2(i, k), \dots$ azok a konstans-tartományok, melyekkel az $y(z | i, k)$ integráltartomány balfelől componálódik, ha z a q_i keresztmetszések egyikét pozitív irányban átlépi. Ezek bázisát képezik az állandótartományok egy megszámlálható csoportjának, melyek az összes, egymásra nem redukálható zárt utaknak felelnek meg; e csoport az integráltartománynak (R) -hez tartozó *monodromia-csoportja*.

Az $y(z | i, k)$ függvénytartomány FREDHOLM-féle determinánsa ne legyen nulla; akkor e függvénytartományról azt mondjuk, hogy $y(z | i, k)$ -val (R) -re vonatkozólag *cogrediens*, ha $y(z | i, k)$ az (R) bármely pontjának környezetében egyértékű és a q_1, q_2, \dots keresztmetszések bármelyikének átlépésekor $c_1(i, k), c_2(i, k), \dots$ konstanstartományok közül ugyanavval kombinálódik, mint $y(z | i, k)$.

¹ Lásd KOWALEWSKI, 484 o.-on a $\lambda^p \frac{d^p D_M}{d\lambda^p}$ képletet $p=1$ esetre.

² Rationalis függvényen, ha nincs külön megállapodás, két oly polynomnak hányadosát értjük, melyeknek együtthatói folytonos konstans-tartományok.

A

$$\{f(z|i, k)\} = \{\eta(z|i, k)\}^{-1} \{y(z|i, k)\} \quad (9)$$

$$\{g(z|i, k)\} = \{y(z|i, k)\}^{-1} \{\eta(z|i, k)\} \quad (10)$$

tartományok akkor, mint a symbolummal való számolás útján rögtön látható,¹ a keresztmetszések átlépésénél egyáltalán nem változnak, tehát *egyértékűek* a föl nem vágott (R) tartományban.

Az $\eta(z|i, k)$ cogrediens tartományról azt mondjuk, hogy (R -re vonatkozólag) ugyanabba az osztályba tartozik, mint $y(z|i, k)$, ha $\eta(z|i, k)$ -nak R -ben ugyanazok a singularitásai vannak, mint $y(z|i, k)$ -nak. Ez esetben $\{\eta(z|i, k)\}^{-1}$ -nek csak ott lesznek $\{\eta(z|i, k)\}$ -, illetve $\{y(z|i, k)\}$ -étől különböző singularitásai R -en belül, hol a $\text{Det } \eta(z|i, k)$ FREDHOLM-féle determináns nullává lesz. Világos, hogy ily helyen $\{\eta(z|i, k)\}^{-1}$ -nek polusa lesz. Ilyen esetben tehát a (9) által R -ben megadott tartomány nemcsak egyértelmű, hanem minden helyen, mely $y(z|i, k)$ -nak nem singularis helye, úgy viselkedik, mint racionális függvény.

A (9) alatti egyenletből közvetlenül folyik a következő előállítás:

$$\{y(z|i, k)\} = \{\eta(z|i, k)\} \{f(z|i, k)\}; \quad (11)$$

és épp így következik (10)-ből:

$$\{\eta(z|i, k)\} = \{y(z|i, k)\} \{g(z|i, k)\}. \quad (12)$$

Ha viszont (12)-ben $g(z|i, k)$ helyébe bármely R -en belül egyértékű függvénytartományt teszünk (melynek FREDHOLM-féle determinánsa nem identikusan nulla), akkor az e formula által adott $\eta(z|i, k)$ tartomány $y(z|i, k)$ -val bizonyára cogrediens. Ha $g(z|i, k)$ -nak (R)-ben nincs más singularitása, mint $y(z|i, k)$ -nak, akkor $\eta(z|i, k)$ bizonyára *egy* osztályba tartoznak.

18. Képezzük már most a következő tartományt:

$$\alpha(z|i, k) = \frac{d\eta(z|i, k)}{dz} + \int_0^1 \xi(z|i, \lambda) \cdot \frac{d\eta(z|\lambda, k)}{dz} d\lambda,^2 \quad (13)$$

¹ Symbolikus számítás nélkül az egyértékűség kissé nehezkesebben igazolható.

² Lásd a 13. pont (15) alatti egyenletét.

hol

$$\{\bar{\varepsilon}(z|i, k)\} = \{\eta(z|i, k)\}^{-1}, \quad (14)$$

vagyis azt az együttthatótartományt, mely megfelel $\eta(z|i, k)$ következő tartományegyenletének:

$$\frac{d\eta(z|i, k)}{dz} = (z|i, k) + \int_0^1 \eta(z|i, \lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda. \quad (13)$$

Első feladatunk az lesz, hogy $a(z|i, k)$ -nak (R) -en belül való analitikai jellegét megvizsgáljuk és az $a(z|i, k)$ tartományt explicite előállítsuk az

$$a(z|i, k), \quad g(z|i, k)$$

tartományoknak és ezek deriváltjainak segítségével, és pedig:

1. ha $\eta(z|i, k)$ és $y(z|i, k)$ cogrediensek,
2. ha ezek ugyanabba az osztályba tartoznak.

Hogy mindenekelőtt az *analitikai jellegét* megállapítsuk, vizsgáljuk z egy oly körülfutását, melynek az a következménye, hogy $y(z|i, k)$ és $\eta(z|i, k)$ balfelől $(c(z|i, k)$ -val componálódnak; megmutatjuk, hogy eközben $a(z|i, k)$ egyáltalán nem változik.

Azt, a mi egy függvénytartományból lesz, ha z az említett körülfutást végzi, úgy jelöljük, hogy a függvényjel fölé vízszintes vonalat teszünk. Akkor a

$$\bar{\eta}(z|i, k) = c(i, k) + \eta(z|i, k) + \int_0^1 c(i, \lambda) \eta(z|\lambda, k) d\lambda \quad (15)$$

egyenletet z szerint differentiálván, kapjuk, hogy:

$$\bar{\eta}'(z|i, k) = \eta'(z|i, k) + \int_0^1 c(i, \lambda) \eta'(z|\lambda, k) d\lambda. \quad (16)$$

Másrészt a (14) egyenlet szerint:

$$\begin{aligned} \{\bar{\varepsilon}(z|i, k)\} &= \{\bar{\eta}(z|i, k)\}^{-1} = \{c(i, k)\} \{\eta(z|i, k)\}^{-1} = \\ &= \{\eta(z|i, k)\}^{-1} \{c(i, k)\}^{-1} = \{\bar{\varepsilon}(z|i, k)\} \{c(i, k)\}^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ha tehát képezzük $\bar{a}(z|i, k)$ -t a (13) egyenlet szerint és

abba a (15), (16), (17) által adott kifejezéseket bevezetjük, akkor kellő reductio után kiadódik, hogy

$$\bar{a}(z|i, k) = a(z|i, k),$$

vagyis $a(z|i, k)$ az (R) -en belül *egyértelmű*.

Ha $y(z|i, k)$ és $y(z|i, k)$ ugyanahhoz az osztályhoz tartoznak, akkor $a(z|i, k)$ a (13) egyenlet szerint (R) minden pontjában, mely $y(z|i, k)$ -nak nem singuláris helye, ugyancsak *racionális függvény módjára viselkedik*.

19. Ezeket az eredményeket verifikálva látjuk az által, hogy most $a(z|i, k)$ részére *explicit formulákat* állítunk elő.

A (12) egyenletből z szerint való differenciálásból következik, hogy:

$$\begin{aligned} y'(z|i, k) = y'(z|i, k) + g'(z|i, k) + \int_0^1 y'(z|i, \lambda) g(z|\lambda, k) d\lambda + \\ + \int_0^1 y(z|i, \lambda) g'(z|\lambda, k) d\lambda. \end{aligned} \quad (18)$$

Továbbá a $\{\hat{\xi}(z|i, k)\} = \{y(z|i, k)\}^{-1}$ matrixot illetőleg a compositiószabály szerint áll, hogy

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(z|i, k) = \gamma(z|i, k) + \hat{\xi}(z|i, k) + \\ + \int_0^1 \gamma(z|i, \lambda) \hat{\xi}(z|\lambda, k) d\lambda, \end{aligned} \quad (19)$$

hol

$$\{\gamma(z|i, k)\} = \{g(z|i, k)\}^{-1}. \quad (20)$$

Ha a (18) és (19) alatti kifejezéseket a (13) alatti formulába belehelyettesítjük, kellő reductio után látjuk, hogy:

$$\begin{aligned} a(z|i, k) = a(z|i, k) + \int_0^1 a(z|i, \lambda) g(z|\lambda, k) d\lambda + \\ + \int_0^1 \gamma(z|i, \lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda + \int_0^1 \int_0^1 \gamma(z|i, \lambda) a(z|\lambda, \nu) g(z|\nu, k) d\lambda d\nu + \\ + \frac{dg(z|i, k)}{dz} + \int_0^1 \gamma(z|i, \lambda) \frac{dg(z|\lambda, k)}{dz} d\lambda. \end{aligned} \quad (21)$$

Ez az egyenlet, mely a lineáris differenciálegyenletek elmé-

letének analog föladata részére általam fölállított egyenletnek¹ pontosan megfelel, kriteriumot ad — mint amaz — arra nézve, hogy (\mathfrak{B}) és (B) ugyanahhoz az osztályhoz tartoznak, illetve cogrediensek-e. A (21) egyenlet ugyanis a (12) alatti egyenletben jobbfelől componált $y(z|i, k)$ tartományra vonatkozó integro-differentiálegyenlet és annak föltétele, hogy (\mathfrak{B}) és (B) cogrediensek, illetve ugyanabba az osztályba tartozók legyenek, teljesítve van, ha a szóbanforgó egyenletnek van oly megoldása, mely vagy (R) -ben egyértelmű és a singularitások kivételével racionális függvény jellegével bír, illetőleg ha (21) egy megoldása (R) -ben csak egyszerűen egyértékű. Ez egyenlet további folyományaival e helyt nem foglalkozunk, csak azt jegyezzük meg, hogy ez a (21) jelű egyenlet a tartományegyenletek egy új és magasabb typusát képviseli, melyben az integráljel alatt az ismeretlen függvénytartománynak nemcsak deriváltja, hanem inverse is föllép.

V. A megoldási tartomány vizsgálata egy singuláris hely környezetében.

20. Legyen a monodromiának (R) tartománya egy kétszeresen összefüggő, gyűrűalakú síkrész, melyet, hogy elkerüljük a felesleges általánosítást, a singuláris $z=p$ pont környezeteképp veszünk föl, melyben az együtthatótartomány egyértelmű és a melyből a $z=p$ pont egy trema, vagyis kis, zárt vonal által el van távolítva. Legyen q egy oly keresztmetszet, mely az (R) darabot egy egyszerűen összefüggő (\bar{R}) darabra változtatja és az $y(z|i, k)$ integráltartomány menjen át q -nak positiv irányban való átlépésénél az

$$\{\bar{y}(z|i, k)\} = \{c(i, k)\} \{y(z|i, k)\} \quad (1)$$

tartományba. A lineáris differentiálegyenlet-rendszerekhez való analogia² inspirálja a föltevést, hogy lehetséges egy e monodromia-tartományt, illetőleg $y(z|i, k)$ -val ugyanabba az osz-

¹ Lásd Vorlesungen, (Leipzig, 1908), pg. 105. 221.

² Lásd az idézett munka 6. és 8. «Vorlesung»-jában.

tályba tartozó $\eta(z|i, k)$ függvénytartományt képezni, mely egy

$$\frac{d\eta(z|i, k)}{dz} = \frac{a(i, k)}{z-p} + \int_0^1 \eta(z|i, \lambda) \frac{a(\lambda, k)}{z-p} d\lambda \quad (\mathfrak{B}_p)$$

alakú tartományegyenletnek felel meg, vagyis oly egyenletnek, melynek együttthatótartománya

$$a(z|i, k) = \frac{a(i, k)}{z-p}, \quad (2)$$

hol $a(i, k)$ a konstansok egy tartománya. A (\mathfrak{B}_p) jelű tartományegyenlet ugyanis analogonja az úgynevezett CAUCHY-féle differenciál-rendszernek:

$$\frac{d(\eta_{ik} + \delta_{ik})}{dz} = \frac{a_{ik}}{z-p} + \sum_{\nu=1}^n \eta_{i\nu} \frac{a_{\nu k}}{z-p}, \quad (3)$$

melyet az egyszerűbb

$$\frac{d\xi_k}{dz} = \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu \frac{a_{\nu k}}{z-p} \quad (4)$$

alakban is írhatunk, hol tehát

$$\xi_{ik} = \eta_{ik} + \delta_{ik} \quad (5)$$

a (4)-nek egy integrálmatrixa. Rövidség kedvéért a (\mathfrak{B}_p) egyenletet is CAUCHY-féle tartományegyenletnek nevezzük.

21. Egyelőre csak egy ilyen CAUCHY-féle tartományegyenlet megoldásával foglalkozunk és elsöben is emlékeztetünk VOLTERRA ama vizsgálataira, melyek a *konstans* együttthatójú tartományegyenlet megoldására vonatkoznak.¹ A CAUCHY-féle egyenlet ugyanis a

$$\log(z-p) = t \quad (6)$$

helyettesítés által a következőbe megy át:

$$\frac{d\eta(z|i, k)}{dt} = a(i, k) + \int_0^1 \eta(z|i, \lambda) a(\lambda, k) d\lambda. \quad (C)$$

¹ Leçons sur les fonctions de lignes, Collection Borel, pg. 198, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 15 marzo, 1914, pg. 394.

A III. fejezet eredményei értelmében ez egyenlet megoldása egy transcendens egész függvénytartomány lesz. Ha ez egyenlet megoldását

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v(i, k) t^v \quad (7)$$

alakban írjuk, akkor a III. fejezet (3') formulája szerint

$$c_1(i, k) = a(i, k), \quad c_2(i, k) = \frac{1}{2} \int_0^1 a(i, \lambda) a(\lambda, k) d\lambda, \\ c_3(i, k) = \frac{1}{3 \cdot 2} \int_0^1 c_2(i, \lambda) a(\lambda, k) d\lambda \dots$$

Bevezetjük a következő szokásos¹ jelöléseket:

$$\int_0^1 a(i, \lambda) a(\lambda, k) d\lambda = a^{(2)}(i, k), \\ \int_0^1 a^{(2)}(i, \lambda) a(\lambda, k) d\lambda = a^{(3)}(i, k), \\ \dots$$

Ekkor a konstans együtthatótartományokkal bíró tartományegyenletnek azt a megoldását, mely $t=0$ -ban eltűnik, a mindenütt convergens

$$W(t | a(i, k)) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v a^{(v)}(i, k)}{v!} \quad (8)$$

hatványsor adja. Ez a függvénytartomány a VOLTERRA-féle transcendens. Elméletünkben ugyanoly fontos szerepet játszik, mint az $(e^t - 1)$ függvény a közönséges analysisben.

A mint VOLTERRA kimutatta,² a (8) jelű függvénytartományra nézve érvényes a következő *integrál-aditio-tétel*:

$$W(z+u | a(i, k)) = W(z | a(i, k)) + W(u | a(i, k)) + \\ + \int_0^1 W(z | a(i, \lambda)) W(u | a(\lambda, k)) d\lambda. \quad (9)$$

¹ E függvények az úgynevezett iterált magvak. Lásd például KOWALEWSKI idézett könyvét, pg. 514.

² Lásd Fonctions de lignes, pg. 127, II. tétel.

A (6) és (9) jelű egyenletek szerint tehát a (\mathfrak{B}_p) jelű CAUCHY-féle tartományegyenletet kielégíti a következő függvény:

$$W(\log(z-p) | a(i, k)); \quad (10)$$

és általános megoldási tartománya a következő:

$$c(i, k) + W(\log(z-p) | a(i, k)) + \int_0^1 c(i, \lambda) W(\log(z-p) | a(\lambda, k)) d\lambda, \quad (11)$$

hol $c(i, k)$ az állandók egy «tetszésszerű» tartományát jelenti.

22. Haladjon át most már z a q keresztmetszeten, vagyis írjon le $z=p$ körül pozitív irányban zárt utat. Akkor $\log(z-p)$ átmegy $\log(z-p) + 2\pi\sqrt{-1}$ -be és (\mathfrak{B}_p) -nek (10) jelű megoldása a következőbe:

$$W(\log(z-p) + 2\pi\sqrt{-1} | a(i, k)). \quad (12)$$

E kifejezés azonban a (9) jelű additio-tétel értelmében nem más, mint

$$W(2\pi\sqrt{-1} | a(i, k)) + W(\log(z-p) | a(i, k)) + \int_0^1 W(2\pi\sqrt{-1} | a(i, \lambda)) W(\log(z-p) | a(\lambda, k)) dt, \quad (13)$$

bevezetett symbolumaink értelmében tehát

$$\{W(\log(z-p) + 2\pi\sqrt{-1} | a(i, k))\} = \{W(2\pi\sqrt{-1} | a(i, k))\} \cdot \{W(\log(z-p) | a(i, k))\}, \quad (14)$$

vagyis a CAUCHY-féle tartományegyenletnek (10) jelű megoldása a $z=p$ singuláris pont körülfutásánál úgy változik, hogy az állandók

$$W(2\pi\sqrt{-1} | a(i, k)) \quad (15)$$

tartományával bal felől componáltatik.

Ha $\eta(z | i, k)$ egy $\eta(z | i, k)$ -vel cogrediens oly függvény-tartományt jelent, mely ugyancsak eleget tesz egy CAUCHY-féle tartományegyenletnek, akkor (lásd (12))

$$\{\eta(z | i, k)\} = \{\eta(z | i, k)\} \cdot \{g(i, k)\}, \quad (16)$$

hol most $(g(i, k))$ az állandók egy tartományát jelenti.

A

$$\frac{d\eta(z|i, k)}{dz} = \frac{b(i, k)}{z-p} + \int_0^1 \eta(z|i, \lambda) \frac{b(\lambda, k)}{z-p} d\lambda \quad (17)$$

tartományegyenletnek (melynek $\eta(z|i, k)$ megfelel) együttható-tartományát a IV. fejezet (21) formulája adja:

$$\begin{aligned} \frac{b(i, k)}{z-p} = \frac{a(i, k)}{z-p} + \int_0^1 \frac{a(i, \lambda) g(\lambda, k) + \gamma(i, \lambda) a(\lambda, k)}{z-p} d\lambda + \\ + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\gamma(i, \lambda) a(\lambda, \nu) g(\nu, k)}{z-p} d\lambda d\nu, \end{aligned} \quad (18)$$

hol $\gamma(i, k)$ a $g(i, k)$ invers tartományát jelenti, vagyis

$$\{\gamma(i, k)\} = \{g(i, k)\}^{-1}.$$

Symbolumaink szerint tehát

$$\{b(i, k)\} = \{g(i, k)\}^{-1} \cdot \{a(i, k)\} \{g(i, k)\}, \quad (19)$$

vagyis oly CAUCHY-féle tartományegyenletekre nézve, melyek-nél az $a(i, k)$ és $b(i, k)$ residuumtartományok egymásból az állandók egy tartományával való transformatiojából keletkez-nek,¹ a megfelelő megoldási tartományok cogrediensek.

Ezek szerint az állandók ama tartománya, mely a $z = p$ pont körülfutásánál a (15) jel alatt mint komponens föllép, invariánsa annak az æquivalentiá-nak, mely fönnáll az állandók tartományai közt, ha azok a (19) alakú egyenlet szerint függnek össze. Látható tehát, hogy a matrixok elemi osztóinak elmélete az itt követelt irányban átvihető az integrálproblémára, míg ilyen átvitel közvetlenül nem végezhető, ha a charakteristikus egyenlet gyökeinek, vagyis az úgynevezett önértékeknek formális analógiáit keressük.

23. Legyen

$$W(2\pi\sqrt{-1}|a(i, k)) = c(i, k). \quad (20)$$

Ha a (B) tartományegyenletnek megoldási tartománya:

¹ Lásd a 16. §-t.

$y(z|i, k)$ a $z=p$ pont pozitív körülfutásánál $c(i, k)$ -val balfelől componáltatik, akkor $y(z|i, k)$ cogrediens

$$W(\log(z-p)|a(i, k))\text{-val,} \quad (21)$$

és a IV. fejezet (11) egyenlete szerint

$$\{y(z|i, k)\} = \{W(\log(k-p)|a(i, k))\} \{f(z|i, k)\}, \quad (22)$$

hol $f(z|i, k)$ most egy (R) -ben egyértékű függvény, mely $z=p$ kivételével minden pont környezetében holomorph. Ekkor a (22) jelű egyenlet az $y(z|i, k)$ -nak *analytikai előállítását adja a $z=p$ pont környezetében*, a mennyiben tudniillik $f(z|i, k)$ a LAURENT-tétel értelmében $(z-p)$ hatványai szerint sorba fejthető.

Hogy tehát az e fejezet élére állított kérdést megoldjuk, csak azt kell megmutatnunk, hogy $a(i, k)$ alkalmas választása által az állandók *bármely* $c(i, k)$ tartománya, melynek FREDHOLM-féle determinánsa nem nulla, a (20) alatti formulával előállítható.

E tény kétféle módon mutatható meg. Vagy úgy, hogy a matrixok elméletének analog tételéből indulunk ki és aztán szigorúan megcsináljuk a határátmenetet. A bizonyítás e módja semmiféle nehézségbe sem ütközik. Vagy pedig *adott* $c(i, k)$ -nál egyenesen a következő sorból indulunk ki:

$$c(i, k) = \frac{c^{(2)}(i, k)}{2} + \frac{c^{(3)}(i, k)}{3} - \dots, \quad (23)$$

mely convergens, ha $|c(i, k)| < 1$.¹ E sor $2\pi\sqrt{-1}$ -vel osztva, közvetlenül adja *egyikét* azoknak $a(i, k)$ -tartományoknak, melyek megfelelnek a (20) jelű egyenletnek. Ha a (23) jelű sor használhatatlan, mert $|c(i, k)| \geq 1$, akkor úgy segíthetünk magunkon, mint a logaritmusnál, ugyanis az additio-tételt fölhasználó analitikai folytatással.

Ezzel a föntjelzett föladatot megoldottnak tekinthetjük. Közel-fekvő volna azokat a kérdéseket fölvetni, melyek a lényegtelen singuláris helyeknek, a FUCHS-típusu helyeknek analogonjaira vo-

¹ Ha $e^{2\pi ia} - 1 = c$, akkor $2\pi\sqrt{-1} \cdot a = \log(1+c) = c - \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} - \dots$; a (23) jelű sor tehát a *logarithmus* analogonja.

natkoznak; e kérdések tárgyalását későbbre halasztván, most még néhány formális elméletet és az elméletnek egy VOLTERRA által is tárgyalt, az öröklődő rugalmasságot illető problémára való alkalmazását akarjuk tárgyalni.

VI. Az adjungált egyenletek elmélete.

24. Elsőben is fölvetjük a kérdést az (A) egyenlet egy szorzójára vagy integráló faktorára nézve; ez olyan $M(z|k)$ függvénytávolság, melyre nézve

$$\int_0^1 M(z|k) [dX(z|k) - dz \int_0^1 X(z|\lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda] dk = dZ, \quad (1)$$

hol Z a z függvénye.

Ha a baloldalt álló kifejezést integráljuk és az integráció sorrendjének fölcserélése után az első tagban partiálisan integrálunk, kiadódik, hogy

$$\begin{aligned} & \int_0^1 M(z|k) [dX(z|k) - dz \int_0^1 X(z|\lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda] dk = \\ &= \int_0^1 M(z|k) X(z|k) dk - \int_0^1 \int_0^1 X(z|k) dM(z|k) dk + \\ &+ \int_0^1 dz \int_0^1 \int_0^1 M(z|k) X(z|\lambda) a(z|\lambda, k) dk d\lambda = \\ &= \int_0^1 M(z|k) X(z|k) dk - \int_0^1 X(z|k) [dM(z|k) + dz \int_0^1 a(z|k, \lambda) M(z|\lambda) d\lambda] \end{aligned}$$

és ebből differentiálás után identikusan következik, hogy

$$\begin{aligned} & \int_0^1 M(z|k) [dX(z|k) - dz \int_0^1 X(z|\lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda] dk + \\ &+ \int_0^1 X(z|k) [dM(z|k) + dz \int_0^1 a(z|k, \lambda) M(z|\lambda) d\lambda] dk = \\ &= d \int_0^1 M(z|k) X(z|k) dk, \end{aligned}$$

mely az úgynevezett LAGRANGE-féle identitás analogonja.¹

¹ V. ö. pl. szerző művét: Vorlesungen ü. linear. Differentialglechn. Leipzig, 1908, pg. 33.

Válasszuk most $M(z|k)$ -t úgy, hogy az

$$\frac{dM(z|k)}{dz} = - \int_0^1 a(z|k, \lambda) M(z|\lambda) d\lambda \quad (A^*)$$

egyenlet ki legyen elégítve; akkor

$$\begin{aligned} \int_0^1 M(z|k) [dX(z|k) - dz \int_0^1 X(z|\lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda] dk = \\ = d \int_0^1 M(z|k) X(z|k) dk, \end{aligned}$$

vagyis $M(z|k)$ itt multiplikator; és az (1) egyenletben szereplő Z értéke a következő:

$$Z = \int_0^1 M(z|k) X(z|k) dk.$$

Legyen

$$a(z|k, \lambda) = -b(z|\lambda, k), \quad (2)$$

akkor (A^*) így alakul:

$$\frac{dM(z|k)}{dz} = \int_0^1 M(z|\lambda) b(z|\lambda, k) d\lambda, \quad (A')$$

melyet az (A) adjungált egyenletének nevezünk.

Világos, hogy az (A) és (A') integrodifferentiálegyenletek viszonya kölcsönös.

(A') -hoz tartozik a következő asszociált tartományegyenlet:

$$\frac{dH(z|i, k)}{dz} = b(z|i, k) + \int_0^1 H(z|i, \lambda) b(z|\lambda, k) d\lambda. \quad (B')$$

Ezt az egyenletet a (B) tartományegyenlet adjungált egyenletének nevezzük; részére a következő módon lehet megoldási tartományt előállítani.

25, Ha $y(z|i, k)$ a (A) -nak egy integrálttartománya, akkor a

$$\phi(i) = \varphi(i) + \int_0^1 y(z|i, k) \varphi(\lambda) d\lambda$$

FREDHOLM-féle integrálegyenlet megoldható. Legyen

$$\varphi(i) = \phi(i) + \int_0^1 \eta(z|i, \lambda) (\lambda) d\lambda$$

a megoldás, úgy hogy tehát $\eta(z|i, k)$ az $y(z|i, k)$ -nak *invers* tartománya, vagyis

$$\begin{aligned} y(z|i, k) + \eta(z|i, k) + \int_0^1 y(z|i, \lambda) \eta(z|\lambda, k) d\lambda &= 0. \\ \eta(z|i, k) + y(z|i, k) + \int_0^1 \eta(z|i, \lambda) y(z|\lambda, k) d\lambda &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Differentiáljuk ez egyenletek közül a másodikat z szerint és vegyük tekintetbe, hogy $y(z|i, k)$ kielégíti a (B) tartományegyenletet. Ekkor a (3)-nak megfelelő redukálás után

$$a(z|i, k) + \frac{d\eta(z|i, k)}{dz} + \int_0^1 \frac{d\eta(z|i, \lambda)}{dz} y(z|\lambda, k) d\lambda = 0. \quad (4)$$

Legyen

$$\begin{aligned} y(z|i, k) &= \eta(z|k, i); \\ \eta(z|i, k) &= j(z|k, i), \end{aligned} \quad (5)$$

akkor természetesen $\eta(z|i, k)$ és $j(z|i, k)$ is *inversek*.

Írjuk (4)-et a következő alakban:

$$-b(z|k, i) + \frac{dj(z|k, i)}{dz} + \int_0^1 \eta(z|k, \lambda) \frac{dj(z|\lambda, i)}{dz} d\lambda = 0, \quad (4a)$$

melyet így is írhatunk:

$$\frac{dj(z|k, i)}{dz} = b(z|k, i) + \int_0^1 j(z|k, \lambda) b(z|\lambda, i) d\lambda,$$

úgy, hogy $j(z|i, k)$ -ban a (B') egyenlet megoldási tartományára ismerünk. Nevezzük *transpositionnak* egy függvénytartomány i és k indexeinek fölcserélését. Így a következő tételhez jutottunk: *Az adjungált tartományegyenletnek megoldási tartományához jutunk, ha az eredeti egyenlet megoldási tartományának inverset transponáljuk.*

26. Az adjungált egyenletek elméletének fontos alkalmazása a nemhomogén (teljes) integrodifferenciálegyenlet meg-

oldása, pontosabban: a feladat redukálása a megfelelő homogén tartományegyenlet megoldására és quadraturákra.

A teljes távolságegyenletnek, melynek alakja

$$\frac{dU(z|k)}{dz} = \int_0^1 U(z|\lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda + f(z|k), \quad (6)$$

hol $f(z|k)$ egy függvénytávolságot jelent, a megoldására oly módszert alkalmazunk, mely a «constansok variálásának módszer»-ét utánozza. E szerint a (6) általános megoldását a következő alakban írjuk:

$$u(z|k) = C(z|k) + \int_0^1 C(z|\lambda) y(z|\lambda, k) d\lambda, \quad (7a)$$

hol $y(z|\lambda, k)$ a (2) egyenlet egy megoldási tartományát jelenti. Differenciálás és (6)-ba való helyettesítés által kapjuk a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [C(z|\lambda) + \int_0^1 C(z|\nu) y(z|\nu, \lambda) d\nu] a(z|\lambda, k) d\lambda + f(z|k) = \\ = \frac{dC(z|k)}{dz} + \int_0^1 \frac{dC(z|\lambda)}{dz} y(z|\lambda, k) d\lambda + \\ + \int_0^1 C(z|\lambda) [a(z|\lambda, k) + \int_0^1 y(z|\lambda, \nu) a(z|\nu, k) d\nu] d\lambda, \end{aligned}$$

mely egyszerű módon redukálható ilykép:

$$f(z|k) = C'(z|k) + \int_0^1 C'(z|\lambda) y(z|\lambda, k) d\lambda, \quad (8)$$

a mi azonban FREDHOLM-féle integrálegyenlet a

$$C'(z|k) = \frac{dC(z|k)}{dz}$$

részére. Ha az (5) egyenlet által definiált függvénytartományokat igénybe vesszük, akkor a (8) egyenlet, vagyis

$$f(z|k) = C'(z|k) + \int_0^1 \eta(z|k, \lambda) C'(z|\lambda) d\lambda$$

megoldatik

$$C'(z|k) = f(z|k) + \int_0^1 j(z|k, \lambda) f(z|\lambda) d\lambda$$

által, mert $y(z|i, k)$ és $j(z|i, k)$ invers tartományok.

Ha tehát

$$C(z|k) = \int_{z_0}^z [f(\xi|k) + \int_0^1 j(\xi|k, \lambda) f(\xi|\lambda) d\lambda] d\xi, \quad (9)$$

akkor a (7) alatti kifejezés, vagyis

$$U(z|k) = \int_{z_0}^z d\xi \left\{ f(\xi|k) + \int_0^1 d\lambda f(\xi|\lambda) [j(\xi|k, \lambda) + y(z|\lambda, k) + \right. \\ \left. + \int_0^1 j(\xi|\nu, \lambda) y(z|\nu, k) d\nu] \right\}$$

a (6) alatti teljes egyenlet ama megoldását adja, mely $z=z_0$ -ban nulla. E megoldást nevezzük a (6) *főmegoldásának*; ha ehhez hozzáadjuk a (B) tartományegyenlet *általános* megoldását, a (6) egyenlet *általános* megoldását nyerjük.

VII. Alkalmazás az öröklődően rugalmas, isotrop gömb integro-differentiál-egyenletére.

Vizsgáljuk elsőben is a következő alakú integro-differentiál-egyenletet:

$$\frac{dV(z|k)}{dz} = \gamma \cdot V(z|k) + \int_0^1 V(z|\lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda + g(z|k), \quad (10)$$

a mely tehát a teljes (6) jelű egyenlettől csak $\gamma V(z|k)$ tagban különbözik; jelentsen γ a k indextől független valamely számot, mely tehát vagy konstans, vagy csak z -nek függvénye; az utóbbi esetben feltesszük, hogy γ a z -nek monogén függvénye. A (10) jelű egyenletnek a (6) alatti alakra való visszavezetése a

$$V(z|k) = \varphi(z) \cdot U(z|k)$$

substitutio által történik. E helyettesítés által ugyanis nyerjük, hogy

$$\varphi(z) \frac{dU(z|k)}{dz} + \frac{d\varphi(z)}{dz} U(z|k) = r\varphi(z) \cdot U(z|k) + \\ + \varphi(z) \int_0^1 U(z|\lambda) a(z|\lambda, k) d\lambda + g(z|k).$$

Legyen tehát

$$f(z|k) = \frac{g(z|k)}{\varphi(z)};$$

és válasszuk az $U(z|k)$ függvényt úgy, hogy a (6) egyenletnek eleget tegyen; akkor meghatározására szolgál a

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = r\varphi(z)$$

egyenlet, úgy, hogy (10) általános megoldása a

$$V(z|k) = \text{konst} \cdot e^{\int r dz} \cdot U(z|k) \quad (11)$$

alakban jelenik meg, hol $U(z|k)$ a (9) egyenlet általános megoldását jelenti.

Hogy e jelölések összefüggjenek a VOLTERRA-félével, az isotrop rugalmas gömb integrodifferenciálegyenletében, melyet VOLTERRA¹ állított föl és oldott meg és a melynek alakja:

$$y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + cf(x, y) + \int_0^x S_0(\xi, x) f(\xi, y) d\xi = \varphi(x, y) \quad (D)$$

a következő helyettesítéseket kell végezni:

$$x = k, \quad y = z, \quad f(x, y) = V(z|k), \quad \frac{c}{y} = -r, \quad \xi = \lambda; \\ \frac{1}{y} S_0(\xi, x) = -a(z|\lambda, k), \quad \frac{\varphi(x, y)}{y} = g(z|k);$$

és fel kell tennünk, hogy az $a(z|i, k)$ függvénytartomány értéke nulla, ha $i > k$. Ekkor a (D) egyenlet formája a (10) alatti, tudniillik a következő:

$$\frac{dV(z|k)}{dz} = -\frac{c}{z} V(z|k) + \int_0^1 V(z|\lambda) \frac{a(\lambda, k)}{z} d\lambda + g(z|k), \quad (12)$$

hol c és $a(i, k)$ nem függnek z -től.

28. Feladatunk tehát abban áll, hogy a homogén (B) tartományegyenletet és annak adjungált egyenletét az együttthatók tartományának adott esetére megoldjuk. A (B) egyenlet alakja:

$$\frac{dY(z|i, k)}{dz} = \frac{a(i, k)}{z} + \int_0^1 Y(z|i, \lambda) \frac{a(\lambda, k)}{z} d\lambda, \quad (13)$$

az adjungált egyenleté pedig:

$$\frac{dH(b|i, k)}{dz} = \frac{b(i, k)}{z} + \int_0^1 H(z|i, \lambda) \frac{b(\lambda, k)}{z} d\lambda, \quad (14)$$

hol (2 szerint)

$$b(i, k) = -a(k, i). \quad (15)$$

Mindkét egyenlet CAUCHY-typusu.

A (13) és (14) egyenleteknek sorra megfelelnek az

$$y(z|i, k) = W(\log z | a(i, k)), \quad (16)$$

illetőleg a

$$g(z|i, k) = W(\log z | b(i, k)) \quad (17)$$

megoldási tartományok.

Mivel (15) szerint

$$a^{(v)}(i, k) = (-1)^v \cdot b^{(v)}(k, i) \quad (18)$$

és így

$$W(z | b(i, k)) = W(-z | a(i, k)), \quad (19)$$

ezért (17) a

$$j(z|i, k) = W\left(\log \frac{1}{z} | a(k, i)\right) \quad (17a)$$

alakban is írható. A (6) egyenlet a mi esetünkben ilyen:

$$\frac{dU(z|k)}{dz} = \int_0^1 U(z|\lambda) \frac{a(\lambda, k)}{z} d\lambda + f(z|k), \quad (20)$$

megoldása a (7a) formula szerint közvetlenül adódik:

$$U(z|k) = \int_{z_0}^z d\xi \{f(\xi|k) + \int_0^1 d\lambda f(\xi|\lambda) [W(\log \frac{1}{\xi} | a(\lambda, k)) + \\ + W(\log z | a(\lambda, k)) + \int_0^1 W(\log \frac{1}{\xi} | a(\lambda, \nu)) W(z | a(\nu, k)) d\nu].$$

De a VOLTERRA-féle függvénytartomány összeadási tétele szerint

$$\int_0^1 W\left(\log \frac{1}{\xi} \mid a(\lambda, \nu)\right) W\left(\log z \mid a(\nu, k)\right) d\nu = W\left(\log \frac{z}{\xi} \mid a(\lambda, k)\right) - \\ - W\left(\log \frac{1}{\xi} \mid a(\lambda, k)\right) - W\left(\log z \mid a(\lambda, k)\right),$$

úgy hogy végre

$$U(z \mid k) = \int_{z_0}^z d\xi \left[f(\xi \mid k) + \int_0^1 d\lambda f(\xi \mid \lambda) W\left(\log \frac{z}{\xi} \mid a(\lambda, k)\right) \right].$$

A fennforgó esetben $\varphi(z)$ -t a

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = -\frac{c}{z} \varphi(z)$$

egyenlet határozza meg, úgy hogy

$$\varphi(z) = z^{-c}, \quad f(z \mid k) = z^c g(z \mid k);$$

és a (12) egyenlet megoldása a következő alakú:

$$V(z \mid k) = \frac{1}{z^c} \cdot \int_{z_0}^z d\xi \xi^c \left[g(\xi \mid k) + \int_0^1 d\lambda g(\xi \mid \lambda) W \log\left(\frac{z}{\xi} \mid a(\lambda, k)\right) \right],$$

a mi megegyezik azzal az eredménnyel, melyet VOLTERRA directe a speciális eset czéljaira kiesztelt módszerrel ért el.¹

¹ Rendiconti Accad. dei Lincei, vol. 19, (1910. 1^o sem.) pag. 111.

A RECTIFIABILIS FELÜLETRŐL.

GEÖCZE ZOÁRD-tól.

Ismeretes, hogyha egy $\varphi(x)$ függvénynek mind a négy deriváltja határolt, akkor $\frac{d\varphi}{dx}$ általában ¹ létező s az $y = \varphi(x)$ görbe ívhosszát, mely ez esetben véges, egy LEBESGUE-féle integrál adja.

A görbe vonal varietás, ívhossza pedig a görbének, mint varietásnak, a mértéke ² lévén, analogia alapján várható, hogy a rectifiabilis varietásokat definiáló függvények általában elsőrendű partialis differentióhányadosokkal bírnak. Várható még az is, hogy a rectifiabilis varietások mértékét — e mérték mint tudjuk véges — egy LEBESGUE-féle integrál fogja adni.

Jelen értekezés célja ezeket az állításokat elsősorban a rectifiabilis $z=f(x, y)$ felületre, azután az általános rectifiabilis felületre kimutatni.

Legyenek x, y, z derékszögű pontcoordináták, a és b véges pozitív állandók. Az $M \equiv x, y, 0$ pont a $P(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z=0)$ négyszögben változván, legyen $f(M) = f(x, y)$ az M pontnak egyértékű, határolt, folytonos és még olyan függvénye, hogy van egy véges pozitív G állandó, úgy hogy, ha csak M és N a P két különböző pontja

$$|f(M) - f(N)| < G \cdot \overline{MN}.$$

¹ Azaz, amaz x értékek sokaságának, amelyekre $\frac{d\varphi}{dx}$ nem létező, a LEBESGUE-féle lineáris mértéke zérus.

² A varietás mértékének ama mennyiségét nevezhetjük, a melyet C_2 -vel jelöltem a C. R. 1913 nov. 17.-i füzetében megjelent «Sur la quadrature des varietés» című munkámban.

Az ez $x = x$, $y = y$, $z = f(x, y)$ pontok halmazából álló idom neve a rectifiabilis $z = f(x, y)$ felület. Ha $M \equiv x, y, 0$ a P pontja, az $x, y, f(x, y)$ pont jele M° legyen.

Mint ismeretes, felületünknek a LEBESGUE-féle definitio szerint vett területe véges, sőt a terület véges még a LEBESGUE-félénél szűkebb definitiók szerint is.¹ Legyen T a terület értéke.

Kimutatjuk a következő tételeket:

I. $\frac{\partial f}{\partial x}$ általában² létező és absolute véve G -nél nem nagyobb. Ugyanez áll $\frac{\partial f}{\partial y}$ -ra is.

II. T értéke a következő LEBESGUE-féle integrál:

$$\iint_P \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

III. Felületünk általában érintősíkkal bir, azaz ha $M \equiv \alpha, \beta, 0$ a P egy pontja akkor a

$$z - f(M) = (x - \alpha) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_M + (y - \beta) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_M$$

sík általában a következő sajátságú. Legyen N a P -nek egy az M -től különböző pontja. Bármilyen különbben az N , a felületnek az N, M pontokon átmenő és a z tengellyel parallel síkmetszete az M° pontban érintővel bir, mely a fenti síkba esik. Jelölje N' a fenti sík ama pontját, a melynek az xy síkra való merőleges vetülete N . Akármilyen positiv δ -hoz is van oly positiv (az M -től is függő) ε , úgy, hogy

¹ L. A területmérésről. Math. és Phys. Lapok. XX. k. 255—301, 1911.

² Azaz, a P ama helyeinek az összessége, a melyeken $\frac{\partial f}{\partial x}$ nem létező, egy oly sokaság, a melynek LEBESGUE-féle két dimenziós mértéke zérus.

³ Ha ψ egy a P -ben általában definiált függvény, akkor, ha Q ama zérus mértékű sokaság, a melyen ψ nincs definiálva, definitio szerint

$$\iint_P \psi dx dy = \iint_P \psi_1 dx dy = \iint_{P-Q} \psi dx dy,$$

itt ψ_1 egy oly függvény, a mely $P-Q$ pontjaira ψ -vel, Q pontjaira zérussal egyenlő.

$$\frac{\overline{N'N^o}}{\overline{MN}} < \delta,$$

hacsak $\overline{MN} < \varepsilon$.

A fenti sik definitio szerint a felület érintősíkja az M^o ponthoz.

Bebizonyítások. Az I — RIESZ F. úr szóbeli közlése szerint — ismeretes tétel, bebizonyításának rövid menete a következő lehet. A G -re vonatkozó állítás világos. Jelöljük a $z = f(x, y)$, $y = \text{const.}$ metszete négy (x szerint vett) deriváltjának bármelyikét $A_x(x, y)$ -nal.

Az y -t változtatva, a P -ben definiált négy függvényt nyerünk. Ezek mindegyike absolute véve G -nél nem nagyobb és mint ismeretes, mérhető.¹ Integráljaik tehát végesek. A felület bármely $y = \text{const.}$ metszetében — mivel a felület rectifiabilis — $A_x(x, y)$ általában létező és egy LEBEGUE-féle² tétel szerint ha

$$0 \leq x_1 < x_2 \leq a,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} A_x(x, y) dx = f(x_2, y) - f(x_1, y).$$

Ámde a FUBINI-féle tétel³ szerint, ha még $0 \leq y_1 < y_2 \leq b$, az $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$ egyenesek által határolt S négyszögre

$$\iint_S A_x(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} [f(x_2, y) - f(x_1, y)] dy.$$

Így tehát a négy $A_x(x, y)$ függvénynek a P bármely négyszögében (a melynek oldalai a P oldalaival paralelek) egyenlő integráljaik vannak. De így⁴ a négy $A_x(x, y)$ általában egyenlő — ez pedig az I. állítása.

¹ De la Vallée Poussain. Cours d'Analyse. 1914. T. II. p. 106.

² Cours T. I. p. 276.

³ Cours. T. II. p. 122.

⁴ Ha a P -ben definiált ψ és φ mérhető és határolt függvények integráljai a P minden négyszögében egyenlők, akkor ψ és φ általában egyenlők. Ugyanis, mint ismeretes, ama E sokaság, a melyen $\psi - \varphi > 0$, mérhető. E bezárható, mint ismeretes, megszámlálható vagy véges sokaságot képező

A II. bizonyítása. *Evégből szükségünk van a rectifiabilis $z=f(x, y)$ felület quadraturája menetének rövid leírására.*¹

Legyenek l és m véges positiv egész számok és

$$x_i, i=0, \dots, l, \\ y_j, j=0, \dots, m,$$

oly értékek, a melyekre

$$0=x_0 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_l = a, \\ 0=y_0 < y_1 < \dots < y_j < y_{j+1} < \dots < y_m = b$$

áll.

Jelentse $a_{i,j}$ az $x=x_i, x=x_{i+1}, y=y_j, y=y_{j+1}$ egyenesek által határolt négyszöget s e négyszög területét.

Legyenek

$$\beta_{i,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| dx, \quad r_{i,j} = \int_{y_j}^{y_{j+1}} |f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)| dy; \\ \tau_{i,j} = [a_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + r_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Állanak a következők:

a)

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} j \tau_{i,j},$$

$$(l=\infty, m=\infty, x_{i+1}-x_i=0, i=0, \dots, l-1, \\ y_{j+1}-y_j=0, j=0, \dots, m-1),$$

létező és független az x_i, y_j pontoktól. Legyen t ez érték jele.

b) T a t -nél nem kisebb.

oly négyszögekbe, a melyeknek, kettenként véve őket, közös belső pontjuk nincs. Ha e négyszögek idoma Q , akkor mint ismeretes

$$\left| \iint_Q (\psi - \varphi) dx dy - \iint_E (\psi - \varphi) dx dy \right|$$

tetszésszerint kicsiny lehet a Q kellő választásával. Ámde az első integrál a feltevés szerint zérus, így a második is zérus. Ámde ha egy nem negativ függvény integrálja zérus, akkor mint ismeretes (hacsak E nem zérus mértékű) a függvény általában zérus. $\psi - \varphi$ tehát általában nem positiv, éppen így általában nem negativ, azaz $\psi - \varphi$ általában zérus.

¹ L. A területmérésről. Math. és Phys. Lapok XX, 255—301 l., 1911

Legyenek A, B, C, D az $\alpha_{i,j}, x_i, y_j, x_i, y_{j+1}, x_{i+1}, y_{j+1}, x_{i+1}, y_j, x, y$ koordinátával bíró csúcsai. Legyen e_1 ama az $x=x_i$ síkba eső ellipszis, a melynek gyújtópontjai A°, B° s a melynek nagytengelye a $z=f(x, y)$ $x=x_i$ metszete A° és B° közé eső ívének a hossza.

Ez az ív az ellipszisen nincs kívül.

Legyen e_2 a B°, C° pontok segélyével hasonlóképp képezett az $y=y_{j+1}$ síkban fekvő ellipszis. Legyen e_3, e_4 a C°, D° , illetve D°, A° pontok segélyével így képezett (az $x=x_{i+1}$, illetve az $y=y_j$ síkban fekvő) ellipszis.

Jelölje e_1, \dots, e_4 , az $e_1 \dots e_4$ területét is.

Legyen $C^{[1]}$ az a pont, a mely az $A^\circ, B^\circ, D^\circ$ pontokkal oly parallelogrammát képez, a melynek $\overline{B^\circ D^\circ}$ az átlója. Nyilván $C^{[1]}$ -nak az xy síkra való merőleges vetülete a C pont.

c) Ha δ tetszősszerűen pozitív szám, az l, m, x_i, y_j választhatók úgy, hogy

$$x_{i+1}-x_i < \delta, \quad i=0, \dots, l-1, \quad y_{j+1}-y_j < \delta, \quad j=0, \dots, m-1, \\ \Sigma \Sigma (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) < \delta. \quad (1)$$

d) Az l, m, x_i, y_j még úgy is választhatók, hogy az (1) állván még:

$$\Sigma \Sigma (B^\circ C^{[1]} C^\circ + D^\circ C^{[1]} C^\circ) < \delta, \quad (2)$$

itt $B^\circ C^{[1]} C^\circ$ ama síkháromszög területe, a melynek csúcsai $B^\circ, C^{[1]}, C^\circ$.

Ezek alapján kimutatható, hogy $T=t$. Ugyanis, ha Q egy pont, jelentse Q_1 az xz -, Q_2 az yz -síkra való merőleges vetületét.

Áll, hogy (l. a Területmérésről)

$$|\beta_{i,j} - A_1^\circ B_1^\circ C_1^{[1]} D_1^\circ| \leq e_2 + e_4 + B^\circ C^{[1]} C^\circ, \\ |\gamma_{i,j} - A_2^\circ B_2^\circ C_2^{[1]} D_2^\circ| \leq e_1 + e_3 + D^\circ C^{[1]} C^\circ,$$

$A_1^\circ B_1^\circ C_1^{[1]} D_1^\circ$ ama parallelogramma területét jelentvén, a melynek csúcsai $A_1^\circ, B_1^\circ, C_1^{[1]}, D_1^\circ$.

¹ Az A, B, \dots, e_1, \dots stb. jelekhez az i, j indexeket kellene alkalmazni, de mivel félreértésre ok nincs, ezt mellőztük. A $\Sigma \Sigma$ jel $\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1}$ helyett van.

Innen

$$| [a_{i,j}^2 + (A_1^\circ B_1^\circ C_1^{[1]} D_1^\circ)^2 + (A_2^\circ B_2^\circ C_2^{[1]} D_2^\circ)^2]^{\frac{1}{2}} - [a_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + \gamma_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} | = \\ = | A^\circ B^\circ C^{[1]} D^\circ - \tau_{i,j} | \leq e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + B^\circ C^{[1]} C^\circ + D^\circ C^{[1]} C^\circ \quad (3)$$

következik.

Ámde

$$| (A^\circ B^\circ D^\circ + B^\circ C^\circ D^\circ) - A^\circ B^\circ C^{[1]} D^\circ | = | B^\circ C^\circ D^\circ - B^\circ C^{[1]} D^\circ |$$

és mivel nyilván

$$| B^\circ C^\circ D^\circ - B^\circ C^{[1]} D^\circ | \leq B^\circ C^{[1]} C^\circ + D^\circ C^{[1]} C^\circ, \\ | (A^\circ B^\circ D^\circ + B^\circ C^\circ D^\circ) - \tau_{i,j} | \leq e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + \\ + 2 (B^\circ C^{[1]} C^\circ + D^\circ C^{[1]} C^\circ),$$

az (1) és (2) szerint

$$\Sigma \Sigma | (A^\circ B^\circ D^\circ + B^\circ C^\circ D^\circ) - \tau_{i,j} | < 3\delta.$$

Így tehát $\delta=0$ -ra az (a) segélyével

$$\lim_{\delta=0} \Sigma \Sigma (A^\circ B^\circ D^\circ + B^\circ C^\circ D^\circ) = \lim_{\delta=0} \Sigma \Sigma \tau_{i,j} = t.$$

Vagyis a $2lm$ $A^\circ B^\circ D^\circ$, $B^\circ C^\circ D^\circ$ -féle háromszöglapból álló polyedris felület területének a limese $\delta=0$ -ra t . Ámde a *b)* szerint a területnek a LEBESGUE-féle definitio (sőt még inkább a szűkebb definitiók) szerint vett értéke $\geq t$. Így a terület definitiója (l. A területmérésről) szerint $T=t$.

A (3) és az *a)*-ből még a céljainkra szükséges

$$T=t=\lim_{\delta=0} \Sigma \Sigma A^\circ B^\circ C^{[1]} D^\circ \quad (4)$$

képlet következik.

Az (1) és (2)-nek eleget tevő x_i , y_j pontokat felvéve, definiáljunk a P mindama pontjaira, a melyek nem fekszenek egy $x=x_i$, $y=y_j$ vonalon sem, egy λ függvényt, úgy, hogy az $a_{i,j}$ (belső) pontjaira

$$\lambda(x, y) = \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{x_{i+1} - x_i}$$

legyen. λ tehát az $a_{i,j}$ belsején állandó.

Állítom, hogy

$$\left| \iint_{a_{i,j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) dx dy \right| \leq e_1 + e_3 + D^\circ C^{[1]} C^\circ. \quad (5)$$

Ugyanis a FUBINI-féle tétel nyilván alkalmazható λ -ra is és így

$$\iint_{a_{i,j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) dx dy = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) dx \right] dy,$$

s a LEBESGUE-féle tétel szerint

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) dx = [f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)] - [f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)].$$

Jelentse z_1 az $\overline{A^\circ B^\circ}$, z_3 a $\overline{D^\circ C^{[1]}}$ ama pontjának a z koordinátáját, melynek y koordinátája y . Nyilván

$$z_3 - z_1 = f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j).$$

Igy tehát

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{a_{i,j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) dx dy \right| \leq \\ & \leq \int_{y_j}^{y_{j+1}} (|f(x_{i+1}, y) - z_3| + |f(x_i, y) - z_1|) dy. \end{aligned}$$

Ámde $|f(x_{i+1}, y) - z_3|$ nyilván nem nagyobb, mint a $D^\circ C^{[1]} C^\circ$ háromszög s az e_3 ellipszis $y = \text{const.}$ metszeteinek az összege, $|f(x_i, y) - z_1|$ pedig az e_1 , $y = \text{const.}$ metszeténél nem kisebb. Legyen w e három metszet összege. Mivel nyilván

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} w dy \leq e_1 + e_3 + D^\circ C^{[1]} C^\circ,$$

tehát

$$\left| \iint_{a_{i,j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) dx dy \right| \leq e_1 + e_3 + D^\circ C^{[1]} C^\circ.$$

Jelölje W az $x=x_i$, $y=y_j$ vonalak összességét.

Legyenek δ_r , $r=1, 2, \dots$ pozitív számok. Legyen W_r az a δ_r -hez, a mi az (1) (2) szerint W a δ -hoz. Tartalmazza továbbá W_{r+1} a W_r -et ($r=1, 2, \dots$).¹ Legyenek $l_r, m_r, i_r, j_r, x_{ir}, y_{ir}, a_{ir, jr}^r, \lambda_r$ azok a W_r -hez, amik $l, m, i, j, x_i, y_j, a_{i, j}, \lambda$ voltak a W -hoz.

Legyen (W) a W_1, W_2, \dots idomok egyesítése. (W) nyilván zérus mértékű. Továbbá minden λ_r definiálva van a $P-(W)$ sokaságon.

Állítom, hogyha $\sum_1^\infty \delta_r$ convergens, akkor

$$\lim_{r=\infty} \lambda_r$$

általában létező.

Fogadjuk el ezt az állítást.

Az (5), (1) és (2)-ből

$$\Sigma \Sigma \left| \iint_{\alpha_{i,j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) dx dy \right| \leq \Sigma \Sigma (e_1 + e_3 + D^\circ C^{\text{re}} C^\circ) < 2\delta$$

következik. Így annál inkább

$$\left| \iint_P \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) dx dy \right| < 2\delta,$$

azaz

$$\lim_{r=\infty} \iint_P \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda_r \right) dx dy = 0,$$

azaz

$$\iint_P \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \lim_{r=\infty} \iint_P \lambda_r dx dy;$$

de mivel feltevésünk szerint $\lim_{r=\infty} \lambda_r$ létező, egy ismert tétel² szerint

$$\iint_P \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \iint_P (\lim_{r=\infty} \lambda_r) dx dy.$$

¹ Hogy ez lehetséges, kitűnik «A területmérés» című már idézett munkámból.

² Cours. T. II. p. 108.

Nyilvánvaló, hogy ez az utóbbi egyenlőség akkor is áll, ha a P helyébe a P egy oly négyszöge vétetik, a melynek oldalai az W vonalai. De ez az egyenlőség még akkor is helyes, ha az integrálási tartomány a P egy oly μ négyszöge, a melynek oldalai a P oldalaival paralelek. Ugyanis μ az előbbi négyszögek egy $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_s, \dots$ sorozatának a határhelyzete. Ismeretes, hogy

$$\iint_{\mu} = \lim_{s=\infty} \iint_{\mu_s},$$

s így

$$\begin{aligned} \iint_{\mu} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \lim_{s=\infty} \iint_{\mu_s} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \\ &= \lim_{s=\infty} \iint_{\mu_s} (\lim_{r=\infty} \lambda_r) dx dy = \iint_{\mu} (\lim_{r=\infty} \lambda_r) dx dy. \end{aligned}$$

Ámde így egy előbbi megjegyzés szerint $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\lim_{r=\infty} \lambda_r$ általában egyenlők.

Legyen az $a_{i,j}$ belsején

$$\varrho = \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j)}{y_{j+1} - y_j},$$

és legyen ϱ_r az a W_r -hez, a mi ϱ a W -hoz.

Ha tehát $\sum_1^{\infty} \partial_r$ convergens $\frac{\partial f}{\partial y}$ általában $\lim_{r=\infty} \varrho_r$.

A (4) szerint

$$\begin{aligned} T &= \lim_{r=\infty} \Sigma \Sigma [a_{i,j}^2 + (A_2^{\circ} B_2^{\circ} C_2^{[0]} D_2^{\circ})^2 + (A_1^{\circ} B_1^{\circ} C_1^{[0]} D_1^{\circ})^2]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \lim_{r=\infty} \Sigma \Sigma [1 + \lambda_r^2 + \varrho_r^2]^{\frac{1}{2}} \cdot a_{i,j}. \end{aligned}$$

Ámde λ_r, ϱ_r az $a_{i,j}$ -ben állandók és

$$a_{i,j} = \iint_{a_{i,j}} dx dy,$$

így

$$T = \lim_{r=\infty} \Sigma \Sigma \iint_{a_{i,j}} [1 + \lambda_r^2 + \varrho_r^2]^{\frac{1}{2}} dx dy = \lim_{r=\infty} \iint_P [1 + \lambda_r^2 + \varrho_r^2]^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Ámde így ¹

$$\begin{aligned} T &= \iint_P \left(\lim_{r=\infty} [1 + \lambda_r^2 + \varrho_r^2]^{\frac{1}{2}} \right) dx dy = \\ &= \iint_P \left[1 + \left(\lim_{r=\infty} \lambda_r \right)^2 + \left(\lim_{r=\infty} \varrho_r \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy, \end{aligned}$$

azaz végül

$$T = \iint_P \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

A II. tehát bizonyítva van, ha még kimutatjuk, hogy ha $\sum_1^\infty \delta_r$ convergens $\lim_{r=\infty} \lambda_r$ létező és értéke általában $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Legyen M a $P-(W)$ egy pontja és legyen $\lambda^+(M)$ a $\lambda_r(M)$, $r=1, 2, \dots$ értékek legnagyobb, $\lambda^-(M)$ ugyane értékek legkisebb határa $r=\infty$ -re. Kimutatjuk, hogy F -ben (és éppen így a P minden négyszögében, a melynek oldalai a P oldalaiival paralelek)

$$\iint_P \lambda^+ dx dy = \iint_P \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \iint_P \lambda^- dx dy.$$

Ámde így nyilván λ^+ és λ^- általában egymással és még $\frac{\partial f}{\partial x}$ -szel is egyenlők, azaz $\lim_{r=\infty} \lambda_r$ általában létező és értéke $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Kimutatjuk, hogy

$$\iint_P \lambda^+ dx dy = \iint_P \frac{\partial f}{\partial x} dx dy;$$

a bizonyítás analog λ^- -ra s az esetre is, ha a P helyébe más négyszög vétetnék.

λ^+ nyilván absolute véve $\leq G$. Változzék λ^+ m és $M \geq m$ között. Legyen μ egy pozitív egész szám és legyenek $m_0, \dots, m_k, \dots, m_\mu$ oly számok, hogy

$$m = m_0 < m_1 < \dots < m_k < m_{k+1} < \dots < m_\mu = M,$$

$$m_{k+1} - m_k = \frac{M - m}{\mu}, \quad k = 0, \dots, \mu - 1$$

legyen. Az $\frac{M - m}{\mu}$ érték jele ε legyen.

¹ Cours. T. II. p. 108.

Jelölje E_k a P ama pontjaiból álló idomot, a mely pontokra

$$m_k \leq \lambda^+ < m_{k+1}$$

áll.

Mint ismeretes, E_k mérhető. Továbbá szerkeszthetők az E_k -hoz oly négyszögek, a melyeknek — kettenként véve őket — közös belső pontja nincs, a melyek az E_k minden pontját tartalmazzák és még ha az e négyszögek idoma Q

$$0 \leq m(Q) - m(E_k) < \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad (\alpha)$$

itt ismert jelzéssel $m(Q)$ a Q , $m(E_k)$ az E_k mértéke.

Legyen s egy oly pozitív egész szám, hogy

$$2 \sum_s \delta r_s^1 < \frac{\varepsilon}{\mu}. \quad (\beta)$$

Ha v elég nagy, a W_v -nek esnek a Q -ba négyszögei. Mivel továbbá λ^+ értékei E_k pontjaira m_k és m_{k+1} közé esnek, az E_k bármely pontjához lesznek oly v értékek, a melyek nagyobbak bármely előre adott pozitív számnál úgy, hogy a W_v -nek az e pontot tartalmazó négyszögeiben

$$m_k - \varepsilon < \lambda_v < m_{k+1} + \varepsilon.$$

Legyenek $q_1^{(v)} \dots q_{t_v}^{(v)}$ (ha vannak) a W_v ama négyszögei, a melyek a Q -ba esve az utóbbi viszonynak eleget tesznek.

A

$$q_1^{(s)}, \dots, q_{t_s}^{(s)}, q_1^{(s+1)}, \dots, q_{t_{s+1}}^{(s+1)}, \dots, q_1^{(s+k)}, \dots, q_{t_{s+k}}^{(s+k)}, \dots$$

sorból azokat a négyszögeket, a melyek egy a sorban már előbb előfordult négyszögbe esnek, elhagyva, a négyszögeknek egy a Q -ba eső q_1, q_2, \dots , sorát nyerjük. E négyszögek az E_k minden pontját bezárják, kettenként véve őket közös belső pontjuk nincs és ha q_v a $W_{(v)}$ négyszöge

$$m_k - \varepsilon < \lambda_{(v)} < m_{k+1} + \varepsilon. \quad (\gamma)$$

Nyilván ¹

$$\sum_1^{\infty} v \left| \iint_{q_v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda_{(v)} \right) dx dy \right| < 2 \sum_s^{\infty} v \delta_r < \frac{\varepsilon}{\mu}. \quad (\delta)$$

A (γ) -ból ε értékét tekintetbe véve

$$m_k = \lambda_{(v)} \pm (< 2\varepsilon);$$

s így

$$\begin{aligned} \left| \iint_{q_v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - m_k \right) dx dy \right| &= \left| \iint_{q_v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda_{(v)} \mp (< 2\varepsilon) \right) dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \iint_{q_v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda_{(v)} \right) dx dy \right| + 2\varepsilon \iint_{q_v} dx dy. \end{aligned}$$

Azaz a (δ) szerint ha még q_v a q_v területét is jelenti

$$\sum_1^{\infty} v \left| \iint_{q_v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - m_k \right) dx dy \right| < \frac{\varepsilon}{\mu} + 2\varepsilon \sum_1^{\infty} v q_v$$

s az (α) szerint és míg mivel $\varepsilon < 1$ tehető fel, a jobboldal

$$< \frac{\varepsilon}{\mu} + 2\varepsilon m(E_k) + 2\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{\mu} < \frac{3\varepsilon}{\mu} + 2\varepsilon m(E_k). \quad (\varepsilon)$$

Továbbá ha $\sum_1^{\infty} v q_v$ még a q_1, q_2, \dots négyszögek idomát is jelenti

$$\left| \iint_{E_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - m_k \right) dx dy \right| = \left| \iint_{\sum_1^{\infty} v q_v} - \iint_{\sum_1^{\infty} q_v - E_k} \right| \leq \left| \sum_1^{\infty} v \iint_{q_v} \right| + \left| \iint_{\sum_1^{\infty} q_v - E_k} \right|. \quad (\eta)$$

Ámde

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} - m_k \right| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + |m_k| < 2G$$

és az (α) szerint

$$m \left(\sum_1^{\infty} v q_v - E_k \right) < \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

¹ Ugyanis a baloldal nyilván nem nagyobb, mint

$$\sum_s^{\infty} r \left(\sum \sum_{\alpha_{ir}, j_r} \left| \iint \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda_r \right) dx dy \right| \right)$$

itt a $\sum \sum$ a W_r minden α_{ir}, j_r négyszögére szól és ez a W_r -re képezett összeg $< 2\delta_r$.

Igy az (ε) -ból és az (γ) -ból:

$$\left| \iint_{E_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - m_k \right) dx dy \right| = \left| \iint_{E_k} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy - m_k \cdot m(E_k) \right| \leq \\ \leq \frac{3\varepsilon}{\mu} + 2\varepsilon m(E_k) + \frac{2\varepsilon}{\mu} \cdot G.$$

Továbbá ha P jelöli a P területét is, az utóbbi képletből nyerjük, hogy

$$\left| \sum_0^{\mu-1} \iint_{E_k} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy - \sum_0^{\mu-1} m_k m(E_k) \right| < 3\varepsilon + 2\varepsilon P + 2\varepsilon G. \quad (\omega)$$

Ámde a LEBESGUE-féle integrál definitiója szerint

$$\sum_0^{\mu-1} \iint_{E_k} = \iint_P, \quad 0 \leq \iint_P \lambda^+ dx dy - \sum_0^{\mu-1} m_k \cdot m(E_k) \leq P \cdot \varepsilon.$$

Igy az (ω) -ból

$$\left| \iint_P \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda^+ \right) dx dy \right| < 3\varepsilon + 3\varepsilon P + 2\varepsilon G,$$

azaz mivel ε tetszésszerűen kicsiny lehet,

$$\iint_P \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda^+ \right) dx dy = 0,$$

a mi bizonyítandó volt.

A III. bizonyítása.

Legyen x' y' , z egy új derékszögű pontcoordinatarendszer. A kezdőpont kellő választásával P az $x'y'$ ama quadránsába eshet, a melyre x' és y' pozitívok.

Az $a_{i,j}$ kerületének az y' tengelyre való merőleges vetülete vagy \overline{AC} vagy \overline{BD} vetülete. Legyenek e vetület két végének y' coordinátái $y'_1 < y'_2$. Ha c az $y'_1 y'_2$ közé esik, az $y' = c$ egyenes az $a_{i,j}$ kerületét két pontban metszi (e két pont egybeeső, ha $c = y'_1$ vagy $c = y'_2$). Legyen K , L e két pont, K legyen közülük az y' tengelyhez közelebbi. Legyen K_1 , L_1 az $A^\circ B^\circ C^{(\omega)} D^\circ$ ama pontja, a melynek az xy síkra való merőleges vetülete K , illetve L . Legyenek z_K , z_L e pontok z , x'_K , x'_L x' coordinátái.

Legyen λ' az $a_{i,j}$ belsején $\frac{z_L - z_K}{\overline{KL}}$. Könnyen igazolható, hogy $\frac{\partial f}{\partial x'}$ -re az I-hez hasonló tétel áll.

Állítom, hogy

$$\left| \iint_{a_{i,j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} - \lambda' \right) dx' dy' \right| \leq e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + B^\circ C^{[0]} C^\circ + D^\circ C^{[0]} C^\circ. [1]$$

Ugyanis a FUBINI-féle tétel szerint (a mely nyilván alkalmazható)

$$\iint_{a_{i,j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} - \lambda' \right) dx' dy' = \int_{y'_1}^{y'_2} \left(\int_{x'_K}^{x'_L} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} - \lambda' \right) dx' \right) dy';$$

s a LEBESGUE-féle tétellel

$$\iint_{a_{i,j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} - \lambda' \right) dx' dy' = \int_{y'_1}^{y'_2} [(f(L) - z_L) - (f(K) - z_K)] dy'.$$

Ámde ha az $e_1 \dots D^\circ C^{[0]} C^\circ$ idomoknak az $y'z$ síkra való merőleges vetületei s e vetületek területei $e'_1 \dots (D^\circ C^{[0]} C^\circ)'$:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{a_{i,j}} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} - \lambda' \right) dx' dy' \right| &\leq \int_{y'_1}^{y'_2} |f(L) - z_L| dy' + \int_{y'_1}^{y'_2} |f(K) - z_K| dy' \leq \\ &\leq e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_4 + (B^\circ C^{[0]} C^\circ)' + (D^\circ C^{[0]} C^\circ)' \leq \\ &\leq e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + B^\circ C^{[0]} C^\circ + D^\circ C^{[0]} C^\circ. \end{aligned}$$

Ez állítás kimutatására megjegyezzük, hogy az $e_1, \dots, D^\circ C^{[0]} C^\circ$ $y' = \text{const.}$ metszeteinek segítségével, miként az (5) képletnél, igazolható, hogyha az $a_{i,j}$ kerületének az y' tengelyre való merőleges vetülete a \overline{BD} vetülete

$$\int_{y'_1}^{y'_2} |f(L) - z_L| dy', \quad \int_{y'_1}^{y'_2} |f(K) - z_K| dy'$$

egyike $\leq e'_1 + e'_4$, másika $\leq e'_2 + e'_3 + (B^\circ C^{[0]} C^\circ)' + (D^\circ C^{[0]} C^\circ)'$.

Ha pedig az említett vetület \overline{AC} vetülete az egyik integrál $< e'_4 + e'_3 + (D^\circ C^{[0]} C^\circ)'$ a másik $< e'_2 + e'_1 + (B^\circ C^{[0]} C^\circ)'$. És még $e'_1 \leq e_1 \dots$ mint sík idom merőleges vetületének a területe.

Legyen λ'_r a az W_r -hez, a mi λ' a W -hoz.

Hacsak $\sum_1^\infty \delta_r$ *convergens* $\lim_{r=\infty} \lambda'_r$ általában létező és értéke $\frac{\partial f}{\partial x'}$,

Ez állítás bizonyítása éppen úgy történik az [1] segélyével, mint a λ_r -re vonatkozó hasonló állítás mutattatott ki az (5) segélyével.

Az x' irány a pozitív x és a pozitív x' tengely által képezett φ szöggel jellemezhető $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Legyen Φ a φ értékeknek egy megszámlálható, a 0 és $\frac{\pi}{2}$ értékeket is tartalmazó és a $0 \dots 2\pi$ -ben mindenütt sűrű sokasága. Jelöljük a Φ elemeit $[\varphi]$ -vel a $[\varphi]$ -hez való x' -t $[x']$ -vel a $[\varphi]$ -hez való λ' -t $[\lambda']$ -vel.

Legyen $([\varphi])$ a P ama helyeinek a sokasága, a melyeken

$$\frac{\partial f}{\partial [x']} \neq \lim_{r=\infty} [\lambda'_r].$$

E sokaság, mint tudjuk, zérus mértékű, Φ pedig megszámlálható. Így az összes $([\varphi])$ sokaságok egyesítése zérus mértékű. Azaz általában bármi, is az $[x']$,

$$\frac{\partial f}{\partial [x']} = \lim_{r=\infty} [\lambda'_r].$$

Legyen M a P -nek egy oly pontja, a mely egy $([\varphi])$ -hez sem való. M a W_r egy négyszögébe esik. E négyszöghöz egy $A^\circ B^\circ C^{(\circ)} D^\circ$ való. Vezessünk ez $A^\circ B^\circ C^{(\circ)} D^\circ$ -val az M° -on át egy parallel síkot.

$[\lambda'_r]$ $r = \infty$ -re való limesének a létezését két különböző $[\varphi]$ -re tekintetbe véve, világos, hogy az említett síknak $r = \infty$ -re egy ν határhelyzete van. És mivel $[\varphi]$ értékei közt a 0 és $\frac{\pi}{2}$ is előfordulnak: ν a III-ban adott sík.

Továbbá, ha az M -en át a z tengelyvel parallel olyan μ síkot vezetünk, a melynek az xy síkkal való metszete egy $[x']$, akkor a felület és μ metszetének az M° pontban érintője van, a mely a ν -be esik.

Ez áll akkor is, ha μ -nek az xy síkkal való metszete nem egy $[x']$.

Ennek kimutatására legyen a III-ban jelzett N -re $\overline{NM} = \varrho$ állandó, φ változó (φ az \overrightarrow{MN} és x szögét jelentvén). Ha N_1 és N_2 két N pont és

$$\nrightarrow N_1MN_2 = \omega < \pi$$

akkor mivel a felület rectifiabilis és a ν sík egyenlete $z = \phi(x, y)$ is nyilván rectifiabilis ugyanavval a G -vel

$$\overline{N_2'N_2^\circ} < \overline{N_1'N_1^\circ} + 2G\overline{N_1N_2} < \overline{N_1'N_1^\circ} + 2G\varrho\omega,$$

itt $N_1'N_2'$ a ν ama pontjai, a melyeknek az xy síkra való merőleges vetületei N_1, N_2 .

Ámde

$$\varrho = \overline{MN_2} = \overline{MN_1},$$

s így

$$\frac{\overline{N_2'N_2^\circ}}{\overline{MN_2}} \leq \frac{\overline{N_1'N_1^\circ}}{\overline{MN_1}} + 2G\omega. \quad [2]$$

Legyen $\delta > 0$. Legyen az N egy $[x']$ -en. Mivel a felületnek az M° ponton átmenő a $z[x']$ síkkal parallel síkkal való metszete M° -ban érintővel bir, van egy positiv $\varepsilon([\varphi])$ érték, úgy, hogy

$$\frac{\overline{N'N^\circ}}{\overline{MN}} < \frac{\delta}{2},$$

hacsak $\overline{MN} = \varrho < \varepsilon([\varphi])$, — N' a ν ama pontját jelentvén, a melynek az xy síkra való merőleges vetülete N .

Legyen $\theta = \frac{\delta}{4G}$. A [2] szerint bármily a $([\varphi] - \theta, [\varphi] + \theta)$ intervallumba eső φ -hez való N -re, hacsak $\varrho < \varepsilon([\varphi])$

$$\frac{\overline{N'N^\circ}}{\overline{MN}} < \delta.$$

Ámde θ csak a δ -tól függ, így a $0 \dots 2\pi$ intervallum véges számú $([\varphi] - \theta, [\varphi] + \theta)$ intervallummal befödhető.

Legyen $\varepsilon > 0$ és kisebb, mint valamennyi az ez (véges számú) intervallumok $[\varphi]$ közepeire való $(\varepsilon([\varphi]))$ érték.

Ekkor tehát

$$\frac{\overline{N^{\circ}N^{\circ}}}{MN} < \delta.$$

hacsak $\overline{MN} < \varepsilon$.

Így $\overline{M^{\circ}N^{\circ}}$ határhelyzete $\varrho = 0$ -ra nyilván $\overline{M^{\circ}N^{\circ}}$ határhelyzete, de ez utóbbi létező és a ν -be eső. Ezzel a III. igazolva van.

Ezek után áttérünk az általános rectifiabilis felületre.

Legyen ξ , η , ζ egy derékszögű pontkoordinátarendszer. Legyenek $f_1(M)$, $f_2(M)$, $f_3(M)$ az f módjára definiált függvények.

A

$$\xi = f_1(M), \quad \eta = f_2(M), \quad \zeta = f_3(M)$$

pontot M_0 -val jelölve, az M_0 pontok halmaza az általános rectifiabilis felület. Jele R legyen. Az R -re az I., II., III. tételekhez hasonlók állanak.

I. $\frac{\partial f_k}{\partial x}, \frac{\partial f_k}{\partial y} \quad k = 1, 2, 3$ általában létezik.

Jelöljük a $z = f_k(M) \quad k = 1, 2, 3$ felülethez való λ_r , ϱ_r értékeket $\lambda_r^{(k)}$, $\varrho_r^{(k)}$ -vel.

A területmérésről czimű munkámban kimutattam, hogy W_r olyan lehet az f_k -hoz $k = 1, 2, 3$, mint volt az f -hez. És R területére T -re áll, hogy

$$T = \lim_{r \rightarrow \infty} \Sigma \Sigma A_0 B_0 C_{[0]} D_0;$$

itt $A_0 B_0 C_{[0]} D_0$ ama parallelogramma területe, a melynek $A_0 B_0 D_0$ a három csúcsa, úgy hogy $B_0 D_0$ átlója, míg $C_{[0]}$ így már meghatározott.

Legyenek (1), (2), (3) az $A_0 B_0 C_{[0]} D_0$ parallelogramma $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ síkokra való merőleges vetületeinek a területei.

Nyilván

$$A_0 B_0 C_{[0]} D_0 = [(1)^2 + (2)^2 + (3)^2]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\left(\frac{(1)}{a_{i,j}} \right)^2 + \left(\frac{(2)}{a_{i,j}} \right)^2 + \left(\frac{(3)}{a_{i,j}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} a_{i,j}.$$

Ámde nyilván

$$\begin{aligned} \left| \frac{(1)}{a_{i,j}} \right| &= |\lambda_r^{(2)} \varrho_r^{(3)} - \lambda_r^{(3)} \varrho_r^{(2)}|, \\ \left| \frac{(2)}{a_{i,j}} \right| &= |\lambda_r^{(1)} \varrho_r^{(3)} - \lambda_r^{(3)} \varrho_r^{(1)}|, \\ \left| \frac{(3)}{a_{i,j}} \right| &= |\lambda_r^{(1)} \varrho_r^{(2)} - \lambda_r^{(2)} \varrho_r^{(1)}|, \end{aligned}$$

$$a_{i,j} = \iint_{a_{i,j}} dx dy, \quad \lim_{r=\infty} \lambda_r^{(k)} = \frac{\partial f_k}{\partial x}, \quad \lim_{r=\infty} \varrho_r^{(k)} = \frac{\partial f_k}{\partial y}, \quad k = 1, 2, 3.^1$$

Tehát épen úgy, miként a fentebbi II. tételnél.

II.

$$\begin{aligned} T = \iint_P \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial f_3}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_3}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy. \end{aligned}$$

az integrál LEBESGUE-féle lévén.

Mellékesen megjegyezzük, hogy *innen könnyen adódik a szükséges és elégséges feltétel arra nézve, hogy $T=0$ legyen.*

x, y, ξ, η, ζ helyébe u, v, x, y, z vétetvén, látnivaló, hogy *rectifiabilis felület területét a GAUSS-féle*

$$\iint (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} du dv$$

képlet adja a LEBESGUE integráljával.

III. A P ama pontjaihoz, a melyekre a II. alatt integrálandó függvény nem zérus, érintősík tartozik, a melynek definitiója a közönséges.

Még megjegyzendő, hogy az $y = \varphi(x)$ rectifiabilis (határolt deriváltakkal bíró) görbére a tárgyalás elején említett tételek a $z = f(x, y)$ -nál követett módszerhez hasonlóval igazolhatók.

¹ A hat utóbbi egyenlőség általában áll.

IGEN VÉKONY FÉMRETEGEK ELEKTROMOS VEZETŐKÉPESSÉGE ÉS OPTIKAI ÁLLANDÓI.

POGÁNY BÉLÁ-tól.

1. §. Bevezetés.

1. Igen vékony fémrétegek elektromos vezetésének mérésével többen foglalkoztak. A régebbi méréseket majdnem kizárólag ezüstön végezték, a minnek az oka az volt, hogy az ezüstöt aránylag könnyen lehetett vékony rétegben chemiai úton üveglemezekre lecsapni, a réteg vastagságát pedig az ezüstnek jódezüstté átváltoztatása után fényinterferentia-jelenség segítségével meghatározni.¹ Újabban FÖRSTERLING² különben rámutatott arra, hogy a WIENER-féle interferentialis eljárással bármely fémréteg vastagságát meg lehet határozni, tehát oly fémréteget is, mely chemiai úton nem változtatható át átlátszó közeggé. A régebbi vizsgálatok nem is foglalkoznak általában a réteg vastagságának mérésével, minthogy e vizsgálatok czélja inkább az volt, hogy a vékony ezüstrétegek ellenállásának időbeli vagy thermikus és egyéb hatások következtében beálló megváltozásából az ezüstréteg strukturájára, illetőleg annak megváltozására következtessenek. G. VINCENT³ már a rétegek vastagságát is mérte és kiszámította ezüstrétegei fajlagos vezetőképességét, hogy annak a réteg egy bizonyos vékonyságánál bekövetkező megváltozásából a tömör ezüstöt borító felületi réteg existenciájára és vastag-

¹ MESLIN : Ann. de Ch. et de Phys. (6) 20. 89. l. 1890., O. WIENER : Ann. d. Phys. 31. 644. l. 1887.

² K. FÖRSTERLING : Gött. Nachr. 1911. 452. l.

³ G. VINCENT : Ann. de Ch. et de Phys. (7) 19. 433. 1900.

ságára következtesen. A rétegek vastagságát O. WIENER módszerével mérte; az általa készített legvékonyabb réteg $38 \mu\mu$ vastag volt. 1902-ben azután J. J. THOMSON¹ javaslatára J. PATTERSON² fogott hasonló mérésekhez. J. J. THOMSON ugyanis a fémek elektromos vezetésének elektronelmélete alapján arra a következtetésre jutott, hogy az elektromos áramot közvetítő, egyensúlyi helyzethez nem kötött elektronok úgynevezett szabad úthossza a réteg vastagságától is függ oly rétegekben, melyeknek vastagsága már commensurabilis ezzel az úthosszal. Legyen λ a szabad úthossz a tömör fémekben, D a vékony réteg vastagsága, akkor THOMSON szerint a réteg vékonysága folytán megváltozott szabad úthosszával lesz:

$$\lambda' = D \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{\lambda}{D} \right). \quad (1)$$

Az (1) képlet természetesen csak oly rétegekre érvényes, melyeknek vastagsága oly csekély, hogy commensurabilis λ -val. Minthogy pedig a fajlagos ellenállás³

$$w = \frac{1}{\sigma} = \frac{2mu}{e^2 N \lambda} = \frac{\text{const.}}{N \lambda}, \quad (2)$$

a hol N az elektronok száma köbcentiméterenként, λ pedig a szabad úthosszával; tehát D -nek bizonyos értékétől kezdve a vékonyabb rétegek fajlagos ellenállása rohamosan növekszik. PATTERSONnak bismut- és platinarétegeken végzett mérései ezt igazolták. Úgy THOMSON következtetését, mint PATTERSON méréseinek eredményét is többen⁴ kétségbevonták.

Vizsgálataim eredeti célja TANGL professzor úr javaslatára az volt, hogy PATTERSON méréseit platinarétegeken megismételve és más fémekre is kiterjesztve, tisztázzam ezt a kérdést. PATTERSON méréseit platinán megismételve, oly eredményekre jutottam, mint ő. Nevezetesen egy kritikus vastagságtól, körülbelül

¹ J. J. THOMSON: Cambridge Proc. (2) 9. 120—122. l. 1901.

² J. PATTERSON: Cambridge Proc. (2) 9. 118. l. 1901.

³ Lásd pl. H. A. LORENTZ: Theory of Electrons. 64. l. (113) képlet.

⁴ Lásd pl. P. DRUDE: Ann. d. Phys. (4) 14. 955. l. 1904.

7—8 μ -tól kezdve a vékonyabb rétegek fajlagos ellenállása rohamosan növekedett.

2. Az ellenállás megváltozása oly nagy volt, hogy kézenfekvő volt a következtetés, hogy a fémek elektromos vezetőképessége és optikai állandói között lévő összefüggés következtében ez a változás az optikai állandók értékére is befolyással lesz. Ezt megállapítandó, az ellenállásmérésekhez használt platinarétegek optikai állandóit, n -t és k -t a FÖRSTERLING-féle¹ eljárással meghatároztam. Ugyanezen módon N. W. GALLI² is mérte vékony platinarétegek optikai állandóit, de adatai annyira ingadoznak,³ hogy belőlük n és k változásának törvényszerűségét kiolvasni nem lehet. Saját méréseimnél n és k a rétegek vékonyodásával teljes szabályszerűséggel változott. Ekkor publikálta W. PLANCK⁴ vékony rézrétegek optikai állandóira vonatkozó vizsgálatait. Míg én a w megváltozásából következtettem n és k változására, addig PLANCK megfordítva n és k észlelt megváltozásából a réz fajlagos ellenállásának változására következtetett, illetve annak feltevésével magyarázta meg az optikai állandók észlelt változását. Platinára vonatkozó méréseim kész eredményeit ekkor egy előzetes jelentésben ismerttettem.⁵

3. További vizsgálataim célja az volt, hogy a vékony rétegek elektromos vezetőképességének és a réteg optikai állandóinak a réteg vékonyodásával járó parallel változását több más fémen is tanulmányozzam. E végből úgy, mint a platinarétegeken történt, *egy és ugyanazon a rétegen* határoztam meg a fajlagos ellenállást és az optikai állandókat. E mérésekkor elsőrangú fontosságú a réteg vastagságának lehető pontos meghatározása.

Az egészen vékony, $< 15 \mu$ rétegek vastagságát az összes eddigi észlelők indirect úton határozták meg.

N. GALLI és W. PLANCK is a FÖRSTERLINGTŐL származó képlettel az átmenő fény polárizációs állapotából és a használt fény hullámhosszából számították ki D -t. Ez az egyenlet komplex

¹ FÖRSTERLING: Gött. Nachr. 449. 1911.

² N. GALLI: Diss. Göttingen, 1913.

³ W. PLANCK: Phys. Zeitschrift 15. 563. 1914.

⁴ W. PLANCK: l. c.

⁵ B. POGÁNY: Phys. Zeitschrift 15. 688. 1914.

lévén, két út is kínálkozik D kiszámítására, de a két különböző módon számított értékek néha 100%-os eltérést is mutattak. PLANCK a következő módon segített némileg ezen a bajon. Felrajzolta a rétegen átment fény polározási azimutjának tangensét, $\operatorname{tg} \psi_a$ -t, mint a számított D függvényét. Közel egy egyenest kapott. Ennek segélyével azután az észlelt $\operatorname{tg} \psi_a$ értékek alapján korrigálta D számított értékeit. Mások ismét katodoporlasztás útján készült rétegek vastagságát a katodozás idejéből számították ki. Előző jelentésemben kimutattam, hogy ez utóbbi eljárás az indirect módszerek között a legpontosabbak egyike, de a legvékonyabb rétegek vastagsága is legpontosabban direct úton, mérlegeléssel határozható meg.

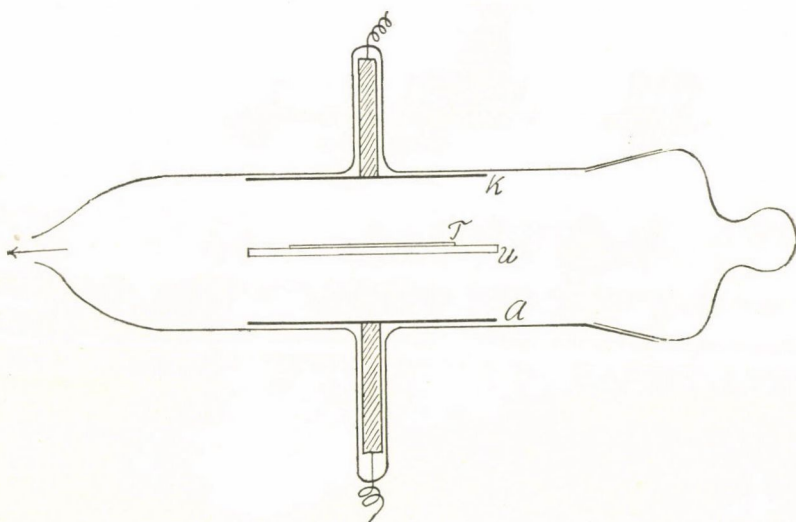
4. A továbbiakban ezeket a vizsgálataimat fogom ismertetni, melyeket platina-, palladium-, arany- és ezüstrétegeken végeztem. Méréseim folyamán olvastam A. RIEDE¹ cikkét, ki vékony ezüst-, platina-, réz- és nikkelrétegek fajlagos vezetőképeségét mérte, eredményeiről később még bővebben fogok szólni; munkám megfogalmazása közben szereztem tudomást H. FRITZE² dolgozatáról is, ki vékony ezüstrétegek optikai állandóit mérte KUNDT, RUBENS és HAGEN, DRUDE és FÖRSTERLING módszereivel oly célból, hogy ezeket a különböző mérési eljárásokat vékony rétegek esetében egymással összehasonlítsa. Meghatározva ugyanis FÖRSTERLING módszerével n -t és k -t vékony ezüstrétegeken, ezek mint a vastagság függvényei adódtak. RUBENS és HAGEN, valamint KUNDT módszerei k és n meghatározására azonban átlátszó, tehát vékony fémrétegeket, illetve fémprismát tételeznek fel. Ezekkel a módszerekkel tehát a tömör vagy színezüst törésmutatóját és absorptio-coëfficiensét meghatározni nem lehet, mert ily vékony rétegekben az optikai állandók értékei különböznek a tömör fémnek megfelelő értékektől. A rétegek vastagságát A. RIEDE részben optikai úton, részben a vastag rétegeken mérlegeléssel, a vékonyakon a katodozás idejéből számítással, H. FRITZE pedig teljesen optikai úton határozta meg.

¹ A. RIEDE : Ann. d. Phys. 45. 881. 1914.

² H. FRITZE : Ann. d. Phys. 47. 763. 1915.

2. §. A fémrétegek készítése.

A vékony fémrétegeket magam készítettem üveglemezekre katodporlasztás útján. Az üveglemezek 26×76 mm. nagyságú tárgylemezek voltak, melyeket a katodozókészülékben való expositio előtt lúggal és hígított kénsavval, majd végül destillált vízzel gondosan megtisztítottam. A katodozókészülék egy tágabb, körülbelül 7 cm. átmérőjű üvegesből állott, melyben a K katod, T tárgylemez stb. az 1. ábrán látható módon volt elhelyezve.



1. ábra.

Az U vastag üveglemez oly széles volt, mint a cső belső átmérője, úgy hogy a csőbe helyezve körülbelül felezte az anod és katod közötti távolságot. Erre az üveglemezre helyeztem a fémréteggel bevonandó tárgylemezt. Az anod alumíniumpléhből készült. Hosszabb használat után a porladó katodfém a cső belső falát is bevonta és ilyenkor a kisülés a falon szaladt végig. Ilyenkor a csövet gondosan megtisztítottam. A csövet használatkor oly mértékben evakuáltam, hogy az anod és katod közötti potenciálkülönbség körülbelül 700 voltot tett ki. Az áramot egy nagyobb inductorium szolgáltatta, melynek áram-

körébe szikraközt iktattam. Különböző fémek változó sebességgel rakódtak le az üveglemezre; a perczenként lerakódott platina-réteg körülbelül $1\ \mu\mu$, az ezüst- és aranyrétegek körülbelül $3\ \mu\mu$ vastagok voltak. Mindkét esetben azonban a lerakódás oly lassan történt, hogy az expositio idejének szabályozásával könnyen lehetett a lerakódó réteg vastagságát megszabni. A rétegek készítése általában simán ment, kivéve az ezüstrétegeket, melyek a katodozás közben gyakran megbarnultak. Az ily rétegeket kivétel nélkül eldobtam. A kész rétegek bizonyos ideig szekrényben álltak és azután megmértem először az elektromos ellenállásukat, azután optikai állandóikat.

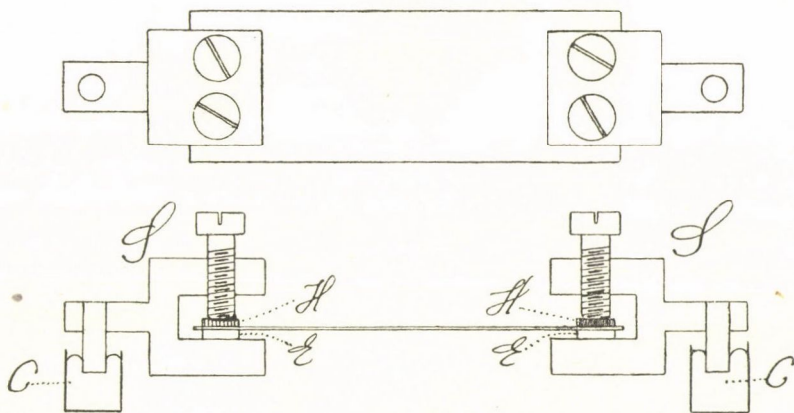
3. §. A rétegek elektromos ellenállásának mérése.

Az ellenállás mérése a WHEATSTONE-féle berendezéssel, váltakozó árammal és telefonnal történt. Mérődrót gyanánt egy HARTMANN & BRAUN-féle Wheatstone-hidat használtam, melynek drótja márványhengerre volt tekerve. Fontos, hogy az áramot vezető drót és a réteg között jó érintkezés legyen. E végből a lemezek a 2. ábrán látható módon lettek az áramkörbe iktatva. Az *S* szorítócsavarok vörösrézből készültek, a *C* csészékben kéneső volt, melybe az áramkör végei nyultak. Az *E* ezüstlemezek közvetítették az áramot az üveglemez alsó oldalán lévő réteg és a szorítócsavarok között. Az üveglemez felső lapja és a szorítócsavarok között a *H* vékony ebonitlemezek voltak. Hogy az ezüstlemezek és a réteg között jó érintkezés legyen, VINCENT és nyomában PATTERSON is úgy járt el, hogy az üveglemez két végét előzetesen lehető vastagon beezüstözték és azután került a lemezre a vékony réteg, melynek ellenállását mérték. Platinarétegeim első sorozatát én is így készítettem.

A rétegek egy másik sorozatán azonban, melyben a lemezek végén vastag platinaréteg nem volt, meggyőződtem arról, hogy a vastag rétegek feleslegesek. Ugyanis egyenlő vastagságú rétegek mindkét esetben a hibahatárokon belül egyenlő ellenállást mutattak. Hogy a létrehozott érintkezés a végeken lévő vastag rétegek nélkül is kifogástalan és jól definiált volt, az abból

is kitűnik, hogy a rétegek ellenállása a szorítócsavarokból ismételt kivéve és visszahelyezve ugyanaz maradt.

A legvékonyabb rétegeknél leginkább lehet arra gondolni, hogy a kontaktus esetleg nem jó, vagy nem jól definiált. Legvékonyabb platinarétegem, mely még vezetett, $0.9 \mu\text{m}$ -os volt, 1914 márcz. 23.-án készült. 1914 márcz. 27.-én az ellenállás 760.000 Ohm volt. Mérés után kivettem a réteget a szorítócsavarokból és másnap újra visszahelyeztem. Ekkor, 28.-án az ellenállása 745.000 Ohm volt. 29.-én más szorítócsavarokkal és más közvetítő ezüstlemezekkel az ellenállása 735.000 Ohm volt.



2. ábra.

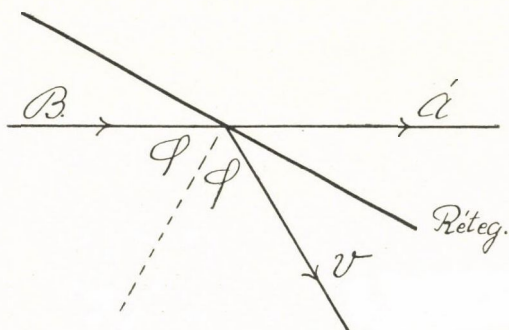
Látnivaló ez adatokból, hogy a kontaktus a platinaréteg és az ezüstlemezek között teljesen definiálva volt, különben a különböző napokon észlelt értékek nem mutatnának ily jó egyezést.

A mi eltérés van az egyes értékek között, az egy más, már többször észlelt jelenség, hogy ugyanis vékony fémrétegek ellenállása elkészítésük után egy bizonyos ideig csökken és csak azután vesz fel állandó értéket. Így például e platinaréteg ellenállása körülbelül egy további hét leforgása alatt leszállt 540.000 Ohmra és e fokon megmaradt. Egy másik, $1.9 \mu\text{m}$ vastag réteg ellenállása volt márcz. 27.-én 207.000 Ohm, 29.-én 150.000 Ohm és lett végül 9300 Ohm. Egy $2.7 \mu\text{m}$ vastag réteg

márcz. 27.-én 8100, 29.-én 6290 és végül 4300 Ohm ellenállást mutatott. Egy $6.6 \mu\mu$ vastag platinaréteg ellenállása lecsökkent 299 Ohmról 239 Ohmra. Látható, hogy a vastagabb rétegek ellenállásának relatív csökkenése is sokkal kisebb, mint az egészen vékony rétegeké. Sok észlelés van¹ különösen ezüstön arra vonatkozólag is, hogy különböző behatások, melegítés, fény stb. hogyan befolyásolják az ellenállás csökkenésének sebességét és nagyságát. Ezek azonban nehezen összehasonlítható eredményekre vezettek. Én a lemezeimet elkészítésük után magukra hagytam és ellenállásukat akkor mértem meg végérvényesen, mikor azok értéke már észrevehetően állandósult. A következő táblázatokban közölt értékek mind ily értelemben véendők.

4. §. A fémrétegek optikai állandóinak meghatározása.

Azoknak a rétegeknek optikai állandóit, a melyeken az átlátszó fény még elég intenzív volt polárizációs mérések megejtésére, a



3. ábra.

FÖRSTERLING-féle² eljárással határoztam meg. Vastagabb rétegeken DRUDE közismert eljárását alkalmaztam.

FÖRSTERLING a réteget úgy helyezi el, hogy előtte és mögötte ugyanaz az átlátszó optikai közeg legyen. A rétegnek ez átlátszó közegre vonatkoztatott törésmutatója legyen n , absorptio-

¹ Lásd VINCENT és RIEDE idézett dolgozatait.

² FÖRSTERLING, l. c.

coefficiense $nx = k$. n és k meghatározása már most a következő módon történik. Lineárisan polározott fényt ejtünk 45° -os polározási azimuttal φ beesési szög alatt a rétegre.

A beesés síkjában fekvő és arra merőleges komponensek közti fáziskülönbséget jelöljük a visszavert fényben Δ_v -vel, az átmenő fényben Δ_a -val. Ephasiskülönbségek compensálása után keletkező lineárisan polározott, visszavert, illetőleg átment fény azimutját jelöljük ψ_v , illetve ψ_a -val. Legyen továbbá

$$\frac{\operatorname{tg} \psi_v}{\operatorname{tg} \psi_a} = \operatorname{tg} \varphi \text{ és } \Delta_v - \Delta_a = \Delta. \quad (3)$$

Akkor

$$\left. \begin{aligned} \cotg^2 \varphi \pm \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin^2 \varphi} \cos \Delta &= \frac{n^2 - k^2}{(n^2 + k^2)^2} \\ \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin^2 \varphi} \sin \Delta &= \frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

φ , ψ_v , ψ_a , Δ_v és Δ_a mérhető mennyiségek úgy, hogy a (4) egyenletek baloldala ismeretes. Mint látható, e képletekben a réteg vastagsága egyáltalában nem szerepel és a képletek szigorúan érvényesek bármily vastagságú rétegre. Legyen

$$c_1 = \frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \text{ és } c_2 = \frac{n^2 - k^2}{(n^2 + k^2)^2}. \quad (5)$$

Bevezetve a

$$\sqrt{C_{1,2}} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 + c_1^2}}{c_1} \quad (6)$$

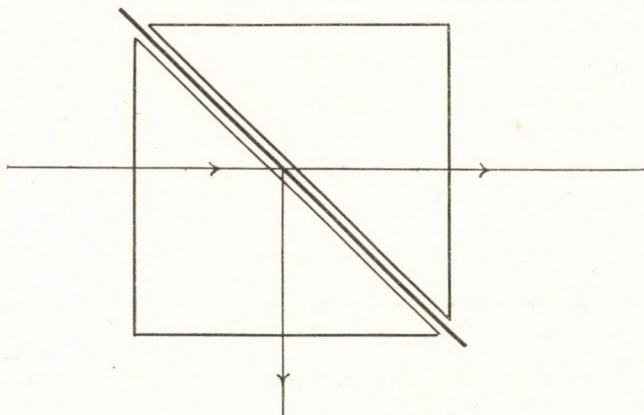
rövidítést, az (5) egyenletek feloldásából nyerjük:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{2\sqrt{C_{1,2}}}{c_1(C_{1,2} + 1)^2}, \\ n &= k\sqrt{C_{1,2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Minthogy c_1 jelentésénél fogva mindig pozitív, (7)-ből következik, hogy $\sqrt{C_{1,2}}$ is pozitív, vagyis (6)-ban a pozitív előjelet kell venni.

ϕ_v , ϕ_a , Δ_v és Δ_a mérésekor a réteg előtt és mögött ugyanannak az átlátszó optikai közegnek kell lenni. E végből eddig úgy jártak el, hogy az üveglemezt, melyen a fémréteg volt, a 4. ábra szerint xylollal két üvegprisma közé ragasztották. Úgy a visszavert, mint az átment fény az üvegprismában tetemes útat tesz meg.

Minthogy az ilyen prismák az üveg hűtése közben beálló feszültségek miatt többé-kevésbé kettősen törők, a lemért Δ_v és Δ_a értékein a prismában megtett út miatt correctiókat



4. ábra.

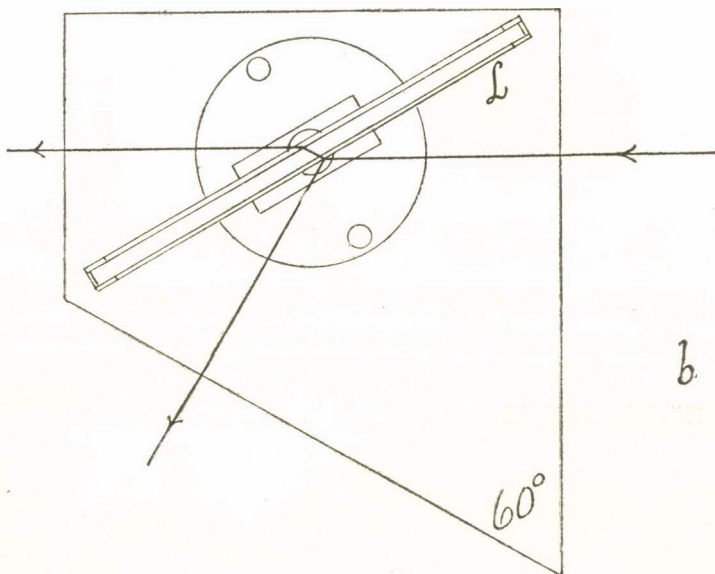
kell alkalmazni, melyek nagyságát kísérleti úton határozták meg a fémréteg eltávolítása után.

Résztint mivel a correctio alkalmazása az előjele miatt kissé kényelmetlen, részint pedig minthogy a prisma esetleges inhomogenitása miatt ügyelni kellene arra, hogy az összes mérések a prismának ugyanegy szintjében történjenek, a hol is a correctio meghatározott, a correctio alkalmazását a következő berendezéssel kiküszöböltem. E. LEYBOLD kölni cégénél készíttettem egy úgynevezett LEYBOLD-féle üvegszekrénykét, üres üvegprismát, melynek keresztmetszete, felülről tekintve, az eredetinel valamivel kisebb, $\frac{6}{7}$ méretben, az 5b ábrán látható.

Ezt megtöltöttem xylollal és ebbe helyeztem a vizsgálandó L fémréteget. Ily módon, minthogy a xylol törésmutatója közel egyezik az üveg törésmutatójával, a fémréteget körülvevő közeg

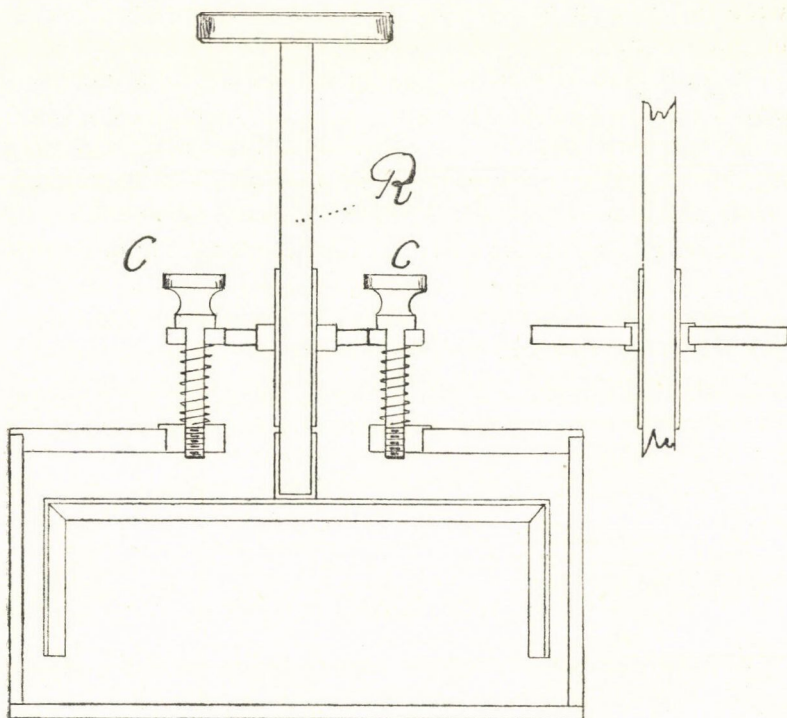
teljesen homogén és isotrop volt. Az üvegben megtett út minimumra redukálódott (a correctio Δ -ban tudvalevőleg a megtett úttal arányos) és a szekrényke készítési módja különben arra is garantiát nyújt, hogy falai jól hűtött üvegből készültek.

A szekrény alakját úgy választottam, hogy a beesési szög 60° legyen. A mérések előtt a xylollal megtöltött szekrényt kettős törésére vonatkozólag megvizsgáltam. A beeső fény lineárisan volt polározva és az áthaladt fényt mindig el lehetett



5b. ábra.

sötétíteni compensator nélkül pusztán az analysattorral, tehát észrevehető ellipticitás nem mutatkozott. A szekrény sárgaréz-ből készült tetején nyílás volt,* melyen keresztül egy R rúd, 5a ábra, nyúlt a szekrény belsejébe; erre volt erősítve a fémreteget hordó üveglemez. Az L üveglemez az R rúd körül, mint tengely körül forgatható volt és a fedőn lévő három C csavar segélyével be lehetett állítani úgy, hogy a lemez síkja párhuzamos legyen az üvegszekrény élével. A Δ -k és ϕ -k meghatározása egy Fuess-féle polarisációs spektrometeren történt. Compensator



a

5a. ábra.

gyanánt egy úgynevezett $\frac{1}{4}$ hullámhossz-csillámlemezt használtam. A fényforrásul használt NERNST-lámpa fényét egy HILGER-féle «állandó eltérítésű spektrométerrel» monochromatizáltam.

5. §. A rétegek vastagságának meghatározása.

A vastagságok meghatározása mérlegelés útján történt. A mérlegeléshez egy NEMETZ-féle mérleget használtam, melynek érzékenysége 20 gr. maximális megterhelés mellett 0.004 mgr. volt. A tárgylemezek felülete átlag körülbelül 20 cm² lévén, aranyánál és platinánál ez az érzékenység mintegy 0.1 $\mu\mu$, ezüstnél és palladiumnál 0.2 $\mu\mu$ rétegvastagságnak felelt meg. Az

összes mérlegelések a hőmérő, barometer és hygrometer leolvasása révén légüres térre redukáltattak.

A katodozás után lemért súlygyarapodásból tehát a réteg vastagsága 1—2 tized $\mu\mu$ -nyi pontossággal kiszámítható. E mellett fel kell tételezni természetesen: 1. hogy a fém sűrűsége vékony rétegekben is ugyanaz, mint tömör állapotában; továbbá 2. hogy a réteg vastagsága a réteg egész kiterjedésében ugyanaz.

Hogy az első feltétel úgy a katodporlasztás útján, mint chemiai úton készült átlátszó fémrétegek esetében is csakugyan ki van elégítve, azt HAGEN és RUBENS¹ mérései igazolják. A második feltétel kielégítéséről úgy történik gondoskodás, hogy a katodot a bevonandó felületnél tetemesen nagyobbobbnak választjuk. Végül még azt kívánom megemlíteni, hogy az üveglemezeket több órán át vacuumban hagyva, súlyuk semmiféle megváltozását sem tudtam konstatálni.

Ezek után áttérek eredményeim ismertetésére.

6. §. Platina.

Vékony platinarétegek fajlagos ellenállásának a réteg vastagságával való változását már PATTERSON² is vizsgálta és azt találta, hogy körülbelül 7 $\mu\mu$ -tól kezdve a rétegek fajlagos ellenállása rohamosan kezd nőni. A vastagabb rétegek (körülbelül 30-tól 100 $\mu\mu$ -ig) vastagságát a WIENER-féle interferenciális eljárással directe meghatározta, a vékonyabbakét pedig a katodozás idejéből számította.

PATTERSON vizsgálatainak eredményét többen kétségbevonták, így újabban A. RIEDE³ is a rétegek esetleges tökéletlen planparallelitásának tudja be a fajlagos ellenállás görbéjének hirtelen irányváltozását 7 $\mu\mu$ -nél. Ezzel szemben saját méréseim megerősítik PATTERSON eredményeit. Az általam készített rétegek vastagsága 1-től 26 $\mu\mu$ -ig terjedt, vagyis felöleli a kritikus

¹ HAGEN és RUBENS: Ann. d. Phys. (4) 8. 439. 1902.

² PATTERSON, l. c.

³ A. RIEDE, l. c.

vastagság ($7 \mu\mu$) környezetét. Méréseim eredményét az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat.

A réteg vastagsága	Ellenállás	Vastagság \times ellenállás
1.0 $\mu\mu$	∞	∞
0.9 "	540.000 Ohm	486.000 Ohm $\times \mu\mu$
1.2 "	45.000 "	54.000 "
1.9 "	9280 "	17.600 "
2.2 "	7790 "	17.160 "
2.6 "	5472 "	14.200 "
2.7 "	4500 "	12.160 "
4.0 "	2044 "	8.170 "
4.9 "	1139 "	5.580 "
6.1 "	378 "	2.310 "
6.6 "	239 "	1.580 "
7.0 "	147.8 "	1.036 "
11.7 "	92.0 "	1.075 "
16.9 "	76.1 "	1.280 "
26.1 "	40.7 "	1.062 "

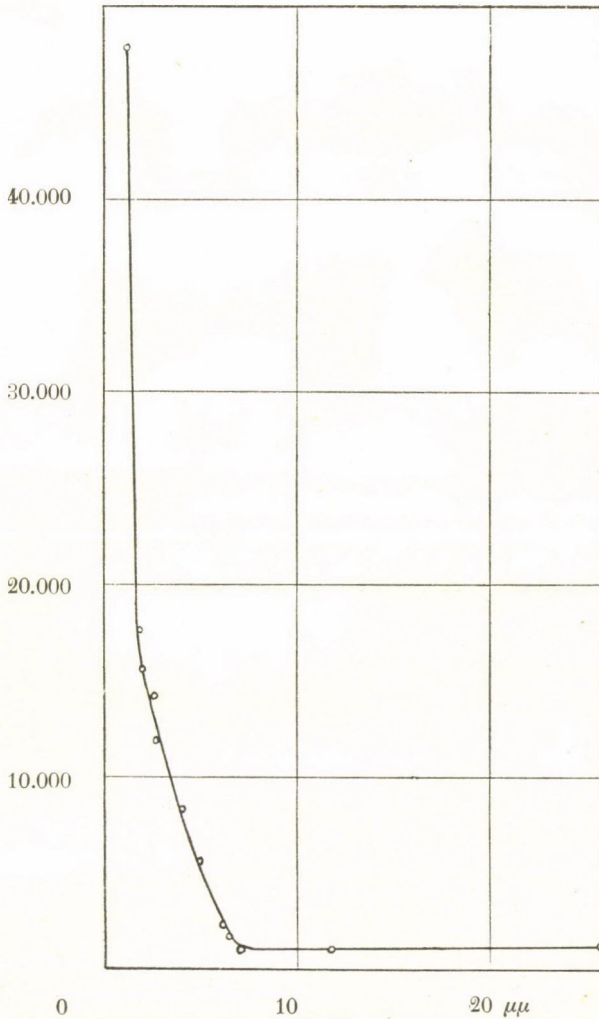
Ha a vastagságokat és ellenállásokat összeszorozzuk, oly mennyiségeket kapunk, melyek a rétegek specifikus ellenállásai-val arányosak. Ezek a szorzatok mint a vastagság függvényei a 6. ábrán láthatók.

Mint az ábra mutatja, a $7 \mu\mu$ -nél vékonyabb rétegek ellenállása rohamosan nő. Ez a görbe adta meg az impulsust, mint már a bevezetésben említettem, az optikai vizsgálatok megajtására. Ekkor még nem volt készen a LEYBOLD-czégnél megrendelt üres üvegprisma, úgy hogy n és k meghatározására FÖRSTERLING¹ régebbi formuláit használtam, melyek a platina-réteget két különböző átlátszó közeg (üveg és levegő) között lévőnek tételezik fel és melyekkel n és k egyedül az átment

¹ K. FÖRSTERLING: Gött. Nachr. 1911. 58. l.

fény polározási állapotából számítható ki. Az előzetes jelentésben közölt k és n értékei platinára ezekkel a képletekkel

$$50.000 \text{ Ohm} \times \mu \mu$$



6. ábra.

vannak kiszámítva. Ezekben a képletekben szerepel a réteg vastagsága is. Ez azonban nem lett volna baj, mert az elég

pontosan meghatározható. E képletek alkalmazásának főakadálya, hogy csak megközelítőleg érvényesek; nevezetesen, ha a réteg vastagsága oly kicsiny, hogy a $4\pi nc \frac{D}{\lambda}$ mennyiség abszolút értéke az egység mellett elhanyagolható; e mennyiségben:

λ a fény hullámhosszát, n az abszorbeáló fémréteg komplex törésmutatóját, c pedig a fémrétegben haladó nem állandó amplitudójú, inhomogen fényhullám komplex iránycosinusát jelenti.¹ Az itt tekintetbe jövő vastagságoknál ez a feltétel vagy nagyon rosszul, vagy egyáltalában nincs kielégítve. Mindazonáltal ezek a megközelítő képletek n és k -nak a réteg vastagságával való változását qualitative helyesen adták, mint az az előzetes jelentésemben közölt ábrákból látható, de a vastagabb rétegek n és k értékei numerikusan egyáltalán nem csatlakoztak a tömör, átlátszatlan tükrökön észlelt értékekhez. Ezért a platinarétegeim optikai állandóit a xylollal töltött prisma elkészülte után ennek segítségével újból meghatároztam. A 2. táblázatban az ily módon meghatározott értékeket közlöm. Az összes adatok $\lambda = 600 \mu\mu$ -re vonatkoznak.

2. táblázat.

A réteg vastagsága	n	$n \times k$
1.4 $\mu\mu$	3.45	0.99
2.6 „	3.17	2.35
4.9 „	2.65	2.89
7.0 „	2.25	2.92
11.7 „	2.16	3.00
16.8 „	2.10	3.02
26.0 „	2.04	3.00

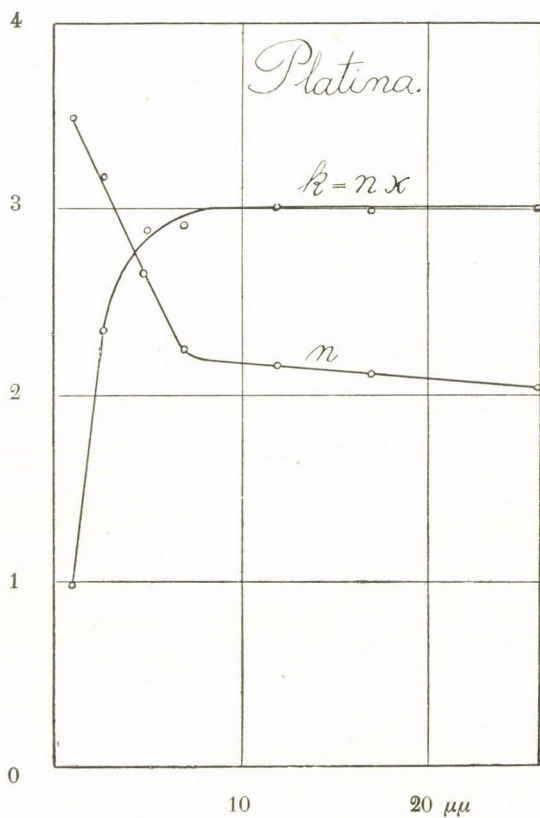
Mint a 7. ábrán látható, az én eredményeim N. GALLI² méréseivel szemben azt mutatják, hogy a vékony platinarétegek

¹ Lásd pl. W. VOIGT: Komp. d. theor. Phys. II. 730. 1.

² Lásd N. GALLI l. c.

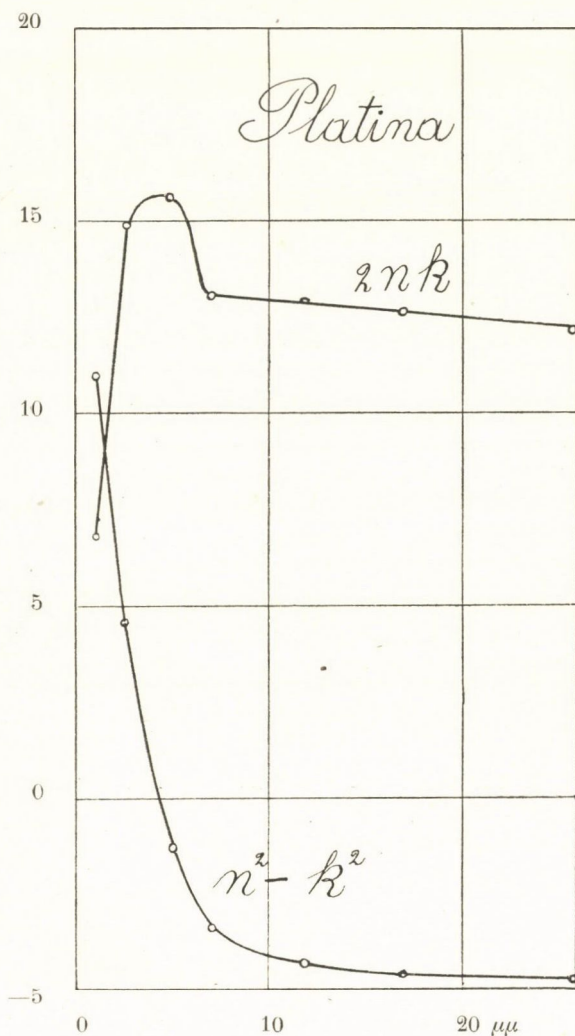
optikai állandói a rétegek vastagságával teljesen szabályszerűen változnak. A $2nk$ és $n^2 - k^2$ jellemző mennyiségek mint a vastagság függvényei a 8. ábrán láthatók.

Első pillantásra feltűnik, hogy az optikai állandók görbéinek szintén van egy-egy kritikus pontja; e pontnak meg-



7. ábra.

felelő réteg vastagsága körülbelül $7 \mu\mu$; ugyancsak $7 \mu\mu$ -nél volt a fajlagos ellenállás görbéjének a hirtelen irányváltozása. A $7 \mu\mu$ -nél vastagabb rétegek optikai állandói észrevehetően állandósulnak, a $7 \mu\mu$ -nél vékonyabb rétegek optikai állandói pedig tetemes változásokat mutatnak. A vastagabb rétegek törés-



8. ábra.

mutatója $n(=)2^1$ és absorptio-coëfficiense $k(=)3$ numerikusan is elég jól csatlakoznak a tömör tükrökön észlelt értékekhez.

MEIER² például egy platinatükroön, mely úgy készült, hogy egy

¹ (=) Körülbelül egyenlőt jelent.

² W. MEIER: Ann. d. Phys. 31. 1017. 1910.

aczéltükröt galvanikus úton platínával vastagon bevont, $n = 2.6$ -t és $k = 3.5$ -t észlelt. Ilyen rendű eltérések vannak azonban különböző megfigyelők (pl. DRUDE és MEIER) különböző származású tükrökön észlelt értékei között is. DRUDE¹ például egy tömör platinatükrön $n = 2.06$ és $k = 4.26$ -t észlelt.

$2nk$ -nak körülbelül $5 \mu\mu$ -nél van egy maximuma, $n^2 - k^2$ pedig monoton módon csökken. Egyes vékony rétegeken különböző hullámhosszúságú fényben végezve a méréseket, n és k dispersióját is meghatároztam a spektrum látható részében. A dispersio ugyanoly csekély volt, mint a tömör platínáé.

7. §. Palladium.

A palladiumrétegek készítése ugyanúgy történt, mint előzőleg a platinarétegeké. Külön kiemelem, hogy a katodozókészüléket az evakuálás után semmiféle gázzal, tehát hydrogennel sem öblítettem ki.

A palladiumkatodot a C. A. F. KAHLBAUM-czég szállította. Az első evakuálás tovább tartott, mint rendesen, mert a palladiumkatod használatbavétele előtt hosszabb ideig állt levegőn és sok gázt nyelt el.

Az említett viszonyok mellett a palladium körülbelül oly gyorsan rakódott le, mint a platina, és kifogástalan, minden hibától mentes tükröket kaptam.

A rétegek színe átmenő fényben a réteg vastagságának csökkenésével nem változott, csak sötétszürkéből világosabb szürkébe ment át. A palladiumrétegek vastagsága már nagyobb közre terjed ki, $3.6 \mu\mu$ -tól egészen $115 \mu\mu$ -ig, mert erre vonatkozólag eddig semmiféle eredmény sem volt ismeretes. Ezek a rétegek 1914 szept. 14.-én készültek és ellenállásukat 8 nap mulva mértem meg végérvényesen. A mérések eredménye a 3. táblázatba van foglalva.

¹ P. DRUDE: Ann. d. Phys. 39. 520. 1890.

3. táblázat.

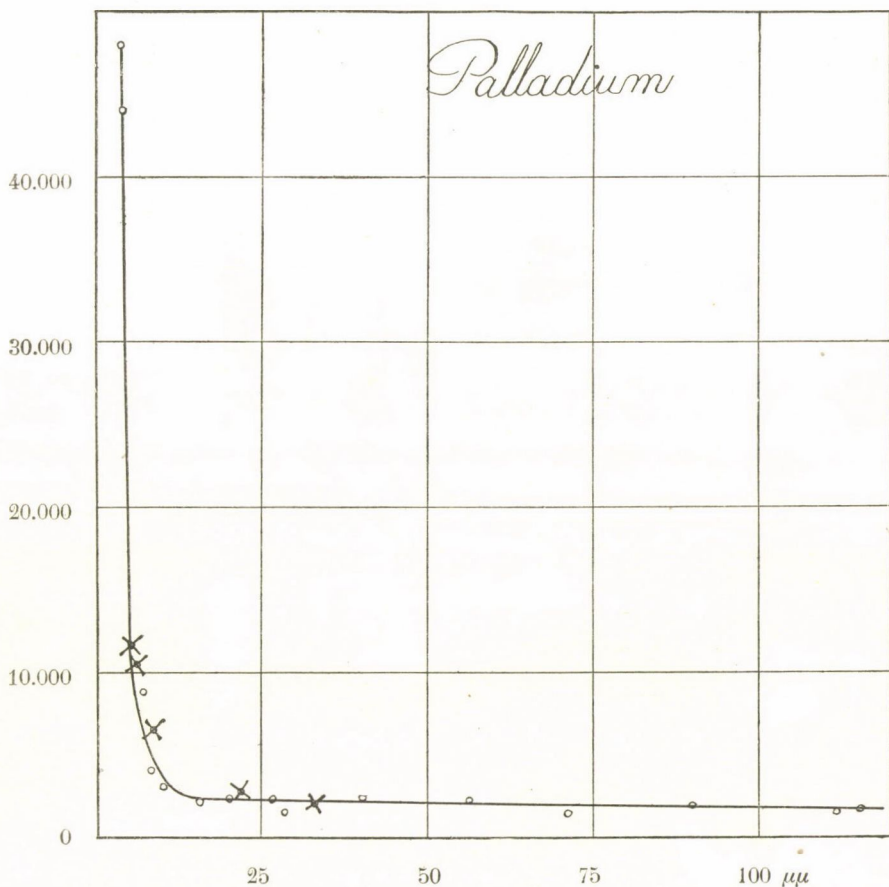
A réteg vastagsága	Ellenállás	Vastagság \times ellenállás
3.6 $\mu\mu$	13.280 Ohm	47.800 Ohm $\times \mu\mu$
4.0 "	11.200 "	44.800 "
7.0 "	1.260 "	8820 "
8.6 "	470 "	4040 "
10.1 "	305 "	3080 "
15.4 "	138 "	2125 "
20.3 "	120 "	2430 "
26.5 "	86.6 "	2290 "
28.7 "	50.1 "	1450 "
39.7 "	60.2 "	2380 "
56.3 "	38.6 "	2180 "
71.1 "	18.3 "	1300 "
89.7 "	21.2 "	1900 "
111.5 "	14.1 "	1570 "
115.0 "	14.6 "	1680 "

4. táblázat.

A réteg vastagsága	Ellenállás	Vastagság \times ellenállás
0.2 $\mu\mu$	∞	∞
0.4 "	∞	∞
1.7 "	∞	∞
3.1 "	115.000 Ohm	355.000 Ohm $\times \mu\mu$
5.1 "	2290 "	11.670 "
6.4 "	1640 "	10.490 "
9.6 "	673 "	6.480 "
22.0 "	127 "	2.800 "
33.1 "	59.8 "	1.980 "

A palladiumrétegek ellenállásának és vastagságának szorzata, mint a vastagság függvénye, a 9. ábrán] látható. Körülbelül 8–10 $\mu\mu$ -nyi vastagságnál kezd a specifikus ellenállás

50.000 Ohm $\times \mu\mu$



9. ábra.

rohamosabban nőni. 1915 júniusában a palladiumrétegek egy újabb sorozatát készítettem, most már azonban a kritikus vastagság környezetére szorítkoztam. Ezen az újabb sorozaton a rétegek elkészítése után egy héttel végzett ellenállásmérések eredményét a 4. táblázat tartalmazza.

A 4. táblázatnak megfelelő pontok ugyancsak a 9. ábrán \times -tel vannak feltüntetve. Látható, hogy nagyon jól illeszkednek az első sorozat mérési eredményeihez. A legvékonyabb, de még vezető rétegnek megfelelő pont (3.1, 355.000) helyszűke miatt már nem fért az ábrára.

Ezután a rétegek optikai állandóit határoztam meg sárga fényben ($\lambda = 600 \mu\mu$). Nem valamennyi rétegen végeztem el az optikai méréseket, hanem, úgy mint a platinánál történt, egyes rétegeket, hol a rétegek vastagságuk szempontjából sűrűbben következnek egymásra, kihagytam. Az első sorozaton végzett optikai mérések eredménye az 5. táblázatban van összeállítva.

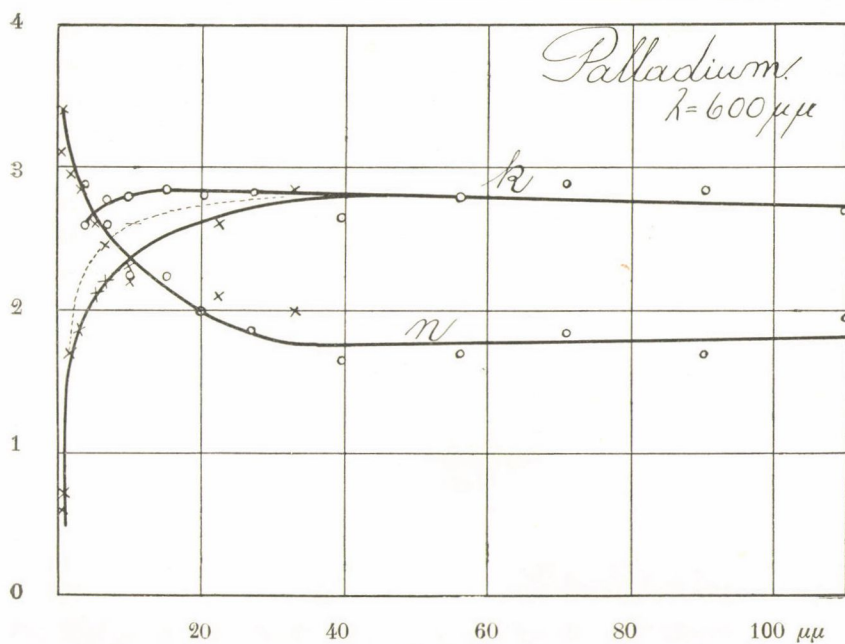
5. táblázat.

A réteg vastagsága	n	k
3.6 $\mu\mu$	2.91	2.57
7.0 „	2.61	2.72
10.1 „	2.25	2.80
15.4 „	2.22	2.85
20.3 „	2.00	2.81
26.5 „	1.85	2.83
39.7 „	1.65	2.64
56.3 „	1.70	2.78
71.1 „	1.86	2.90
89.7 „ *	1.72	2.85
111.5 „ *	1.95	2.70

Az 5. táblázatot a 10. ábra kis körökkel jelölt pontjai illusztrálják.

A *-gal jelölt rétegeken átmenő fényben polározási mérést végezni már nem lehetett. Ezek optikai állandóit DRUDE módszerével határoztam meg.

Látható, hogy a palladium törésmutatója és absorptio-coëfficiense ugyanolyan törvényszerűséggel változnak a vastagsággal, mint a platina optikai állandói. Teljessé válik a hasonlóság,



10 ábra.

ha figyelembe vesszük a rétegek második sorozatán végzett mérések eredményeit is, melyek a 6. táblázatban vannak össze-

6. táblázat.

A réteg vastagsága	n	k
0.2 $\mu\mu$	3.10	0.58
0.4 „	3.40	0.69
1.7 „	2.94	1.69
3.1 „	2.84	1.86
5.1 „	2.60	2.12
6.4 „	2.46	2.20
9.6 „	2.20	2.30
22.0 „	2.10	2.60
33.1 „	2.01	2.84

állítva, a 10. ábrán pedig kis keresztekkel lettek jelölve. Ezek a pontok a vékonyabb rétegek felé jelentékenyen kiegyesítik az első sorozat eredményeit feltüntető görbéket. Ott, ahol a görbék a vízszintes felé elhajlanak, a numerikus egyezés a két sorozat eredményei között különösen k -nál — sajnos — nem teljes, de a pontok szabályos egymásra következése arra enged következtetni, hogy nem mérési hibáról van szó, hanem ily rendű eltérések, úgy látszik, különböző rétegsorozatok között csakugyan előfordulnak. Az eltérő értékek számtani közepét a pontozott görbe mutatja.

A legvékonyabb rétegektől körülbelül $12\ \mu\mu$ -ig n erősen csökken, k pedig növekszik. Azontúl a vastagabb rétegek felé n és k értékei állandósulnak. Látható, hogy a vékony rétegek értékeinek csatlakozása a vastagabb, átlátszatlan rétegek értékeihez, melyeket a DRUDE-féle képletekkel számítottam ki, nagyon jó.

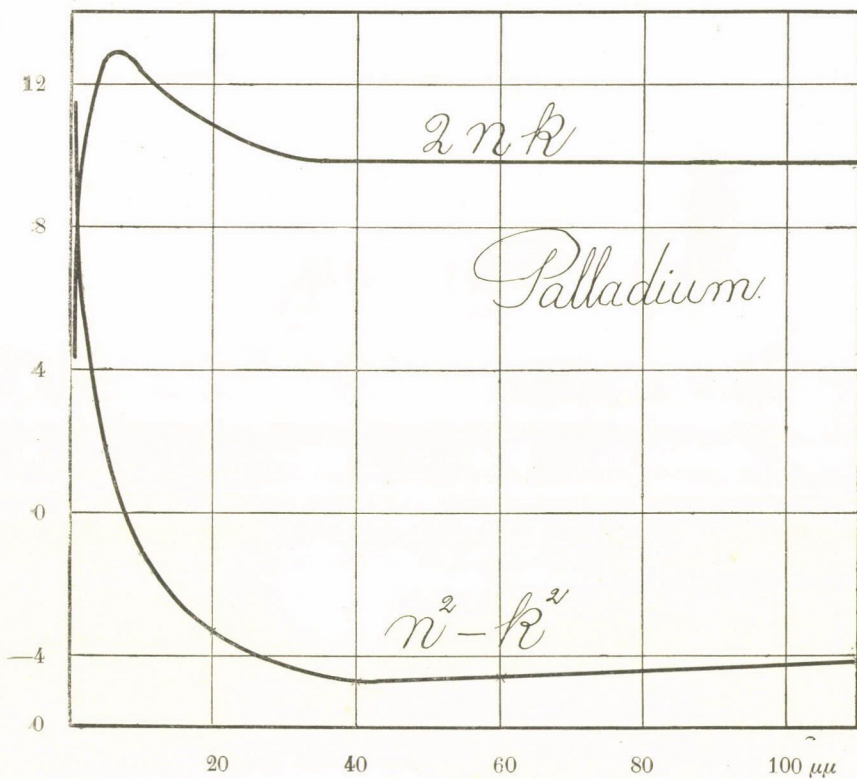
Tekintve, hogy tudomásom szerint a palladium törésmutatójának és absorptio-coefficiensének dispersiója mindeztől még sincsen meghatározva (VON WARTENBERG¹ egyetlen idevonatkozó észlelése szerint $\lambda = 579\ \mu\mu$ -nél $k = 3.41$ és $n = 1.62$), készítettem egy teljesen átlátszatlan, $232\ \mu\mu$ vastag palladiumtükrozt és ennek segélyével a spektrum jól látható részében, a visszavert fényben végzett polározási mérések alapján a DRUDE-féle képletekkel n -t és k -t meghatároztam. Az eredmények a következők:

7. táblázat.

λ	φ	n	k
700 $\mu\mu$	65°	2.05	2.86
650 „	65°	1.94	2.74
600 „	70°	1.92	2.52
	65°	1.84	2.60
550 „	65°	1.76	2.40
500 „	65°	1.74	2.16

¹ V. WARTENBERG, LANDOLT-BÖRNSTEIN: Tabellen, 4 Aufl. 965. 1.

φ a 7. táblázatban a beesési szöget jelenti. A csatlakozás a vastag, de még többé-kevésbé átlátszó rétegeken nyert eredményekhez jó, de tetemes eltérés mutatkozik v. WARTENBERG észleléséhez képest.



11. ábra.

Ez abban leli magyarázatát, hogy v. WARTENBERG észlelését tömör palladiumtükroön végezte, míg az enyém katodporlasztás útján készült. Ugyanily irányú és nagyságú eltérés van DRUDENAK a tömör platinán és MEIERNEK az elektrolytikus platinán nyert értékei között.

	n	k	λ
DRUDE ¹ tömör platina — — — — —	2·06	4·26	589 $\mu\mu$
MEIER ² elektrolitikus platina — — —	2·63	3·54	589 „

Mindkét esetben tehát a tömör tükrön nyert törésmutató kisebb, az absorptio-coëfficiens pedig nagyobb, mint az elektrolitikus úton vagy katodporlasztás útján készült egészen vastag, átlátszatlan tükrökön nyert megfelelő értékek.

A 10. ábra görbéi alapján megszerkesztettem azokat a görbéket, melyek $2nk$ és $n^2 - k^2$ -nak a rétegek vastagságával való változását ábrázolják. Ott, a hol az első és második sorozat k -görbéi egymástól eltérnek, a szerkesztést a pontozott görbe alapján végeztem. A 11. ábra mutatja, hogy $2nk$ a vékonyabb rétegektől a vastagabbak felé haladva, egy jól kifejtett maximum után állandósul, $n^2 - k^2$ pedig szinte monoton módon csökken és egy alig észrevehető minimum után vesz fel állandó értéket. A görbék általános habitusa teljesen ugyanaz, mint a platinánál, sőt a két fém rokonsága szinte numerikus egyezésben nyilvánul meg.

8. §. Arany.

A platinával és palladiummal szemben az arany úgynevezett színes fém. Absorptio-coëfficiense a spektrum látható részében az ibolyától a vörösre körülbelül 1·8-ről 3·2-ig növekszik, a minek következtében az arany visszavert fényben sárgás-vöröses színű. Átlátszó aranyrétegek átmenő fényben ennek megfelelően zöldek. Az egészen vékony rétegek tanulmányozása itt nagyon érdekesnek ígérkezett.

A háborús viszonyok között nem tudtam a 26×76 mm nagyságú üveglemezek bevonására elegendő nagyságú aranykatodot szerezni. Ezért egy az intézetben már meglévő kisebb katodot használtam. Hogy a rétegek homogén vastagságúak legyenek, a tárgylemezeket kettévágtam úgy, hogy az aranyrétegeim nagysága 26×38 mm volt. Az aranyrétegek készítése minden nehézség nélkül folyt le és nagyon szép tükröket nyertem. A rétegek vastagsága $1\cdot0 \mu\mu$ -tól $113\cdot2 \mu\mu$ -ig terjedt. Átmenő fényben az

¹ DRUDE, l. c.

² MEIER, l. c.

átlátszó rétegek le egészen körülbelül 6—7 $\mu\mu$ -ig mindinkább világosodó olajzöldszínűek voltak. Innen kezdve 1 $\mu\mu$ -ig átmenő fényben a következő színek következtek egymásra: smaragdzöld, zöldeskék vagy pávakék, égszínkék, lila, rózsaszín. Ezt a színskálát nem egyenletes vastagságú, ékalakú rétegeken is észleltem, ugyancsak tapasztalta ezt N. GALLI¹ is. A rétegek vastagságának meghatározása után körülbelül egy héttel mértem elektromos ellenállásukat és a következő eredményeket nyertem:

8. táblázat.

A réteg vastagsága	Ellenállás	Vastagság \times ellenállás
1.0 $\mu\mu$	∞	∞ Ohm $\times \mu\mu$
1.5 "	∞	∞ "
3.4 "	134.000 Ohm	455.000 "
4.8 "	91.000 "	436.000 "
6.5 "	84 "	546 "
6.7 "	54 "	362 "
7.2 "	50 "	360 "
9.2 »	27.5 "	253 "
12.0 "	10.9 "	130.8 "
17.3 "	7.07 "	122.0 "
23.1 "	5.32 "	123 "
28.6 "	4.86 "	139 "
30.9 "	5.00 "	154 "
31.9 "	4.03 "	128 "
32.2 "	4.23 "	136 "
39.5 "	4.22 "	167 "
43.7 "	3.13 "	136 "
50.3 "	2.57 "	129 "
69.2 "	2.14 "	148 "
72.6 "	1.67 "	121 "
95.5 "	1.18 "	112 "
113.2 "	1.02 "	115 "

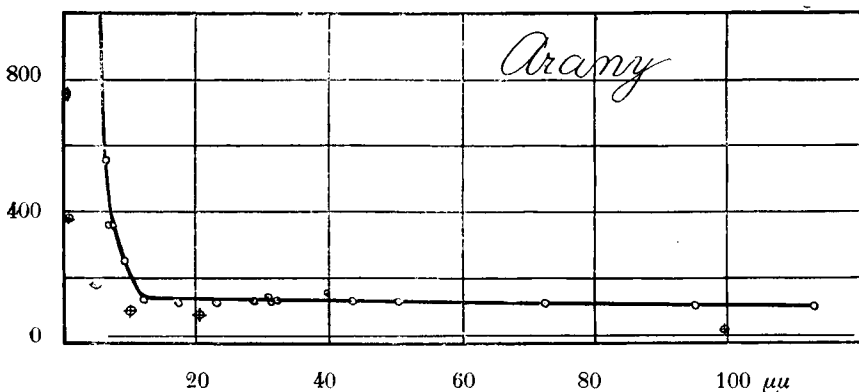
¹ N. GALLI: Diss. Göttingen 1913.

A rétegek ellenállásainak és vastagságainak szorzatát mint a réteg vastagságának függvényét felrajzolva, a 12. ábrán látható görbét nyerjük.

A kritikus pont, melynél az ellenállás rohamosan kezd nőni, körülbelül $12\ \mu\mu$ -nél van. A legvékonyabb lemezeknek megfelelő pontok már nem értek az ábrára.

Ezek után a rétegek optikai állandóit határoztam meg, még pedig tekintettel azoknak a látható spektrumban jelentkező nagy dispersiójára, három különböző hullámhossznál, $\lambda = 500$,

Ohm $\times \mu\mu$



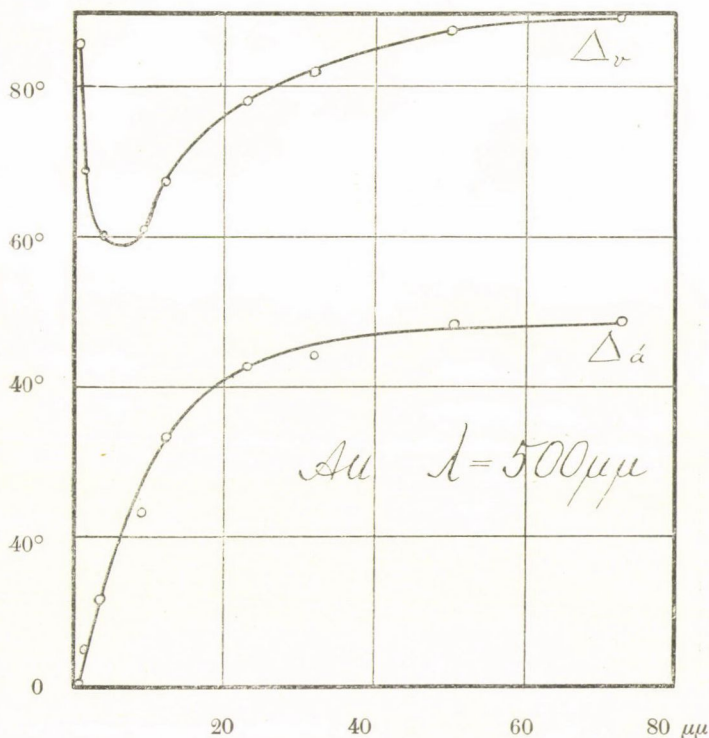
12. ábra.

600 és $700\ \mu\mu$ -nél. A viszonyok az aranyrétegeknél már most olyanok, hogy a xylolprisma által megszabott beesési szög, $\varphi = 60^\circ$, éppen a legvékonyabb, $1\ \mu\mu$ vastag aranyrétegnek $\lambda = 600\ \mu\mu$ -re, vagyis sárga fényre és xylolra vonatkoztatott fő beesési szögével, $\bar{\varphi}$ -sal egyenlő. Vagyis $\bar{\varphi} = 60^\circ$ mellett a xylolba merített ezen az aranyrétegen visszavert sárga fényben a beesés síkjával párhuzamos és arra merőleges componensek közötti fáziskülönbség éppen 90° .

Ennek következtében a Δ_o és Δ_a directe észlelt mennyiségeknek a rétegek vastagságával járó változását előtűntető görbék nagyon érdekesen alakulnak. Ezért a következőkben in extenso közlöm az aranyrétegeken végzett méréseim eredményeit, annál is inkább, mert ezek kapcsán alkalmam lesz

reámutatni arra a körülményre, hogy itt megvalósulva vannak oly esetek, a melyekben a FÖRSTERLING-féle¹ megközelítő képletek is egészen jól használhatók az optikai állandók kiszámítására. Δ_v , Δ_a , ψ_v és ψ_a értékei a 9. táblázatban vannak összeállítva.

A 9. táblázat adatai alapján rajzoltam meg a 13., 14. és 15. ábrát.



13. ábra.

Az ábrákon látható, hogy a visszavert fényben észlelt Δ_v phasiskülönbségek görbéinek minimuma van, mely annál mélyebb és annál inkább tolódik el a vékonyabb rétegek felé, minél nagyobb hullámhosszúságú fényről van szó.

Δ_v értéke sárga fényben és $1 \mu\mu$ -nyi rétegvastagságnál éppen

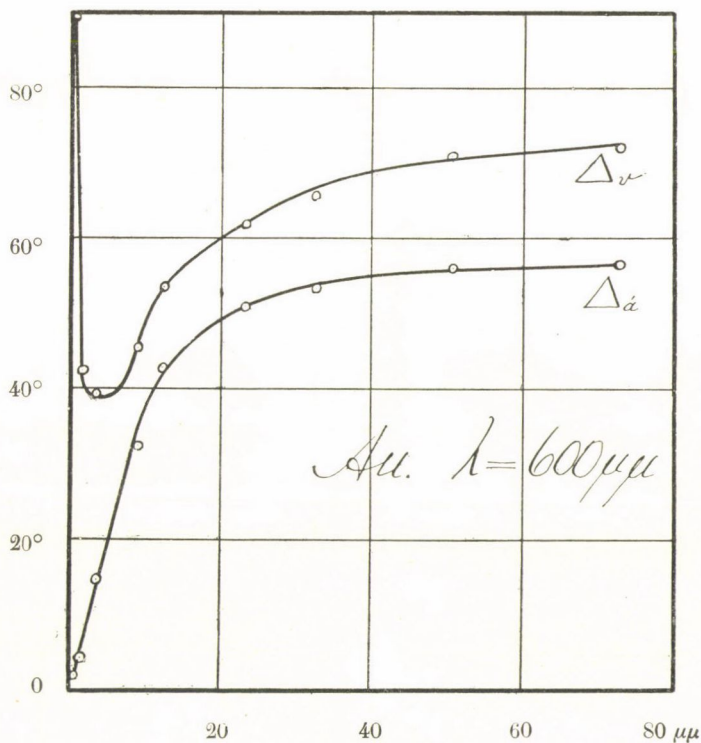
¹ FÖRSTERLING: Gött. Nachr. 1911. 62. l.

9. táblázat.

A beesés szöge, $\varphi = 60^\circ$.

A rétegek vastagsága	$\lambda=500 \mu\mu$				$\lambda=600 \mu\mu$				$\lambda=700 \mu\mu$			
	Δv	$\Delta \dot{a}$	ψv	$\psi \dot{a}$	Δv	$\Delta \dot{a}$	ψv	$\psi \dot{a}$	Δv	$\Delta \dot{a}$	ψv	$\psi \dot{a}$
1.0 $\mu\mu$	93° 30'	0° 00'	16° 4'	46° 39'	90° 00'	2° 15'	13° 28'	46° 11'	—	—	—	—
1.5 «	68° 58'	5° 3'	25° 4'	47° 43'	42° 37'	3° 57'	19° 52'	50° 57'	28° 3'	0° 00'	14° 52'	51° 25'
3.4 «	60° 12'	11° 35'	29° 15'	48° 54'	39° 33'	14° 40'	25° 23'	52° 37'	33° 49'	12° 23'	24° 10'	55° 4'
9.2 «	61° 15'	22° 54'	32° 28'	50° 4'	45° 32'	32° 31'	30° 56'	54° 37'	45° 2'	33° 18'	30° 8'	58° 20'
12.0 «	67° 27'	32° 54'	34° 47'	51° 56'	53° 20'	42° 30'	34° 18'	58° 23'	47° 35'	40° 50'	34° 25'	63° 3'
23.1 «	78° 24'	42° 42'	35° 56'	52° 33'	62° 1'	50° 55'	38° 50'	61° 56'	54° 6'	46° 58'	39° 42'	64° 48'
32.2 «	81° 52'	44° 00'	35° 37'	52° 17'	65° 16'	53° 22'	40° 3'	62° 10'	56° 26'	47° 5'	41° 19'	64° 58'
50.3 «	87° 52'	48° 13'	34° 58'	51° 1'	71° 7'	56° 6'	40° 53'	62° 37'	58° 52'	48° 12'	42° 27'	64° 46'
72.6 «	89° 29'	48° 39'	34° 32'	51° 00'	72° 10'	56° 45'	41° 31'	62° 50'	—	—	—	—
* 113.2 «	105° 31'	—	33° 42'	—	121° 11'	—	41° 58'	—	132° 26'	—	43° 29'	—
113.2 levegőn	* $\varphi=70^\circ$ -nál				91° 20'		42° 10'					

eléri a 90° -ot. Érdekes, hogy már egy $1\ \mu\mu$ -nyi vastagságú aranyréteg a reflektált fényben egy negyedhullámhossznyi fáziskülönbséget létesít. A mi már most a FÖRSTERLING-féle közelítő képleteket illeti, azok a következők:



14. ábra.

$$\operatorname{tg}^2 \psi_v = \cos^4 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{(n^2 + k^2)^2} \{ \sin^2 \varphi - 2(n^2 - k^2) \cos^2 \varphi \} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \Delta_v = - \frac{2nk \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (n^2 + k^2)^2 - \sin^2 \varphi (n^2 - k^2)}, \quad (9)$$

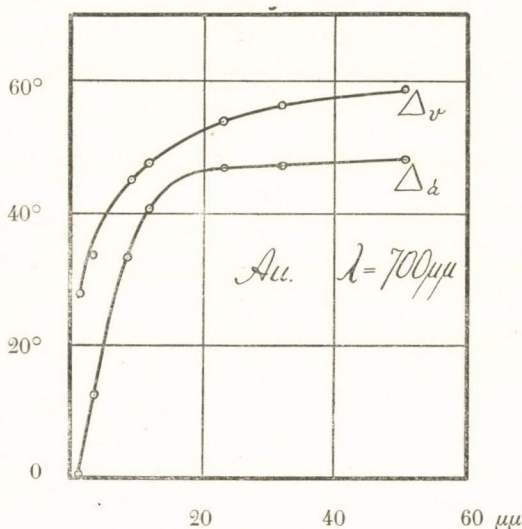
a hol n és k a xylolba mártott aranyrétegnek a xylolra vonatkoztatott törésmutatója és absorptio-coëfficiense, φ pedig a be-esési szög.

Ha már most $\varphi = \bar{\varphi}$ -sal, a főbeesési szöggel, akkor $\Delta_v = \frac{\pi}{2}$, tehát lesz:

$$\cotg^2 \bar{\varphi} = \frac{n^2 - k^2}{(n^2 + k^2)^2}, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \phi_v = \frac{2 \sin^2 \varphi n k}{(n^2 + k^2)^2}. \quad (11)$$

Azonban a (4) alatti szigorú képletek ugyancsak a (10), illetve (11) alatti képletté degenerálnak a fő beesési szögnél,



15. ábra.

hacsak a rétegek elég vékonyak. Ekkor ugyanis $\Delta_v = 90^\circ$, Δ_d közel zérus, ϕ_d pedig közel 45° úgy, hogy (3)-ból

$$\operatorname{tg} \phi_v = \operatorname{tg} \phi \quad \text{és} \quad \Delta_v = \Delta = 90^\circ,$$

mikor is a (4) egyenletek átmennek (10) és (11)-be.

Ezek a feltételek már most mind ki vannak elégítve az $1 \mu\mu$ vastagságú rétegen $\lambda = 600 \mu\mu$ hullámhosszúságú fényben, minthogy az ábrák szerint itt $\Delta_v = 90^\circ$, $\Delta_d = 2^\circ 15'$, ϕ_d pedig egyenlő $46^\circ 11'$ -cel. Az adott esetben tehát a közelítő képletek alapján, a főbeesési szög felkeresése mellett, egyedül a vissza-

vert fény ismert, 90° -nyi fáziskülönbségének kompenzálása után keletkező lineáris fény azimutjából n és k kiszámítható. Azt mondhatjuk tehát, hogy ez az eljárás aránynál néhány $\mu\mu$ -nyi vastag rétegeken megengedhető. E közelítő képletek használhatósága azonban a rétegek vastagodásával hamar megszűnik. Mert mint a 14. ábra és a 9. táblázat mutatja, Δ_a és $\phi_a - 45^\circ$ elég hamar, 3–4 $\mu\mu$ -nél már el nem hanyagolható értékeket vesz fel.

A (10) és (11) közelítő képletek használhatóságának egy felső határához különben ama meggondolás alapján is juthatunk, hogy (10) mindenestre érvényét veszti oly vastagságoknál, hol már $n < k$. Ez pedig a 16. ábra tanúsága szerint már körülbelül 1–4 $\mu\mu$ -nél bekövetkezik.

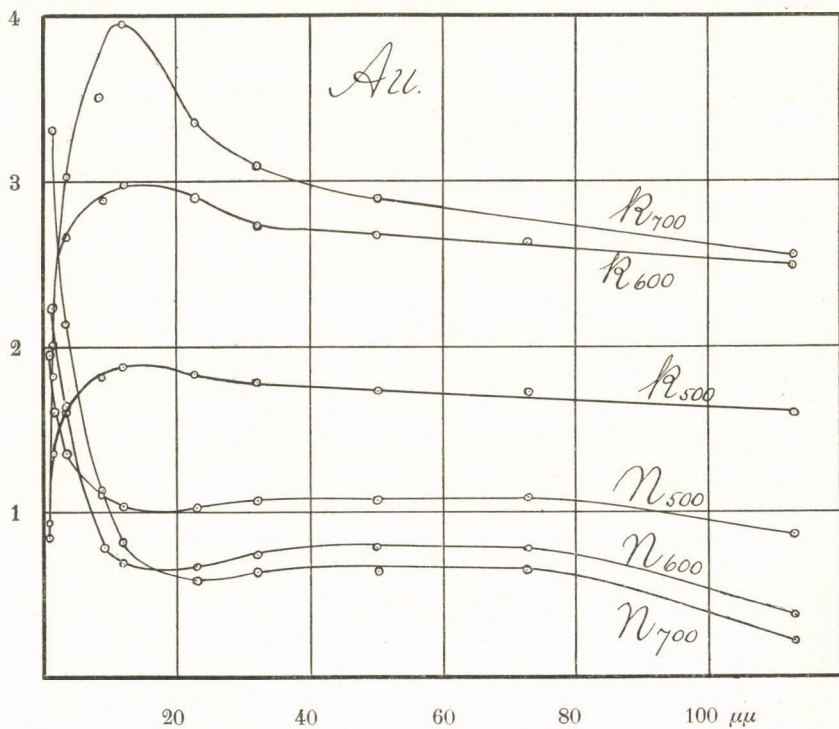
A 9. táblázat adatai alapján kiszámított törésmutatók és absorptio-oefficiensek értékei a 10. táblázatban foglaltatnak. A legvastagabb, a táblázatban \star -gal jelölt réteg állandóit a DRUDE-féle képletekkel csak a visszavert fény polározása alapján számítottam ki, mivel ez a réteg már oly vastag volt, hogy átmenő fényben észlelni nem lehetett. Mint látható, ezek az értékek is, különösen k értékei elég jól csatlakoznak a vékony lemezekre észleltekhöz.

10. táblázat.

A rétegek vastagsága	$\lambda=500 \mu\mu$		$\lambda=600 \mu\mu$		$\lambda=700 \mu\mu$	
	n	k	n	k	n	k
1.0 $\mu\mu$	1.96	0.90	2.09	0.84	—	—
1.5 „	1.59	1.35	2.25	2.01	3.31	1.82
3.4 „	1.34	1.64	1.63	2.68	2.14	3.04
9.2 „	1.12	1.81	0.77	2.88	1.13	3.51
12.0 „	1.03	1.88	0.68	2.98	0.81	3.96
23.1 „	1.02	1.83	0.66	2.90	0.58	3.36
32.2 „	1.06	1.79	0.73	2.74	0.63	3.10
50.3 „	1.06	1.74	0.77	2.68	0.63	2.91
72.6 „	1.09	1.72	0.77	2.64	—	—
113.2 „ \star	0.85	1.65	0.35	2.49	0.20	2.56

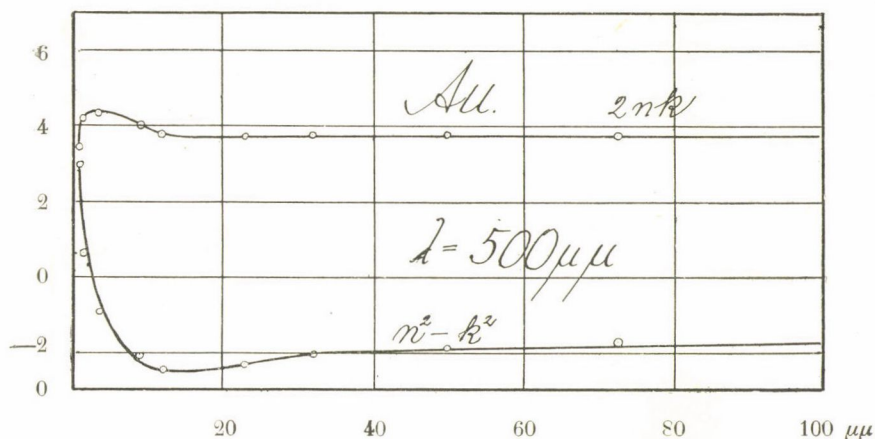
Vörös fényben elmaradt az $1\ \mu\mu$ és $72\cdot6\ \mu\mu$ vastag rétegek észlelése; az előbbi azért, mert visszavert fényben, az utóbbi mert átmenő fényben a gyenge intensitás miatt a polározás meghatározása nem volt lehetséges.

A törésmutatók és az absorptio-coefficiensek, mint a vastagság függvényei, a 16. ábrán láthatók. Az n -görbék egészen úgy

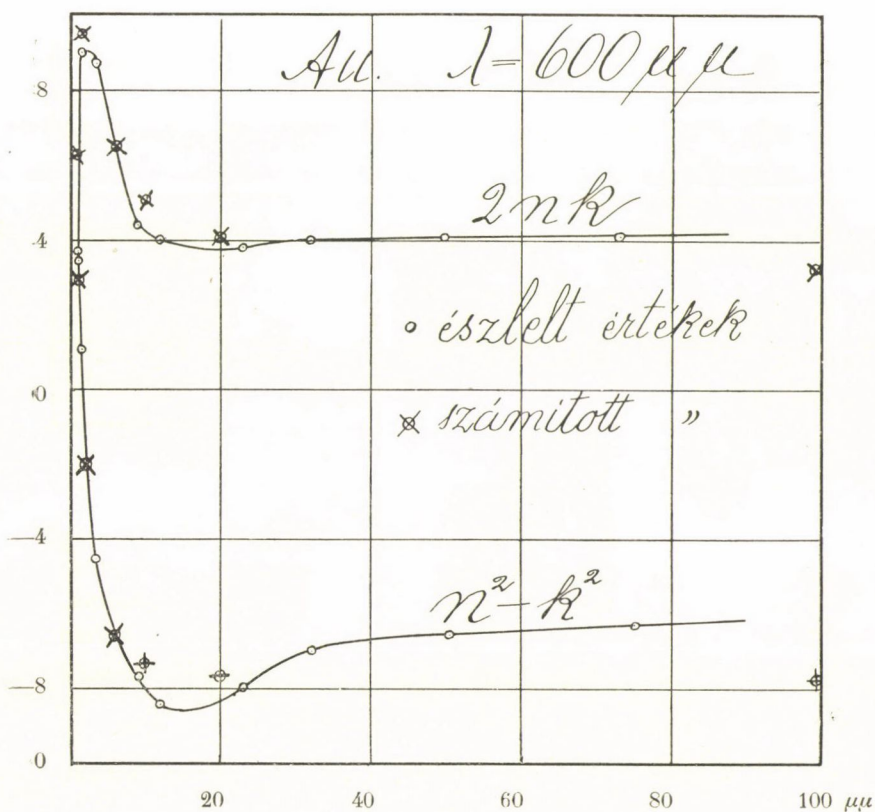


16. ábra.

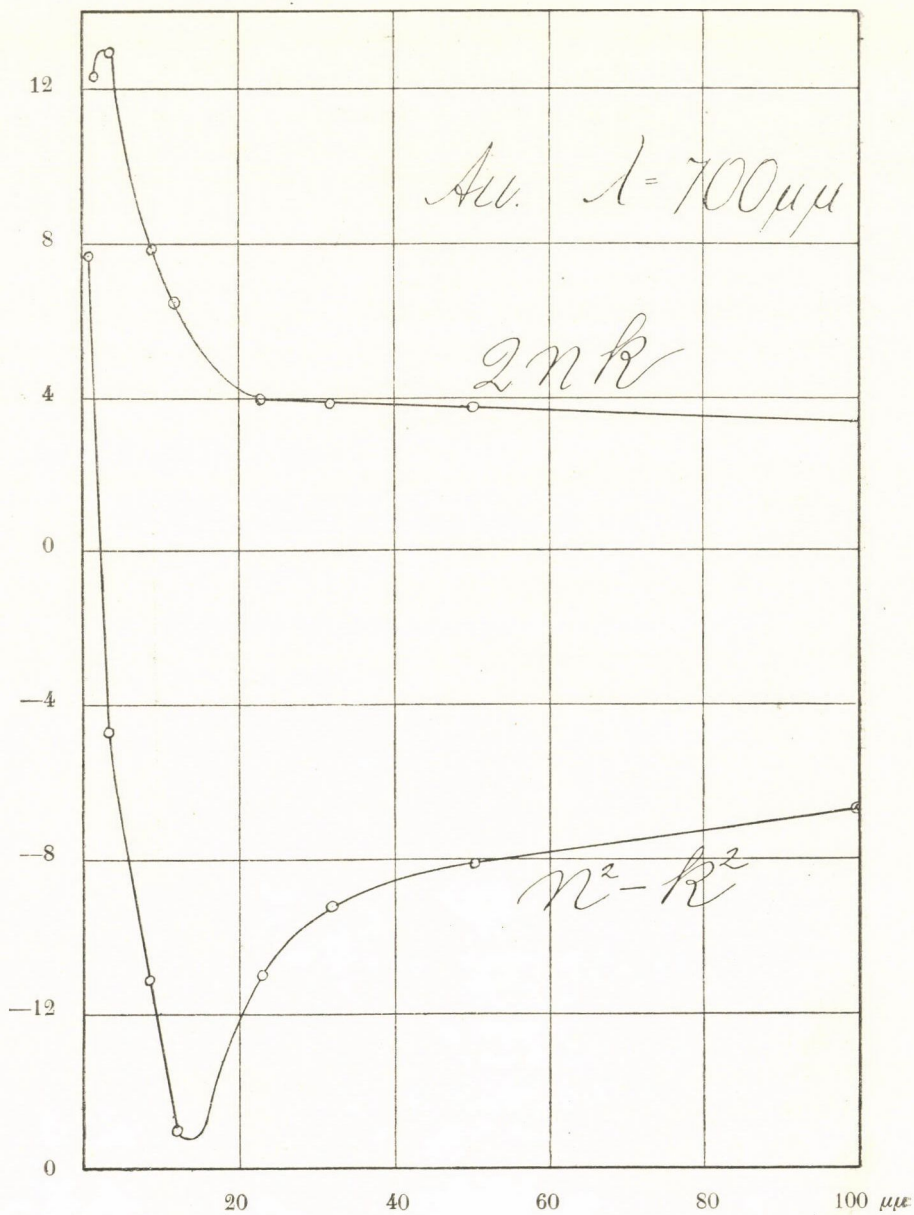
viselkednek, mint platinánál vagy palladiumnál. A k -görbék azonban eltérnek annyiban, hogy nem monoton módon növekszenek, mint platinánál, hanem egy maximumot vesznek fel és azután állandósulnak. A tömör arany, valamint a vastagabb rétegek dispersiója a spektrum látható részében normalis, vagyis $\frac{dn}{d\lambda}$ negatív; a vékony ($< 6\ \mu\mu$) rétegek, mint a 16. ábrán látható,



17. ábra.



18. ábra.

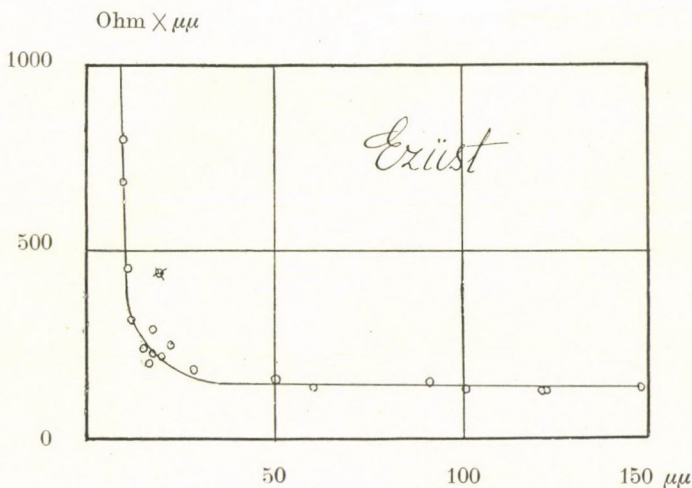


19. ábra.

a hol az n -görbék körülbelül $6-7 \mu\mu$ -nél metszik egymást, anomális dispersiót mutatnak. A $2nk$ változását feltüntető görbék (17., 18. és 19. ábra) habitusa teljesen olyan, mint a platina és palladium esetében láttuk, de egészen új dolog az n^2-k^2 görbék éles minimuma. Ez a k -görbék maximumára vezethető vissza.

9. §. Ezüst.

Vékony ezüstretegek ellenállását többen mérték. A régebbi mérések folyamán főleg az ezüstretegek ellenállásainak különböző behatások, melegítés stb. folytán előálló megváltozását vizsgálták. Az ellenállást mint a rétegvastagság függvényét G. VINCENT¹ és legújabbban A. RIEDE² mérte, azonban mérésekük



20. ábra.

csak 38, illetve $40 \mu\mu$ -nél vastagabb rétegekre vonatkozik; a mi szempontunkból érdekes zónát azonban elsősorban éppen az ennél is vékonyabb rétegek alkotják. Méréseim eredményét a 11. táblázatban állítottam össze.

Feltűnő, hogy ellentétben platinával stb., aránylag elég

¹ G. VINCENT, l. c.

² A. RIEDE: Ann. d. Phys. 45. 881. l. 1914.

11. táblázat.

A rétegek vastagsága	Ellenállás	Ohm $\times \mu\mu$
2.3 $\mu\mu$	∞	∞
3.6 „	∞	∞
4.9 „	∞	∞
6.6 „	2058.0 Ohm	13.600 Ohm $\times \mu\mu$
9.5 „	83.90 „	800 „
9.2 „	73.90 „	680 „
11.0 „	40.65 „	446 „
11.7 „	27.00 „	315 „
14.8 „	16.20 „	240 „
16.3 „	12.02 „	197 „
16.8 „	13.70 „	230 „
17.3 „	16.84 „	292 „
19.6 „	22.53 „	442 „
19.8 „	10.95 „	217 „
22.1 „	11.28 „	250 „
28.2 „	6.48 „	183 „
48.7 „	3.16 „	154 „
60.2 „	2.27 „	136 „
91.5 „	1.64 „	150 „
101.3 „	1.31 „	132 „
132.2 „	0.965 „	128 „
133.3 „	0.968 „	129 „
153.2 „	0.863 „	132 „

vastag ezüstrétegek egyáltalában nem vezették az áramot. A fajlagos ellenállás görbéje (20. ábra) körülbelül 15 $\mu\mu$ -nél kezd erősen felfelé hajolni. A legvékonyabb réteg fajlagos vezetőképessége $\sigma = 0.0178 \cdot 10^5$, a legvastagabb rétegeké $\sigma = 1.83 \cdot 10^5$. A tömör ezüst fajlagos vezetőképessége ezen a hőmérsékleten körülbelül $6.14 \cdot 10^5$. RIEDE¹ 100 $\mu\mu$ -nél chemiai úton készült rétegein körülbelül $2.6 \cdot 10^5$ -t észlelt. A vastag rétegek fajlagos

¹ A. RIEDE, l. c.

vezetőképességének közeli egyezése nálam és RIEDENÉL arra mutat, hogy a vezetőképesség valóban csak a vastagság függvénye és független a rétegek készítésének módjától.

Az optikai állandókat $\lambda = 600 \mu\mu$ -re vonatkozólag a következő táblázatban állítottam össze:

12. táblázat.

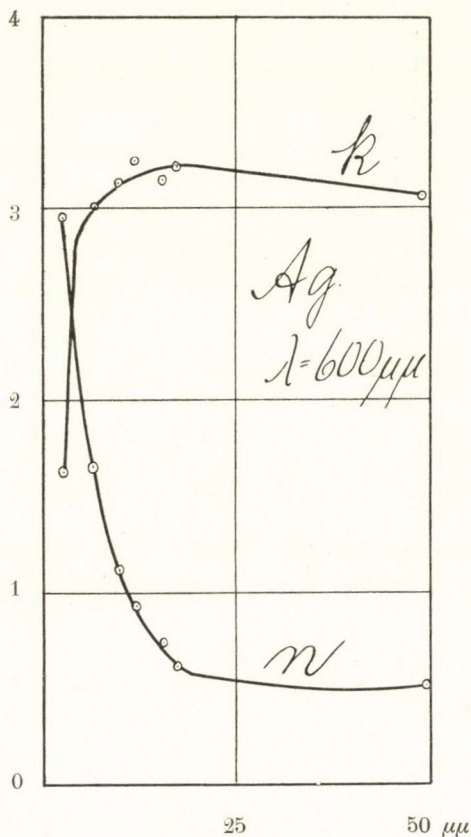
A réteg vastagsága	n	k
2.3 $\mu\mu$	2.95	1.60
6.6 „	1.65	3.00
9.5 „	1.11	3.12
11.5 „	0.91	3.26
14.8 „	0.73	3.13
16.8 „	0.58	3.21
48.7 „	0.50	3.05

Felrajzolva n -t és k -t, valamint $2nk$ -t és $n^2 - k^2$ -t, mint a vastagság függvényeit (21. és 22. ábrák), ugyanazokat a görbéket nyerjük, mint az előbbi fémeknél. H. FRITZE¹ a bevezetésben említett dolgozatában sokkal több ezüstrétegen, mint a mennyit az én optikai méréseim felölelnek, határozta meg n -t és k -t 622, 546 és 436 $\mu\mu$ hullámhosszúságú fényben. A rétegek vastagodásával mindhárom színben n csökken, k pedig növekszik ugyanúgy, mint nálam. A törésmutató általam észlelt értékei jól beilleszkednek az általa észlelt értékek közé; k értékei azonban nálam nagyobbak és sokkal hamarabb állandósulnak, mint H. FRITZE értékei. A tömör ezüst értékei R. S. MINOR² szerint $\lambda = 589 \mu\mu$ -nél $n = 0.17$, $k = 3.63$. Egy vékony, 19.8 $\mu\mu$ -os rétegen különböző színű fényben végzett észleléseim szerint $\lambda = 450 \mu\mu$ -tól $\lambda = 650 \mu\mu$ -ig a vékony ezüstréteg dispersiója épp úgy anomális, mint a tömör ezüsté. Ugyanezt észlelte FRITZE is.

¹ H. FRITZE: Ann. d. Phys. 47. 763. I. 1915.

² R. S. MINOR: Ann. d. Phys. 10. 581. I. 1903.

Fontos FRITZE vizsgálataiban, hogy kiterjeszkedett úgy katodporlasztás útján, mint pedig chemiai úton készült rétegekre



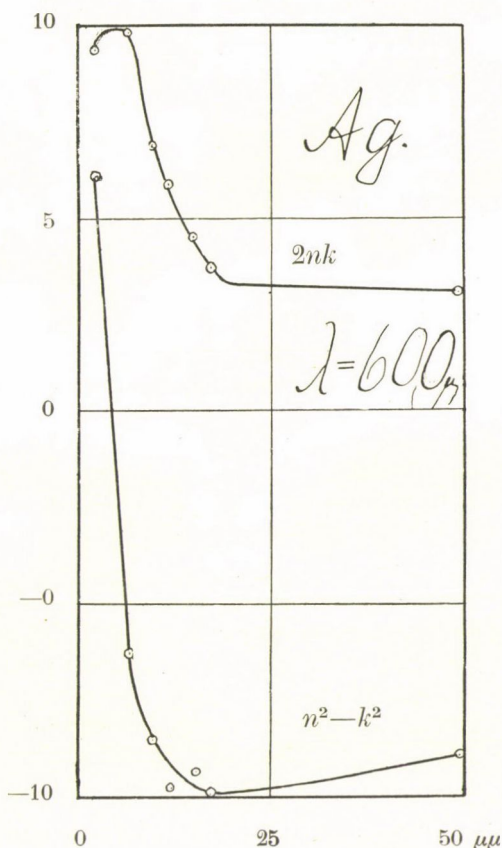
21. ábra.

és így igazolta, hogy vékony rétegeken n és k valóban csak a vastagság függvényei és függetlenek a rétegek készítési módjától.

10. §. A fajlagos ellenállás változása és az optikai állandók változása közötti összefüggés.

1. A vékony rétegek fajlagos ellenállásának a rétegek vékonyodásával járó megváltozására vonatkozólag, mint láttuk,

a kísérletek mind a négy megvizsgált fémen arra az eredményre vezettek, hogy létezik oly vastagság, melynél vé-



22. ábra.

konyabb rétegek fajlagos ellenállása a rétegek vékonyodásával rohamosan nő, melynél vastagabb rétegek fajlagos ellenállása viszont a rétegek vastagodásával már csak kevésbé változik és lassan közeledik a tömör fém fajlagos ellenállásának értékéhez. A fajlagos ellenállás görbéje, mint a vastagság függvénye ugyanis a kísérleti hibák határain belül körülbelül oly formájú, mint egy egyenszáru hyperbola. A kritikus vastagságokon túl is, bár nagyon lassan, de még csökken; ez különösen az arany- és

ezüstrétegeken jól látható. Az ábrákba a tömör fém fajlagos ellenállása alapján berajzoltam a horizontalis egyenest, mely felé a hyperbola asymptotikusan közeledik.

Mint már említettem, PATTERSON,¹ ki vékony platinarétegek fajlagos ellenállását mérte, konstataálta a kritikus vastagság létezését és azt találta, hogy az platinán körülbelül $7\ \mu\mu$. Saját méréseim ezt az eredményt teljesen igazolják. Méréseim szerint a platina kritikus vastagsága körülbelül $7\ \mu\mu$, a palladiumé $9\text{--}10\ \mu\mu$, az aranyé $10\ \mu\mu$ és az ezüsté körülbelül $15\ \mu\mu$.

Ezek a vastagságok a 6., 9., 12. és 20. ábra alapján is egyszerűen konstataálhatók, de a megfelelő 1., 3., 4., 8. és 11. táblázatból is kiolvashatók, ha alapul véve a legvastagabb rétegek fajlagos ellenállását, mely e vastagságoknál már csak *lassan* csökken, keressük a rétegeknek azt a vastagságát, melynél a fajlagos ellenállás a vastag rétegek fajlagos ellenállásának körülbelül 2—3-szorosa.

VINCENT, ki ezüstrétegek fajlagos ellenállását mérte, egy $50\ \mu\mu$ vastag úgynevezett «couche de passage»-t konstataált mérései alapján. Felrajzolta ugyanis rétegei vezetőképességét mint a vastagság függvényét; e pontok nagyon jó közelítésben egy egyenesen feküdtek a vastagabb rétegektől kezdve le egészen $50\ \mu\mu$ -ig.

A vékonyabb ($38\ \mu\mu$ -tól $50\ \mu\mu$ -ig) rétegek vezetőképességének megfelelő pontok ebből az egyenesből már észrevehetően kiestek.

Ebből VINCENT azt következteti, hogy a tömör ezüstréteget két felületi réteg borítja, melyek vastagságának összege $50\ \mu\mu$ és melyek physikai tulajdonságaikban eltérnek a tömör ezüstitől. Itt csak azt kívánom konstataálni, hogy a VINCENT által meghatározott vastagság per definitionem nem azonos a PATTERSON által és általam észlelt kritikus vastagsággal.

A. RIEDE vékony ezüst-, platina-, réz- és nikkel-rétegek vezetőképességét vizsgálta. A legvékonyabb rétegek vastagságát a katodporlasztás útján készült Pt, Cu és Ni rétegeknél az expositio idejéből számította. Ezüstrétegei között, melyeket chemiai

¹ PATTERSON, l. c.

úton készített, a legvékonyabb $40\ \mu\mu$ volt; tehát még kívül esik a kritikus vastagságon. *Pt* rétegei fajlagos ellenállása $4\cdot8\ \mu\mu$, illetve $2\cdot6\ \mu\mu$ -nél kezd nagy mértékben nőni. Az eltérés az általam és PATTERSON által is észlelt $7\cdot\mu\mu$ -tól talán a vastagság mérésével magyarázható. RIEDE szerint különben «Der Knick auf der Platinkurve, der sich bei $0\cdot01\ \text{mg}$ ($= 4\cdot8\ \mu\mu$) bemerkbar macht, dürfte dem von PATTERSON gefundenen entsprechen und seinen Grund in mangelnder Planparallelität der Schicht haben». Az optikai állandók megváltozására vonatkozó vizsgálataim alapján úgy vélem, ez az ok másban keresendő. RIEDE *Ni*-rétegei között a legvékonyabb, mely még vezetett, $7\cdot3\ \mu\mu$ volt; ennek fajlagos ellenállása még nem különbözött nagyon a vastagabb rétegektől. A következő, $1\cdot2\ \mu\mu$ vastag réteg fajlagos vezető képessége már zérus. A kritikus vastagság *Ni*-nél tehát $<7\cdot3\ \mu\mu$. A rézrétegek ellenállása $11\cdot1$ és $5\cdot6\ \mu\mu$ között kezd nagyobb mértékben nőni. RIEDE mérései alapján tehát *Cu*-nál és *Ni*-nél is következtethetünk egy ugyanoly nagyságrendű kritikus vastagságra, mint az általam is vizsgált fémeknél. Különösen értékesek RIEDE ama mérései, melyeket nagyon vastag, 100 – $400\ \mu\mu$ vastag rétegeken végzett. E mérések tanúsága szerint a fajlagos ellenállás, bár folyton és lassan csökken, de még $400\ \mu\mu$ -nél sem érte el a tömör fémnek megfelelő értéket, úgy, hogy ezek az észlelések a hyperbolának a tömör fém fajlagos ellenállásának horizontális egyenese felé aszimptotikusan közeledő ágát szolgáltatván, kiegészítik saját méréseimet és teljessé teszik a specifikus ellenállás változásáról fennebb vázolt képet.

2. Kérdés már most, hogy a kritikus vastagságok és általában a fajlagos ellenállásnak a rétegek vastagságával észlelt változása hogyan értelmezhető?

J. J. THOMSON,¹ ki a fémes vezetés elektronelméletének egyik megalapítója volt, hogy az elektronoknak az elméletben felmerülő úgynevezett szabad úthosszát a mérés számára hozzáférhetővé tegye, két eljárást javasolt. Az egyik szerint λ , a szabad úthossz kiszámítható az ellenállás megváltozásából mágnességi térben. PATTERSON² egy csomó fémre vonatkozóan meghatározta

¹ J. J. THOMSON: Rapp. Congr. internat. à Paris 3. 145. 1900.

² PATTERSON: Phil. Mag. (6) 3. 655. 1902.

λ -t ily módon. Bár a THOMSON-féle képletek ellen, melyekkel számított, P. DRUDE¹ nyomós érveket hozott fel, az érdekesség okáért álljon itt néhány érték. PATTERSON szerint platinában $\lambda=6 \mu\mu$, aranyban $16 \mu\mu$, ezüstben $13 \mu\mu$. Maga DRUDE is kiszámította optikai észlelések alapján több fémre vonatkozóan λ értékét. Szerinte λ platinában $0.62 \mu\mu$, aranyban $8.6 \mu\mu$, ezüstben $8.7 \mu\mu$. Ezek az értékek kisebbek, mint PATTERSONÉI, a platinára számított érték körülbelül 10^{-1} -szer akkora. Aranynál és ezüstenél azonban legalább az értékek nagyságrendje ugyanaz, mint PATTERSON-nál.

A másik THOMSON-féle² eljárás a következőkben áll. Ha egy fémréteg oly vékony, hogy D vastagsága commensurabilis lesz az elektronok szabad úthosszúságával, λ -val az illető fémbe, vagy annál is kisebb, akkor az elektronok szabad úthossza a vékony rétegben, λ' kisebb lesz a normálisnál és a következő törvény szerint fog változni:

$$\lambda' = D \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \lg \frac{\lambda}{D} \right).$$

Ennélfogva ily vékony rétegek ellenállása a rétegek vékonyodásával rohamosan nő. THOMSON szerint tehát a vastagságoknak az a határértéke, melyen túl a vékonyabb rétegek ellenállása rohamosan kezd nőni, nagyságrendjére nézve egyenlő az elektronok szabad úthosszával az illető fémbe. Ily járatban volt PATTERSON, mikor a vékony platina- és bismut-rétegek fajlagos ellenállását mérte. Mint már említettem, ő azt találta, hogy platinánál $\lambda(=) 7 \mu\mu$. THOMSON szempontjából ugyanúgy értelmezhetők azok a kritikus vastagságok is, melyeket saját méréseim alapján aranyon, ezüsten és palladiumon konstatáltam. Újabban ismét G. JAFFÉ³ számította ki az elektronok szabad úthosszúságát. Ő még a DRUDE értékeinél is jóval kisebbeket talált. Szerinte platinánál $\lambda=0.26 \mu\mu$, palladiumnál $0.40 \mu\mu$. Tekintve, hogy THOMSON nem publikálta azokat a megfontolásokat és

¹ P. DRUDE: Ann. d. Phys. 14. 955. 1904.

² J. J. THOMSON: Proc. Cambridge. Phil. Soc. (2) 11. 119. 1901.

³ G. JAFFÉ: Ann. d. Phys. 45. 1237. I. 1914.

számításokat, melyek alapján a fenti képlethez jutott, álláspontjának helyessége közelebbről nem bírálható el.

P. DRUDE fentebb idézett értekezésében PATTERSON méréseivel foglalkozva ezeket írja: 1. «Bei der Herstellungsart der dünnen Metall-Schichten auf nassem (chemischen) Wege oder durch Kathodenzerstäubung ist es sehr wohl möglich, dass die Metallschicht nicht genügend kohärent ist, so dass sie in geringer Dicke eine zu kleine spezifische Leitfähigkeit zeigt.» 2. «Die Grenzdicke, von der an die Leitfähigkeit sich der normalen nähert, braucht daher vielleicht mit der freien Weglänge in gar keiner Beziehung zu stehen und kann eventuell viel grösser als λ sein.» A mi ez aggályok közül az elsőt illeti, azt HAGEN és RUBENS-nek vékony ezüstretegek sűrűségére vonatkozó és itt az 5. §-ban említett mérései, úgy vélem, eloszlatják. A 2. ellenvetést pedig nem igen lehet PATTERSON méréseire vonatkoztatni, mert az a határvastagság, melynél a vékony rétegek fajlagos ellenállása a normális értékhez közeledik, csakugyan nagyon nagy, mint RIEDE eredményeiből látható. *Ni*-nél például még 400 $\mu\mu$ -nél is nagyobb a fajlagos ellenállás a normálisnál és a határvastagság mindenesetre elég távoli összefüggésben lehet λ -val, de PATTERSON nem ezt a vastagságot mérte (mindegyik rétegének fajlagos ellenállása nagyobb volt a normálisnál), hanem azt, melynél a fajlagos ellenállás rohamosan kezd nőni, vagyis a hol a hyperbola meredeken felfelé megy.

3. A következőkben már most figyelmen kívül hagyva az előbbi kérdést, avval fogunk foglalkozni, hogy a fajlagos ellenállásnak a fémrétegek vékonyodásával észlelt megváltozásából, a fémek dispersio-elmélete alapján, hogyan és mennyiben számítható ki az optikai állandók ugyancsak észlelt változása.

Az áramvezetés elektronelmélete ¹ szerint a fajlagos ellenállás

$$w = \frac{1}{\sigma} = \frac{rc^2}{N} = \text{const.} \frac{1}{N \cdot \lambda}, \quad (12)$$

a hol σ a fajlagos vezetőképesség, N a vezető-elektronok száma

¹ Lásd pl. DRUDE: Ann. d. Phys. 14. 937. 1904. 46. és 64. képlet.

köbczentiméterenkint, c a fény terjedési sebessége az űrben, r a vezető-elektronok úgynevezett sűrűdésbeli ellenállása (Reibungswiderstand), λ a vezető-elektronok szabad úthossza.

Mint e képletből látható, hogy a fajlagos ellenállásnak a rétegek vékonyodásával járó növekedését magyarázzuk, két feltevéshez folyamodhatunk. Feltehető először, hogy a vastagság csökkenésével N is fogy egy

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{\beta}{D}} \quad (13)$$

törvény szerint, a hol N_0 a tömör fémre vonatkozik, D a réteg vastagsága, β pedig egy állandó. Feltehető másrészt, hogy r növekszik egy

$$r = r_0 \left(1 + \frac{\alpha}{D}\right) \quad (14)$$

törvény szerint. Az utóbbi feltevéshez folyamodott W. PLANCK,¹ hogy a vékony rézrétegek optikai állandóinak általa észlelt változását megmagyarázza. A fajlagos ellenállás változásáról mindkét feltevés egyaránt számot ad; kérdés, melyik tud inkább és mennyiben beszámolni n és k megváltozásáról?

A fajlagos ellenállás ugyanis (13), illetve (14) behelyettesítése után lesz:

$$w = c^2 \frac{r}{N_0} \left(1 + \frac{\beta}{D}\right), \quad (15)$$

illetőleg

$$w = c^2 \frac{r_0}{N} \left(1 + \frac{\alpha}{D}\right). \quad (16)$$

w tehát, mint D függvénye, mindkét esetben egy hyperbola. Vizsgáljuk meg már most a (13) és (14) feltevéseket egyenként n és k szempontjából.

A dispersio-elmélet alapegyenletei,² ha független változónak nem a frekvenciákat, hanem a hullámhosszakat választjuk:

¹ W. PLANCK: Phys. Ztschrift. 15. 563. 1914.

² Lásd pl. W. VOIGT: Magneto-optik, 19. és 36. képlet.



$$2n^2x = 2nk = \frac{C_1\lambda_1'\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda_1'^2} + \sum_1 \frac{C \frac{1}{\lambda\lambda'}}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{\lambda^2\lambda'^2}} \quad (17)$$

és

$$n^2(1-x^2) = n^2 - k^2 = 1 - \frac{C_1\lambda_1'^2\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda_1'^2} + \sum_2 \frac{C\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2\lambda'^2}}. \quad (18)$$

Ezekben a képletekben

$$C = \frac{Ne\left(\frac{e}{m}\right)}{\pi c^2}, \quad (19)$$

$$\lambda' = \frac{2\pi cm}{r}, \quad (20)$$

a hol c a fény terjedési sebessége az űrben, N az elektronok száma pro cm^3 , e az elektron töltése, m a tömege, r pedig az elektron sebességével fordítva arányos sűrűlási erő; λ a beeső fény, λ_0 pedig a kötött elektronok sugárzásának saját hullámhossza (Eigenwellenlänge).

A (19) és (20) a megfelelő indexekkel ellátva úgy a szabad, mint a kötött elektronokra vonatkozik. A Σ tartalmazza a kötött elektronokra eső részt, az 1 indexű tag pedig a szabad elektronokra eső részét a (17) és (18) jobb oldali összegeknek. Szabad elektronokból csak egyféle van feltételezve.

Minthogy a fémek elektromos vezetését a szabad elektronok eszközlik és mi az n és k -nak a réteg vékonyodásával járó változását a fajlagos ellenállás változásával magyarázzuk, a következőkben csak ezekkel az 1 indexű tagokkal foglalkozunk. Úgy a (14) alatti PLANCK-féle, valamint a (13) feltevés azt mondja, hogy a rétegek vékonyodásával a szabad elektronok mindinkább elvesztik befolyásukat az optikai állandók értékére és ezek mindinkább oly értékekhez közelednek, melyek az

$$2nk = \Sigma_1 \quad \text{és} \quad n^2 - k^2 = 1 + \Sigma_2 \quad (21)$$

egyenletekből következnek, melyeket tehát kizárólag a kötött elektronok határoznak meg.

Ha már most a (13) feltevést a (17) és (18)-ba helyettesítjük, akkor lesz:

$$\begin{aligned} 2nk &= \frac{C_{10}\lambda_1'^3}{(\lambda^2 + \lambda_1'^2) \left(1 + \frac{\beta}{D}\right)} + \frac{\Sigma}{1}; \\ n^2 - k^2 &= 1 - \frac{C_{10}\lambda_1'^2\lambda^2}{(\lambda^2 + \lambda_1'^2) \left(1 + \frac{\beta}{D}\right)} + \frac{\Sigma}{2}. \end{aligned} \quad (22)$$

C_1 ugyanis, mint (19)-ből látható, arányos N_1 -gyel és így C_{10} a tömör fémre vonatkozó érték. Látnivaló, hogy mikor $D=0$, a (21) egyenletekre redukálódik (22). Mikor pedig D növekszik, $2nk$ is monoton módon növekszik a tömör fémnek megfelelő érték felé, $n^2 - k^2$ pedig monoton módon csökken $1 + \Sigma_2$ -ről a tömör fém értéke felé. Méréseim szerint már most Pt - és Pd -nál, továbbá W. PLANCK szerint Cu -nál $n^2 - k^2$ valóban így viselkedik. Ag - és Au -nál azonban $n^2 - k^2$ -nak minimuma van, mely a 17., 18. és 19. ábra tanúsága szerint annál élesebb, mennél nagyobb hullámhosszokról van szó. Ezt (13) alapján megmagyarázni nem lehet. Ugyancsak nem lehet megmagyarázni (13) alapján $2nk$ maximumát, melyet pedig az összes vizsgált fémeken észleltem.

A (13) feltevés tehát úgy a fajlagos ellenállás változásáról, mint pedig nagy vonásaiban az optikai állandók viselkedéséről, $2nk$ növekedéséről és $n^2 - k^2$ csökkenéséről beszámol, de az optikai állandók változásainak részleteiről számot adni nem tud.

Bár DRUDE elméleti vizsgálódásai alapján arra az eredményre jutott,¹ hogy «Der Zusammenhang der optischen Eigenschaften mit der elektrischen Leitfähigkeit liegt überhaupt wesentlich in der Elektronenzahl N , nicht in dem Reibungskoeffizienten r », mégis jelen esetben a tapasztalat alapján előnyben kell részesítenünk a W. PLANCK-féle (14) feltevést, mert annak alapján $2nk$ maximuma is megmagyarázható.

¹ P. DRUDE, l. c. 952. l.

Tekintve, hogy (20) szerint λ'_1 fordítva viszonylik r -hez, (14) alapján tegyük fel, hogy

$$\lambda'_1 = \frac{\lambda'_{10}}{1 + \frac{a}{D}}. \quad (14a)$$

Ha ezt most a dispersio alapegyenleteibe helyettesítjük, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2nk &= \Sigma_1 + \frac{a(D^2 + aD)}{D^2 + bD + c}, \\ n^2 - k^2 &= 1 + \Sigma_2 - \frac{dD^2}{D^2 + bD + c}, \end{aligned} \quad (23)$$

a hol a rövidség kedvéért:

$$a = \frac{C_{10}\lambda^3\lambda'_{10}}{\lambda^2 + \lambda'^2_{10}}, \quad b = \frac{2a\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda'^2_{10}}, \quad c = \frac{a^2\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda'^2_{10}}, \quad d = \frac{C_{10}\lambda^3\lambda'^2_{10}}{\lambda^2 + \lambda'^2_{10}}. \quad (24)$$

Ha $D=0$, (23) átmegy a (21) egyenletekbe. Ha $D=\infty$, (23)-ból lesz:

$$\begin{aligned} 2nk &= \Sigma_1 + a, \\ n^2 - k^2 &= 1 + \Sigma_2 - d, \end{aligned}$$

vagyis a tömör fémnek megfelelő értékek.

Közben $n^2 - k^2$ mint D függvénye monoton módon csökken λ minden értékénél. $n^2 - k^2$ bizonyos hullámhosszaknál fellépő minimumát tehát a W. PLANCK-féle feltevessel sem sikerül megmagyarázni. $2nk$ viselkedéséről azonban qualitative és részben quantitative teljesen számot ad.

E végből vizsgáljuk meg a (23)-ban fellépő

$$f(D) = \frac{a(D^2 + aD)}{D^2 + bD + c} \quad (25)$$

függvény viselkedését a D változása szerint.

$$f'(D) = a \frac{(2D + a)(D^2 + bD + c) - (D^2 + aD)(2D + b)}{(D^2 + bD + c)^2}.$$

Tehát $f(D)$ szélső értékeinek helyeit a

$$(b - a)D^2 + 2cD + ac = 0 \quad (26)$$

egyenlet

$$D_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - ac(b-a)}}{(b-a)} \quad (27)$$

gyökei szolgáltatják.

Már most

$$b = a\beta = 2a\gamma \quad \text{és} \quad c = a^2\gamma, \quad (27_a)$$

a hol β és γ (24) szerint csakis a fény hullámhosszától és az illető fémtől függő állandók. Tehát lesz:

$$D_{1,2} = \frac{a^2\gamma \pm a^2\sqrt{\gamma^2 + \gamma(1-2\gamma)}}{a(1-2\gamma)} = a \frac{\gamma \mp \sqrt{\gamma - \gamma^2}}{1-2\gamma}. \quad (28)$$

(24) szerint

$$\gamma = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda_{10}^2}. \quad (29)$$

Mint hogy $\gamma < 1$, mindkét gyök valós.

Ha $\gamma < \frac{1}{2}$,

$$\gamma < |\sqrt{\gamma - \gamma^2}|, \quad 1 - 2\gamma > 0,$$

tehát az egyik gyök pozitív, a másik negatív. Minket csak a pozitív gyök érdekel: tehát

$$D_{\max} = a \frac{\gamma + \sqrt{\gamma - \gamma^2}}{1 - 2\gamma}. \quad (30)$$

Ha $\gamma > \frac{1}{2}$, akkor

$$\gamma > |\sqrt{\gamma - \gamma^2}| \quad \text{és} \quad 1 - 2\gamma < 0,$$

tehát mindkét gyök negatív.

Ebben az esetben tehát nincs oly vastagság, melynél $2nk$ -nak maximuma volna.

Ha $\gamma > \frac{1}{2}$, az azt jelenti, hogy

$$\lambda > \lambda'_{10}. \quad (31)$$

$2nk$ -nak tehát csak oly fémeknél lehet maximuma, melyeknél $\gamma < \frac{1}{2}$, vagyis, hol

$$\lambda < \lambda'_{10}. \quad (32)$$

Megjegyzendő, hogy a (14)-ben szereplő positiv α constans értékére vonatkozólag semmiféle feltevessel sem élünk.

MEIER számításai szerint már most

Aranynál	—	—	—	—	—	$\lambda'_{10} = 11250,$
Ezüstnél	—	—	—	—	—	$\lambda'_{10} = 9840,$
Platinánál	—	—	—	—	—	$\lambda'_{10} = 377.$

Észleléseim szerint mindhárom fém esetében $2\pi h$ -nak mint D függvényének van maximuma $\lambda = 600 \mu$ hullámhosszúságú fényben. Arany és ezüst esetében ez rendben van, mert a (32) feltétel az egész látható, sőt ultravörös spektrumban is ki van elégítve. Platina esetében azonban ellenmondásra akadunk. Ennek oka kereshető a (14) alatti feltevésben, de másban is.

Mintthogy a W. PLANCK-féle feltevésnek erős experimentális támaszai vannak, egyrészt saját, a rétegek ellenállására vonatkozó méréseimben, másrészt A. RIEDE méréseiben, rá fogok mutatni ez ellenmondás egy másik lehető okára. Lehetséges ugyanis, hogy a MEIER által kiszámított érték nagyon kicsiny.

A (12) alatti

$$\frac{N}{r} = c^2 \sigma$$

egyenletből (19) és (20) figyelembe vételével következik, hogy

$$\sigma = \text{constans} \times C_1 \lambda'_1, \quad (33)$$

a hol C_1 és λ'_1 természetesen a tömör fémre vonatkoznak, a constans pedig egy universális, a fém anyagi minőségétől független ¹ állandó.

Ha tehát különböző fémekre képezzük a $C_1 \times \lambda'_1$ szorzatokat, azoknak úgy kell egymáshoz viszonylaniok, mint az illető fémek vezetőképességei. MEIER adatai alapján összeállítottam a következő táblázatot:

¹ P. DRUDE: Ann. d. Phys. 14. 939. 1904, 2. jegyzet.

	$C_1 \times \lambda'_1$	σ
Arany _ _ _ _ _	0.469	$41,3 \times 10^4$
Ezüst _ _ _ _ _	0.450	$61,4 \times 10^4$
Platina _ _ _ _ _	0.031	$9,24 \times 10^4$
Réz _ _ _ _ _	0.290	57×10^4
Nikkel _ _ _ _ _	0.052	12×10^4
Kéneseő _ _ _ _ _	0.062	$1,04 \times 10^4$

Látnivaló, hogy a $C_1 \lambda'_1$ és σ proportionalitásáról szó sincs. MEIER a C_1 és λ'_1 állandókat mint egymástól függetleneket határozta meg a nélkül, hogy a (12) relációra tekintettel lett volna. Kéneseő esetében azonban MEIER számításai a szabad elektronokra vonatkozóan bizonyára a legnagyobb mértékben közel járnak a valósághoz. A kéneseő dispersióját ugyanis pusztán szabad elektronokkal elő lehet állítani; itt $\Sigma_1=0$ és $\Sigma_2=0$. A két ismeretlen C_1 és λ'_1 sokkal jobban van definiálva mint ott, a hol kötött elektronok is szerepelnek. Ha már most $C_1 \times \lambda'_1$ kéneseőnél számított értékéből következtetünk a vezetőképességek viszonya alapján $C_1 \times \lambda'_1$ értékére platinán, azt kapjuk, hogy annak körülbelül 0.57-nek kellene lenni, 0.032 helyett, vagyis körülbelül 18-szor nagyobb. Valószínű tehát, hogy λ'_1 értéke platinán is sokkal nagyobb, mint 377. A MEIER értékeinél mutatózó ezen körülményre újabban más oldalról G. JAFFÉ¹ is rámutatott. JAFFÉ elméleti vizsgálatai alapján igazolta DRUDE ama feltevésének jogosultságát, hogy a szabad elektronok és atomok ütközéséből eredő r sűrűlási erő független a fény hullámhosszától és a gyors optikai rezgéseknél ugyanakkora, mint stationárius áramoknál. MEIER éppen e feltevés korlátolt jogosultságában kereste, éppen úgy, mint maga DRUDE is más esetekben, annak az eltérésnek a magyarázatát, hogy adatai alapján kiszámítva p -t, a szabad elektronok számát atomonként valamely fémbe, más-más eredményeket kapott, a szerint, amint az

$$Ne_{eu} = p \cdot \frac{d}{A} \cdot \frac{e}{H} \quad \left| \quad I. \right.$$

$$\left(Ne \left(\frac{e}{m} \right) \right) = C_1 \pi \cdot 10^{11}$$

¹ G. JAFFÉ: Ann. d. Phys. 45. 1227. 1914.

vagy a

$$\left. \begin{aligned} Ne_{\mu} &= p \frac{d}{A} \cdot \frac{e}{H} \\ \left(Ne \left(\frac{e}{m} \right) \right) &= \frac{2\pi c \sigma}{\lambda'_1 \cdot 10^{-7}} \end{aligned} \right\} \text{II.}$$

egyenletrendszert használta. Az I. rendszer a C_1 -ből, a II. λ'_1 -ből határozza meg p -t. (d az illető fém sűrűsége, A az atomsúlya, $\frac{e}{H}$ az elektrolýsisból ismert viszonya a hydrogen atom töltésének a tömegéhez, $\frac{e}{m} = 1.87 \cdot 10^7$.)

JAFFÉ vizsgálatai alapján MEIER említett magyarázata el-
esik és JAFFÉ reámutat a különbségek valódi okára, hogy tudni-
illik MEIER C_1 és λ'_1 meghatározásakor a (12) relatiót nem vette
tekintetbe.

JAFFÉ szempontja annyiban is támogatja fenti meggondolá-
saimat, mert Hg itt is kivétel. Ugyanis a Hg C_1 és λ'_1 -ből meg-
határozott $p_I = 2.13$ és $p_{II} = 2.19$ értékei kitűnő egyezésben
vannak. Platinánál viszont MEIER adatai alapján $p_I = 1.33$,
 $p_{II} = 27.50$. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy az ellenmondás,
melyre a (32) egyenlőtlenség alapján platina esetében jutottunk,
egyelőre nem döntő argumentum a (14) hypothesisssel szemben.

Visszatérve a (30) képletünkhöz, látjuk, hogy a $2nk$ maxi-
mumának helye

$$D \max = a \frac{\gamma + \sqrt{\gamma - \gamma^2}}{1 - 2\gamma} = a\Gamma \quad (30_a)$$

arányos az a állandóval. Ha tehát α -t nagyobbra választjuk, az
elméleti görbe maximuma eltolódik a nagyobb vastagságok
felé. Helyettesítsük most (30_a)-ból D értékét (25)-be és vegyük
tekintetbe a (24) és (27_a) relatiókat, akkor nyerjük, hogy

$$f(D)_{\max} = \frac{a(\alpha^2 \Gamma^2 + \alpha^2 \Gamma)}{\alpha^2 \Gamma^2 + 2\alpha^2 \gamma \Gamma + \alpha^2 \gamma},$$

azaz

$$f(D)_{\max} = \frac{a(\Gamma^2 + \Gamma)}{\Gamma^2 + 2\gamma \Gamma + \gamma},$$

a hol α , γ és Γ csakis C_1 , λ'_1 és λ -tól függenek. W. PLANCK¹ tehát tévedett, mikor azt írta: «man kann sich leicht davon überzeugen, dass $2nk$ vom Werte Σ_1 ab zunimmt und sich, je nach dem Zahlwert von α mit oder ohne Ausbildung eines Maximums, dem Werte $\Sigma_1 + \alpha$ nähert».

Mert látható, hogy α -nak sem a maximum existenciájára, sem annak nagyságára befolyása nincs; a maximumot tisztán a fém anyagi minőségét jellemző állandók határozzák meg. α csak a maximum helyére van befolyással, ha ilyen egyáltalában van. Ennek megállapítása azért fontos, mert ily módon a nélkül, hogy α számértékére vonatkozólag speciális feltevessel élénk, lehetővé van téve a (14) alatti W. PLANCK-féle feltevés numerikus összehasonlítása a tapasztalattal.

Ha valamely fém fajlagos ellenállása mint a rétegvastagság függvénye ismeretes, akkor e fémre vonatkozólag α is ismeretes. Mert α annak a mértéke, hogy mily vastagságnál és mily meredeken kanyarodik a fajlagos ellenállás hyperbolája felfelé. Mennél kisebb α , annál kisebb vastagságoknál és annál meredekebben megy fel a fajlagos ellenállás görbéje, és mint (30)-ból látható, annál kisebb vastagságoknál van $2nk$ maximuma. α növekedésével a hyperbola enyhébben megy fel és ennek megfelelően $2nk$ maximuma is D nagyobb értékei felé tolódik el. Azonban oly fémeknél is, hol α csak *approximative* vagy *egyáltalában nem ismeretes*, kiszámítható a maximum nagysága és összehasonlítható a tapasztalattal; csak a maximum helye nem számítható ki ily fémek esetében.

Hasonlítsuk össze már most az aranyrétegeken észlelt és a számított maximumok értékeit. Mint a fent közölt összeállításból látható, az általam vizsgált fémek közül ennél a fémnél közelíti meg leginkább a MEIER által számított $C_1 \times \lambda'_1$ érték az elméleti (33) relatio által követelt értéket. MEIER szerint a kötött elektronokra vonatkozó Σ_1 összeg értéke:

$$\begin{array}{lll} \lambda = 500 \mu\mu & 600 \mu\mu & 700 \mu\mu \\ \Sigma = & 3.2 & 2.1 \quad 1.8 \\ C = 0.0000416 & \text{és} & \lambda'_1 = 11250. \end{array}$$

¹ W. PLANCK, l. c. 567. l. utolsó sorok.

Tehát

$$\begin{array}{lll} \lambda & = & 500 \mu\mu \quad 600 \mu\mu \quad 700 \mu\mu \\ \gamma & = & 0.002 \quad 0.0029 \quad 0.0039 \\ D_{\max} & = & a \times 0.046 \mu\mu \quad a \times 0.056 \mu\mu \quad a \times 0.067 \mu\mu. \end{array}$$

A maximum helyének dispersiója elenyésző kicsiny, a alábbi értékét alapul véve alig 1—2 tized $\mu\mu$. Mint a 17., 18., 19. ábrán látható, a maximum helye különböző színű fényben csakugyan praktikusán egybeesik. Nevezetesen az észlelt maximum körülbelül 1—2 $\mu\mu$ körül van, miből a értékére az következik, hogy a körülbelül 25—30-czal egyenlő. A 12. ábra \times -tel jelzett pontjai mutatják, hogy a ily értékével a fajlagos ellenállás görbéje is előállítható. A mi a maximumok nagyságát illeti, az, mint láttuk, a -tól független, és pedig lesz:

$$\begin{array}{lll} \lambda = 500 \mu\mu & 660 \mu\mu & 700 \mu\mu \\ \text{számított } 2nk_{\max} & = 8.32 & 9.6 \quad 11.7 \\ \text{észlelt } 2nk_{\max} & = 4.4 & 9.1 \quad 13.0. \end{array}$$

A $2nk$ maximumának számított dispersiója tehát, mint láttuk, szintén egyezik qualitative az észlelésekkel, de kisebb. A numerikus eltérésnek itt ismét két oka lehet: a (14) feltevés, vagy a MEIER-féle értékek. Tekintve, hogy n és k -nak úgy a vastagsággal, mint a hullámhosszal járó változásáról, továbbá a fajlagos ellenállásnak a vastagsággal járó változásáról (14) qualitative beszámol, nem lehetetlen, hogy a numerikus eltérések oka csakugyan MEIER adataiban kereshető.

Végleges véleményt mondani e kérdésben addig, míg a MEIER-féle szám adatok revisiója a (33) relatiónak megfelelően végrehajtva nincsen, nem lehet. Ezzel a nagy munkával pedig, mint JAFFÉ is mondja, tanácsos várni addig, míg a fémek dispersiója az ultravörösben is részletesen ismeretes lesz.

Hogy már most megmutassam, hogy az elméleti $2nk$ és $n^2 - k^2$ görbék mint D függvényei mennyire közelítik meg az észlelt görbéket, arany esetében, sárga fényre, a mikor, mint láttuk, $2nk$ észlelt és számított maximumai leginkább egyeznek, kiszámítottam $2nk$ és $n^2 - k^2$ görbéit $a=30$ értékével, mely-

lyel a fajlagos ellenállás pontjait a 12. ábrába rajzoltam. A számított értékek az illető (12. és 18.) ábrákon \otimes -tel vannak jelölve.

Látható, hogy az egyezés itt $n^2 - k^2$ minimumától eltekintve jó.

11. §. Összefoglalás.

1. Platinából, palladiumból, aranyból és ezüstből vékony rétegeket készítettem, melyeknek vastagsága körülbelül $1\mu\mu$ -tól $100\mu\mu$ -ig terjedt. Meghatároztam ezeken a fémrétegeken a rétegek fajlagos ellenállását, törésmutatóját és absorptiocoéfficiensét mint a vastagság függvényeit. Ezeket a *mennyiségeket* mint a vastagság függvényeit *előtűntető görbék* minül a négy vizsgált fémnél *ugyanolyan típusúak*. Hogy a fajlagos ellenállás változása és n és k változása párhuzamos jelenségek, külsőleg már abban is nyilvánul, hogy körülbelül ugyanolyan vastagságnál kezdődik n és k nagymértékű változása, a hol a fajlagos ellenállás hirtelen kezd nőni.

2. W. PLANCK megmérte vékony rézrétegeken n -t és k -t mint a vastagság függvényeit. Ugyanoly típusú görbéket kapott, mint én. Hogy n és k változását az elektronelmélet alapján megmagyarázza, az

$$r = r_0 \left(1 - \frac{\alpha}{D} \right)$$

feltevéshez folyamodott. A fajlagos ellenállás változására vonatkozóan végzett méréseim igazolják, hogy az ebből a feltevésből a fajlagos ellenállás változására vonható következtetések a valószínűságnak teljesen megfelelnek.

3. A fajlagos ellenállás változását a vastagsággal az

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{\beta}{D}}$$

feltevés alapján is előállíthatjuk.

4. Mint méréseim mutatják, W. PLANCK feltevésével n és k viselkedését platinánál, palladiumnál, aranynál és ezüstnél is megmagyarázhatjuk, részben numerikusan, részben csak qualitative. Kivétel $n^2 - k^2$ -nak bizonyos fémeken, bizonyos hullámhosszú-

ságú fényben észlelt minimuma, melyet ezzel a feltevessel magyarázni nem lehet.

5. Az

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{\beta}{D}}$$

feltevással n és k viselkedését csak nagy vonásaiban írhatjuk le, mert ennek alapján $2nk$ maximumát nem állíthatjuk elő. Ezért W. PLANCK hypothesis előnyben részesítendő.

6. Megmutattam, hogy W. PLANCK hypothesis alapján $2nk$ észlelt görbéjének alakjából hogyan lehet következtetni a *dispersio-elmélet* λ' constansa számértékének felső határára.

★

Ez a dolgozat a kolozsvári Ferencz József tudományegyetem physikai intézetében készült. Örömmel ragadom meg az alkalmat, hogy TANGL KÁROLY professor úrnak, az intézet igazgatójának úgy az eszközök szíves átengedéseért, valamint kegyes érdeklődéseért hálás köszönetet mondjak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 decz. 13.-án tartott üléséből.)

AZ ARABIS HIRSUTA (L.) SCOP. ALAKJAI.

TUZSON JÁNOS I. tagtól.

Az *Arabis*-genus egyike az északi félgömb legelterjedtebb növénygenusainak. Délen egyes fajai Északafrikában és Mexikóban, nagyjából véve a Ráktérítő táján élnek, északon pedig néhány másik faj Taymir-földön és az Alaszka-félszigeten, messze az északi sarkkör fölött található; azonban ezektől és néhány délamerikai fajtól eltekintve, az irodalom szerint kereken 100-ra becsült fajának túlnyomó többsége az északi mérsékelt öv lakója. Itt a fajok többsége Északamerikában él, az eurázsiai kontinensre aránylag kevés esik: hazánkban 12 van meg, Európában pedig mintegy 30. A jelzett övben elterjedésük régiója főleg a dombvidéken kezdődik: a síkságokat, különösen pedig a száraz sztepeket kerülik; ellenben a hegységekben — éppen úgy, mint az arktikus tájakra — felhatolnak az örök hó közelébe. Ebben a szélességi és függőleges elhelyezkedésükben kifejezésre jut, hogy a genus fajai harmadkori arktikus flóra-elemek; még pedig eredeti elterjedési centrumuk Északamerika felett képzelhető el. Innen terjedtek délre a homostatikus állapot idejében. A pleistocaen alatt mélyen a 40° – 50° szélességi fok alá leszorultak, hogy a jégárak visszahúzódása után részben ismét visszavándoroljanak észak felé, a mérsékelt öv tájain pedig a hosszas ide-oda vándorlás következményeként mozaikszerűen maradjanak meg.

Egyes fajok az eurázsiai kontinensen és Északamerikában egyaránt megvannak, mások pedig kisebb-nagyobb geographiai komplexumok kizárólagos növényei. Az előbbiekre közé tartozik az *Arabis hirsuta* (L.) Scop., a mely általában egyike az északi mérsékelt és hideg öv legelterjedtebb és eléggé gyakori növé-

nyeinek. Az Arabiseknek nagyjából megadott elterjedési területén inkább a dombos és hegyes (de nem a felhavas) és a valamivel északibb tájakon honos. A tőlem látott példányok közül a legdélibb előfordulása Sardinia-szigetéről való, a legészakibb hely pedig, a honnan e fajt megvizsgálhattam, az Alaszka-félsziget volt; vagyis e szélsőségek a 38° és a 65° északi szélességekre esnek.

E mellett a nagy földrajzi elterjedés mellett érthető, hogy az *A. hirsuta* systematikai alakjainak száma meglehetősen nagy: vizsgálataim folyamán 735 adatból az egész elterjedési területre 47 formát különböztethettem meg. Ezek egy része új, nagyobb része azonban már ismeretes volt. Utóbbiak az irodalomban legkülönbébb megítélésben részesültek; még pedig az eddig külön fajok és varietások gyanánt leírtak névsora, melyekre vizsgálataim kiterjedtek, betűrendben a következő:¹

Arabis Allioni DC. Piemont.

- “ *borealis* ANDRZ. Kamcsatka.
- “ *bosniaca* BECK. Bosznia.
- “ *constricta* GRIS. Macedonia.
- “ *contracta* SPENNER. Németország.
- “ “ *c. Gerardi* (BESS.) CELAK. Csehország.
- “ “ *a. hirsuta* (L.) CELAK. Csehország.
- “ “ *b. sagittata* (DC.) CELAK. Csehország.
- “ *curtisiliqua* (DC.) FRIES. Svédország.
- “ *Eschscholtziana* ANDRZ. Keletázsia.

Arabis Gerardi BESS. Középeurópa.

- “ “ *a. typica* REGEL. Kelet-szibíria.
- “ “ *β. borealis* (ANDRZ.) REGEL. Kelet-szibíria.
- “ *gracilescens* JORD.
- “ *hirsuta* (L.) SCOP. Krajna.
- “ “ *β. alpestris* GAUD. Svájc.
- “ “ *var. borealis* (ANDRZ.) TRAUTV. Szibéria.
- “ “ *var. comosa* BOEB. Délmagyar- és Horvátország.

¹ Minden egyes névhez odajegyeztem azt a helyet, a melyről éppen az illető felsorolásban szó van. Így tehát ez független az illető alaknak általában vett földrajzi elterjedésétől.

- Arabis hirsuta* var. *exauriculata* BORB. Horvátország.
- “ “ *a. cordata* NEILR. Alsó-Ausztria.
- “ “ *β. crassior* WAHLBG. Svédország.
- “ “ *γ. curtisiliqua* WAHLBG. Svédország.
- “ “ *a. genuina* DÖLL. Baden.
- “ “ *b. glabrata* DÖLL. Pfalz.
- “ “ *δ. glaberrima* WAHL. Svédország.
- “ “ var. *glabra* (L.) LGE. Svédország.
- “ “ *β. glabrescens* BOISS. Macedonia.
- “ “ *γ. glastifolia* RCHB. Németország.
- “ “ *β. Hornungiana* GRECESCU. Románia.
- “ “ *incana* GAUD. Svájc.
- “ “ *γ. incisa* WALLR. Szászország.
- “ “ *kamtschatica* Cham. et Schlecht. Kamcsatka.
- “ “ *β. longisiliqua* KOCH.
- “ “ var. *rosea* BOISS. Kisázsia.
- “ “ *β. sagittata* RCHB. Németország.
- “ “ *sessilifolia* GAUD. Svájc.
- “ “ *β. subcordata* LEDEB. Altai.
- “ *hirtella* JORD. Savoia.
- “ *Hornungiana* SCHUR. Keletmagyarország.
- “ *Jacquinii* var. (?) *bosniaca* BECK. Bosznia.
- “ *Kochii* JORD. Délnyugat-Németország.
- “ *longisiliqua* WALLR. Szászország.
- “ *lusitanica* BOISS. Portugália.
- “ *nemorensis* WOLF. Németország.
- “ *nipponica* BOISS. Japán.
- “ *ovata* POIRET. Pennsylvania, Virginia.
- “ *planisiliqua* PERS. Németország.
- “ *sagittata* DC. Franciaország.
- “ “ *β. exauriculata* WILLK. Spanyolország.
- “ “ *a. Gerardiana* DC. Déleurópa.
- “ “ *γ. glaberrima* WILLK. Spanyolország.
- “ “ *ε. longisiliqua* (WALLR.) DC.
- “ “ var. *nipponica* FR. et SAV. Japán.
- “ “ *δ. oblongata* (RAF.) DC. Északamerika.
- “ “ *γ. ovata* (POIR.) DC. Északamerika.

Arabis sagittata β . *subglabrata* DC. Pyrenæusok.

" *Stelleri* DC. Kamcsatka.

" " *var. japonica* SCHMIDT. Japán.

" " *γ . micrantha* FR. et SAV. Japán.

" " *β . stenocarpa* FR. et SAV. Japán.

" *sudetica* TAUSCH. Szilézia.

" " *f. bosniaca* (BECK) MURBECK. Bosznia.¹

Egy részét ezeknek a fajok és varietások gyanánt értékelt alakoknak megtartottam, azonban valamennyit csakis mint az *Arabis hirsuta*-nak egyenlő rangú formáját. A régi neveket, a hol csak lehetett, meghagytam: a systematikai érték változtatását nem tartottam czélszerűnek a nevek megváltoztatásával is kísérni. Más részét az említetteknek el kellett ejtenem, részben azért, mert a megkülönböztetés alapjául felvett sajátságok systematikai célokra alkalmatlannak bizonyultak, másrészt pedig egyes kivételes esetekben azért is, mert leírásuk nem használható és az eredeti példányok nem voltak számomra hozzáférhetők.

Gazdag vizsgálati anyagomból² fajunk alaki sajátságait

¹ E felsoroltakon kívül egész sora tartozik még ide a megnevezéseknek, a melyek azonban vagy teljesen elavultak, mint a *Turritis*-hez kapcsolt nevek, vagy pedig olyan lelőhelyek növényeire vonatkoznak, a melyek vizsgálati anyagomban egyáltalán nincsenek, vagy nincsenek megfelelően képviselve.

² Amaz Intézetek és Múzeumok névsora, melyek *Arabis*-gyűjteményét használtam, a következő:

A berlini botanikai múzeum.

A szentpétervári botanikai kert.

A bécsi egyetem.

A stockholmi botanikai múzeum.

A brüsszeli botanikai kert.

A római botanikai kert.

A chicagói Field Columbian múzeum.

A tokyói egyetem.

A calcuttai múzeum.

A budapesti nemzeti múzeum.

A kolozsvári egyetem.

A budapesti egyetemi botanikai kert.

A budapesti egyetemi növényrendszertani intézet.

A budapesti m. kir. vetőmagvizsgáló állomás.

Thaisz Lajos herbárium.

Az illető intézeti igazgató- és tulajdonos uraknak e helyen is őszinte köszönetet mondok.

eléggé behatóan tanulmányozhattam és — kisebb-nagyobb közökkel — a faj fennebb jelzett elterjedési övének egész területéről voltak példányaim.

Morphologiai vizsgálataim arra az eredményre vezettek, hogy az *Arabis hirsuta* megvizsgált alakjain, ezek minden bonyolult változatossága mellett is, bizonyos feltűnőbb sajátosságok igen szívós állandóságot mutatnak. Ilyenek: a szét nem terülő, keskeny szirmok; az ezek félhosszúságát elérő, alig észrevehetően zsákos, fehérén szegélyezett csészelevelek; a felgyenesedő, egy középeres, a kocsánynál 5–10-szer hosszabb keskeny beczők; az igen keskeny szárnynyal szegélyezett, loupeval is alig észrevehetően pontozott mag; a széles alapon ülő, felfelé egyenesedő, hosszúkás szárlevél és a hosszan nyélbe futó tölevél. Ezek a sajátságok szoros összekötő kapocsként vannak meg az összes alakokon és ezek szempontjából az *Arabis hirsutát* átmeneti alakok a vele közelebbi rokonságban álló fajokkal (mint *A. verna*, (L.) R. Br., *A. ciliata* R. Br., *A. alpestris* SCHLEICH. stb.) nem kötik össze; hanem izoláltan áll, mint a fejlődéstörténeti láncolat egy elszakadt és elszigetelődött részlete, vagy a családfa egyik elszakadt ága.

Az említett közös sajátságok mellett igen bonyolult változatosságot tapasztalunk az *Arabis hirsuta* alakjain: a levelek szélessége és hossza közötti viszonyban; abban, hogy a szárlevelek alapja nyilas, füles, szívalakú vagy elmetszett, szélük pedig ép vagy fűrészesen fogas, hogy a szár és a levelek molyhosak vagy kopaszak, hogy a szőrök — különösen a száron — egyszerűek vagy villásak, szabálytalanul vagy csillagalakúan elágazók, elállóak vagy odasimulók. A virág színe és nagysága különösen az amerikai alakokon szintén változik és a beczők vastagsága, hossza és csoportosulásuk módja szintén változó. E sajátságok változásai, melyek az egyes alakokon a legkülönbözőbb kombinációkban jelentkeznek, habár gyakran kissé nehezebben állapíthatók meg és gondos összehasonlítást igényelnek, mégis eléggé bőséges alapot nyújtottak az egyes formák megkülönböztetéséhez.

A mi az egyes alakok földrajzi elterjedését illeti, azt reméltem, hogy az egyes nagyobb, összefüggő területrészeket elfoglalók és

így egymással közelebbi fejlődéstörténeti vonatkozásban állók között a rokonság bizonyos közös alaki sajátságokban is fel lesz ismerhető úgy, hogy azokat alfajok és varietások keretében természetes rendszerbe lehet foglalnom, miáltal rendszerük és földrajzi elhelyezkedésük egymást kölcsönösen magyarázta és érthetővé tette volna. Annál is inkább feltételezhettem ezt a számos, monographiaileg feldolgozott növényfajon tapasztalt esetet, mert az *Arabis hirsuta* magja apró és aránylag súlyos, vagy legalább is nem alkalmas arra, hogy a szél hirtelenebbül ide-oda szállítsa és így ez által az alakok szeszélyesen keveredjenek.

Feltevésemben azonban csalódtam, az egyes alakok a legtöbb esetben meglepően váltakoznak, keverednek, annyira, hogy a természetes rendszerbe való foglalásra irányuló törekvésem, az alaki sajátságok alapul vételével nem vezetett célhoz. Mindössze azt állapíthattam meg, hogy a keletázsiai alakok közül a *f. Stelleri*, *f. nagatica*, *f. nipponica* és a *f. borealis* egymással közelebbi rokonságban áll és hogy az északamerikai és a keletázsiai formák nagyobb változatosságot mutatnak, mint az európaiak. Utóbbiból arra lehet következtetni, hogy ezek a fejlődéstörténet hosszabb szakaszát jelzik, mint a mekkora az európai alakokat eredményezte, a mi összhangban áll azzal az előbbi feltevésünkkel, hogy az egész genus elterjedési centrumát Észak-amerika tájékán kell keresnünk.

Az *Arabis hirsuta* alakjainak szeszélyes váltakozása mellett az egymástól nagy távolságokban levő területeken nem ritkák az olyan alakilag convergens formák, a melyekről kétségtelen, hogy polytropikus keletkezésűek (így a *f. gracilis* Északamerikában és a *f. italica* Szicília szigetén). Másrészt gyakoriak az átmeneti alakok is, melyek a legváltozóbb combinációkban hidalják át az egyes típusok közötti különbségeket. Ilyen körülmények között éppen olyan bizonytalan a morphologiaileg egyezők összefoglalása, mint a hogy a kellő morfológiai bizonyíték nélkül az egyes összefüggő területrészek, mint például Északamerika, Ázsia vagy Európa területén együtt élő alakokra egyszerűen kijelenteni, hogy ezeket egymáshoz külön-külön szorosabb rokoni kapcsolat fűzi, szintén nem lenne indokolt.

Így minden félreértés kikerülése végett legcélszerűbb volt

a formákat nevük betürendje szerint sorolni fel. Az említett három földrész szerint csupán praktikus okokból különítettem el őket.

A fennebb mondottak szerint vizsgálataim arra az eredményre vezettek, hogy az irodalomban eddig 23 külön faj, illetőleg ezek keretében 40 különféle varietas és közelebbről meg nem határozott más systematikai egység gyanánt leírt növényt foglaltam össze az *Arabis hirsuta* keretébe. Hogy ezek bizonytalanul állottak és revideálásuk már régóta kívánatos, azt már LEDEBOUR,¹ BOISSIER² és mások itt is, ott is kifejezésre juttatták; arra azonban, hogy a fajokul tekintettek közül például az *Arabis Gerardi*, *A. sagittata*, *A. hirsuta* stb. maguk is össze-foglaltassanak egy faj keretébe, kevésbbé és csak kevesen (így FRANCHET és SAVATIER,³ CELAKOVSKY⁴ és mások) gondoltak. Ebből az okból összefoglalom röviden mindazt, a mit fajunk keretének megállapításában a faj fogalmára vonatkozólag megfigyeléseim alapján mértékadónak tartottam.

A faj fogalmáról már nagyon sokan írtak és vitáztak.⁵ Főként pedig többnyire arról van szó, hogy a fajok elkülönítését indokoló sajátság *milyen mértékben* legyen elütő. Súly esik továbbá e kérdésekben a *sajátságok systematikai értékére*, valamint azok *állandó*, illetőleg öröklődő voltára. A szerint azután, hogy milyen rendszertani kategoriáról van szó, az alsóbbak felé a megkivánt különbségnek hovatovább kisebbedő mértékével és csekélyebb systematikai értékével megelégszünk, sőt sokan a legalsóbb egységek: a varietások és a formák közötti különbségektől még azt sem követelik meg, hogy azok állandóak, tehát öröklődők legyenek; mint a hogy például REGEL⁶ még a fajokul tárgyalta

¹ LEDEBOUR: Flora Altaica, III, 1831, 24. old. «Frustra certiores characteres quaesimus inter varietates etc.»

² BOISSIER: Bull. Herb. Boiss. VII, 1899, 785. old. a FRANCHET változtatásairól szólva kiemeli, hogy «En attendant ce travail de revision» etc.

³ FRANCHET et SAVATIER: Enum. Pl. Japon. I, 1875. 34. old.

⁴ CELAKOVSKY: Prodromus, 1865—67, 453. old.

⁵ Ide vonatk. a Potentilla rupestris-ről írt czífkem is. Botan. Közlem. VII, 1908. 207. old.

⁶ REGEL: Bull. Soc. Nat. Mosc. II, 1861, 162. old.

A. Gerardi Bess. és *A. sagittata* DC.-ről is feltételezi, hogy az előbbi a sovány, az utóbbi a kövérebb talaj következménye.

Mind a három tényező, illetőleg kérdés igen fontos a faj meghatározásában; egyikét azonban ezeknek, nevezetesen a sajátság állandóságának kérdését kezdettől fogva nem tartottam fennállónak, hanem abból indultam ki, hogy nem öröklődő, vagyis nem állandó sajátságok — a mennyiben fel tudjuk ezeket ismerni — egyáltalán figyelmen kívül esnek. Az ilyen sajátságok systematikailag még a legalsóbb kategóriára is teljesen értéktelenek. Még a formát vagy a subformát is, bármilyen csekély mérvű, de csak állandó, öröklődő sajátságra lehet alapítani.

A második, a sajátságok elütésének mértéke annyiban szintén nem volna kérdéses, hogy két olyan növényalakot, a mely között nagy az alaki különbség, inkább tekinthetünk önálló, úgynevezett jó fajnak, mint két olyant, a mely között csekélyebb az eltérés. Valami olyan mértéket azonban, a mi szabályul és egyöntetű eljárás (nem egyöntetű eredmény! mert ilyen a különböző fajoknál semmiféle módszerrel sem lesz elérhető) alapjául szolgáljon, lehetetlen megszabni, annál kevésbbé, mert szorosan ide kapcsolódik a harmadik még nehezebb kérdés is: az illető sajátság systematikai értékének kérdése.

A különbség nagyságát ugyanis az a systematikai jelentőség, a melyet az illető sajátságnak tulajdonítunk, nagyban befolyásolja; ez pedig szintén egyéni nézet dolga: lépten-nyomon tapasztalható, hogy az egyik szerzőtől külön genushoz tartozónak ítélt növényalakot egy másik szerző ugyanazon sajátságok alapján csak külön fajnak, vagy a másoktól külön faj gyanánt megkülönböztetettet csupán alfajnak, varietásnak vagy csak formának tekinti.

Az *Arabis hirsuta* alakjait eléggé bőséges anyagon megvizsgálva, a faj keretének és az egyes formák systematikai értékének megállapításában más módszert tartottam szem előtt, mint az előbb körvonalozott bonyolult mérlegelést, a melynél tulajdonképpen csupán az eltérések nagyságának mértékelésére vonatkozó megállapodásszerű elvi állásfoglalásról van szó. Az összes alakok átvizsgálása után ugyanis úgy találtam, hogy tudományos czélul kiűzhető eredményre csakis az egész rokonsági csoport összes

alakjainak együttes megítélése által lehet számítanunk. Igyekeztem az összes alakok változatosságából és különösen az átmenetekből megállapítani azt, hogy az egész rokonsági csoportban van-e viszonylagosan nagyobb megszakítás. Abból indultam itt ki, hogy a fejlődési sorozat eredetileg minden egyes esetben megszakítás nélküli lánczolat volt. A hol külön fajokról van szó, ott ez a lánczolat a idők folyamán megszakadozott: a családfa ágai tagokra estek szét.

Minden ilyen elvált, de önmagában megszakítás nélküli fejlődéstörténeti szakasz egy faj, a mely vagy egy, vagy számos egyenlő rangú ágat, formát hozott létre. Lehetnek e mellett a fajnak egyes régibb, de még el nem szakadt, megerősödött elágazásai is: az alfajok vagy varietások, a melyek külön-külön ismét a formák egy-egy csoportjára ágazhatnak szét. A faj tehát ebben az értelemben a fejlődéstörténeti lánczolat egy izolált szakasza, a melyet az előbb vele összefüggött szakaszoktól nagyobb hézag választ el. Ez a hézag és egyúttal a fajnak ke-
rete pedig a kellő vizsgálati anyag mellett rendesen jól megállapítható. Kétségtelen, hogy ez ellen a módszer ellen is több minden felhozható. Így elsősorban az, hogy alkalmazása igen kiterjedt vizsgálati anyagot követel. Ez igaz; és tagadhatatlan, hogy különösen az úttörő kutatásokat ilyen körülményes eljárással nem lehet megterhelni. Azonban az is bizonyos, hogy különösen oly flóraterületeken, a melyek növényfajai már sokszorosan megvizsgáltattak és leíratk, az új fajok felállítását kiterjedtebb összehasonlító vizsgálatokra kellene alapítani.

További kifogás az lehetne, hogy tulajdonképen a fejlődéstörténeti módszer mellett is sok dolgunk van az alaki sajátságok mértékelésével és egyéni megítéléstől függő fokozatosságokkal, hiszen összes megállapításaink ezen alapszanak. Azonban e mellett a módszer mellett nem az a fő, hogy milyen különbségek vannak a formák között, hanem az, hogy elszakadoztak-e már rokonaiktól, vagy pedig az alakbeli átmenetek tanúsága szerint még megvan-e közöttük az összefüggés. Így a fejlődéstörténeti módszer mellett a döntésben olyan tudományos értelem jut kifejezésre, a mit a személyes izlésnél többre kell becsülnünk. Még azt az ellenvetést is fel lehet itt hozni, hogy a fejlődés-

történeti módszer mellett túlságosan divergens fejlődési sorok végső tagjai is egy és ugyanazon faj keretébe sorozandók, ha még összefüggenek egymással. Ez kétségtelen és ez elő is fordul (például az *Arabis alpina* és az *A. albidula* alaksorozata, vagy némileg az *A. hirsuta*, *f. Stelleri* esetében is). Azonban mégis ritkábban találkozunk ezzel az esettel: a természetben oly lassú a fejlődési sorok keletkezése, hogy ezek régiebb részletei már mind megszakadoztak, csak a legújabb leszármazású alakok állanak egymással szorosabb kapcsolatban, ezek összességét pedig joggal tekinthetjük a rendszer legfontosabb egységének: egy természetes fajnak.

Magyarország területéről, ideértve Boszniát és Hercegovinát is, eddigelé az *Arabis hirsuta* következő formáit állapíthattam meg.¹

ARABIS HIRSUTA L. SCOP. Fl. Carn. ed. 2. II. 1772, p. 30. (*Turritis hirsuta* L. Spec. Plant. 1753. p. 666; *A. contracta* SPENNER, Fl. Friburg. III. 1829. p. 925.)

F. 1. *Allionii* (DC.) *Turritis stricta* ALLIONIUS Fl. Pedem. 1789. p. 18; *Arabis Allionii* DE CANDOLLE, Fl. Franc. 1805. p. 676; *Arabis sudetica* TAUSCH in Flora XIX. II. 1836. p. 407; *A. hirsuta* β . *glaberrima* KOCH Synopsis, 1837. p. 38; *A. hirsuta* β . *sudetica* FICK, Fl. Schles. 1881. p. 29.) *Caule glabro plus minus dense folioso; foliis dentatis denticulatisque, subglabris glaberrimisque, margine plus minus ciliatis, caulinis basi cordato-vel auriculato-sagittatis, oblongo-ovatis oblongisque, superioribus lanceolatis. Cum f. glaberrima et f. constricta saepe confusa: a priore differt altitudine et foliis majoribus dentatisque, a posteriore foliis dentatis oblongo-lanceolatis, basi sagittatis, et caule plerumque glaberrimo; exempla majores etiam f. glastifoliae similes sed ab omnibus siliquis brevioribus robustioribusque et inflorescentia fructifera brevior et densior differt.*

Exempla pedemontana interdum foliis caulinis caulibusque

¹ A nem magyarországi formák felsorolását l. ENGLER's Botan. Jahrbücher 1917. 7. évf.-ban.



1. *Arabis hirsuta* (L.) SCOP. f. *cordata* (NEILR.) TUZS.; 2. f. *Gerardi* (BESS.) TUZS.
1 : 1, pars caulis foliosi aucta.

parce puberulis, quales tamen etiam inter exempla sudetica carpaticaque occurrunt.

Habitat: *Carpat. bor.*: Háromkút, in alp. Tátra-Tokarno (SIMONKAI); Drechsler-ház in alp. Bélai Havasok, 1300—1600 m. s. m. (ASCHERSON, FRITZE, ENGLER); ibidem (KULM) in *f. glustifoliam* transiens, caule hirsuto; Felkavölgy com. Szepes (SCHERFEL).

F. 2. austriaca. *Caule pilis praesertim ramosis oblecto; foliis caulinis integris subintegrisque, lanceolatis oblongo-lanceolatisque, basi sagittatis vel plus minus truncatis, ad medium cauli plus minus adpressis, superne patentibus, saepe paulo curvatis, superioribus acutis; foliis radicalibus subspathulatis, subintegris vel parce obtuse denticulatis. A f. sagittata (DC.) praecipue foliis integris, minoribus, angustioribusque et inflorescentia fructifera plerumque brevior differt.*

Habitat: *Hungaria orient.*: Vidra (SIMONKAI), *Hung. occid.*: Kőszeg. *Hungar. littor.*: Fiume (STAUB), *Croatia*: Fuzine (BORBÁS).

F. 3. constricta (GRISEB.). (*Arabis constricta* GRISEBACH, *Spicil. Fl. Rumel. et Bithyn.* I. 1843. p. 249; var. (?) *A. bosniaca* post *A. Jacquinianam* in BECK *Fl. v. Südbosnien*, *Ann. naturhist. Hofmus. Wien*, 1887. p. 71 (93); *A. sudetica* TAUSCH *f. bosniaca* (BECK) MURBECK, *Beitr. z. Kenntn. d. Flor. v. Südbosn.*, *Akad. Abhandl. Lund*, 1891. p. 168). *Foliis radicalibus integerrimis subintegrisque, plus minus spathulatis, pilis ramosis subadpressis sparsim oblectis vel glabris, caulinis oblongo-ovatis oblongo-lanceolatisque, integris vel parce denticulatis, praecipue superioribus plus minus auriculato-sagittatis, plus minus pilosis vel glabris, margine tantum ciliatis; caule glabro vel in parte inferiore pilis simplicibus ramosisque sparsis; siliquis brevioribus.*

Habitat: *Bosnia*: mte. Klekovač (BECK); Dovliči pr. Sarajevo (JANCHEN); mte. Jahorina, 1600 m. s. m. (MALY); Travnik in mte. Vlašić (BRANDIS in Baen. *Herb. Eur.*; SENDTNER); (SENDTNER, *Catal.* 719). *Croatia*: mte. Klek pr. Ogulin (SIMONKAI et THAISZ).

F. 4. cordata (Neilr.). (*A. hirsuta a. cordata* NEILREICH, *Fl. von Niederösterreich*, 1859. p. 711; *A. hirsuta* REICHENBACH, *Icon. Fl. Germ.* II. 1837—38. 4342). *Caule pilis majori parte*

simplicibus hirsuto; foliis caulinis oblongis usque oblongo-ovatis dentatis subamplectentibus basi cordatis vel praesertim superioribus auriculatis, apicem versus gradatim subintegriss minoribus. Icon 1.

Habitat: *Hungaria or.*: Berzászka (SIMONKAI); Brassó (THAISZ); Szt.-Erzsébet pr. Nagyszeben (FUSS); Nagycsür (FUSS); in f. *etruscam transiens*. *Carpat. bor.*: in alp. Bélai Havasok (FRITZE); ibidem (SZÉPLIGETI) in f. *etruscam transiens*; mte. Wetterlin, *Carp. Minor.* (KRZISCH); Nemespodhrágy (HOLUBY); Trencsén (BODMANN). *Hungar occid.*: Budakesz (FILARSZKY et SCHILBERSZKY). *Croatia*: mte. Sneznik ad Platak (BORBÁS).

F. 5. *etrusca* (in Fl. *etrusca* exs. herb. Hort. Bot. Pisani 1836. sub *A. hirsuta* var. *sagittifolia* MORISON, Fl. Sard. I. 18. p. 151 edita). *Foliis caulinis oblongo-lanceolatis sagittatis, denticulatis subintegrisque, superioribus integerrimis, pilis ramosis simplicibusque plus minus dense obtectis; caule pilis majori parte simplicibus. A. f. sagittata (DC.) praecipue pilis caulinis simplicibus differt, f. integrae etiam similis, a qua solum foliis caulinis plus minus denticulatis dignoscitur.* Icon 6.

A. hirsuta incana GAUD. ad hanc formam pertinere videtur, characteres tamen quae in Fl. Helv. IV. 1829, p. 314 descriptae ad comparandum inutiles.

Habitat: *Hungaria orient.*: Marosnémeti (SIMONKAI); Torockó (SIMONKAI); Kolozsvár (BORBÁS), in f. *hungaricam transiens*; Lics (SIMONKAI), in f. *hungaricam transiens* (SCHUR); Herkules-fürdő (BORBÁS, HEUFFEL, SCHNEIDER Iter Balc. 1907, THAISZ, SIMONKAI); Herkules-fürdő (THAISZ) in f. *glastifoliam transiens*. *Carpati boreales*: Wetterlin in *Carp. Minor.* (KRZISCH); mte. Khocs pr. Lucski (BORBÁS). *Planities Hungar.*: Rákos (BORBÁS). *Hung. occid.*: in montibus ca. Budapest (SADLER, BOHATSCH, BORBÁS); ibid. (BORBÁS) in f. *cordatam transiens*; Szentendre (TUZSON); Budaörs (TUZSON) in f. *integram transiens*; Pomáz (TUZSON); Arács, com. Zala (BORBÁS); Rónádfa, com. Baranya (BORBÁS). *Croatia*: Ogulin (BORBÁS); Kamenjak (BORBÁS) in f. *sagittatam transiens*; mte. Vratnik Segniæ (BORBÁS) in f. *sagittatam transiens*; mte. Klek (SIMONKAI; PERLAKY); Visocica (BORBÁS); Posega.

(PAVICH); *Territorium Karst*: Fiume (LOEBISCH, TUZSON, BRAIG); ibidem (SIMONKAI) in *f. Gerardi* — (BORBÁS) in *f. austriacam* — (BORBÁS) in *f. cordatam* transiens; Portoré (SIMONKAI) in *f. sagittatam* transiens. *Bosnia-Hercegovina*: supra Cattaro (STUDNICZKA); Mostar (RAAP); alp. Dinar. Gujat (JANCHEN et WATZL); alp. Dinar. Jankovo brdo (JANCHEN et WATZL) in *f. integram* transiens; Bosnia, Igman (BLAU); Sarajevo (KNAPP).

F. 6. exauriculata (WILLK.). (*A. sagittata* β . *exauriculata* in WILLKOMM et LANGE, Prodr. Flor. Hisp. III. 1880. p. 817). *Foliis caulinis denticulatis oblongis oblongo-lanceolatisque, basi truncatis vel cordatis, caule pilis praesertim ramosis hirsuto. A. f. sagittata solum foliis basi exauriculatis differt.*

Habitat: *Carpat. bor.*: Khocs (BOHATSCH); *Croatia*: mte. Klek (ROSSI). *Bosnia-Hercegovina*: mte. Vlašić, 1700 m. s. m. (BRANDIS).

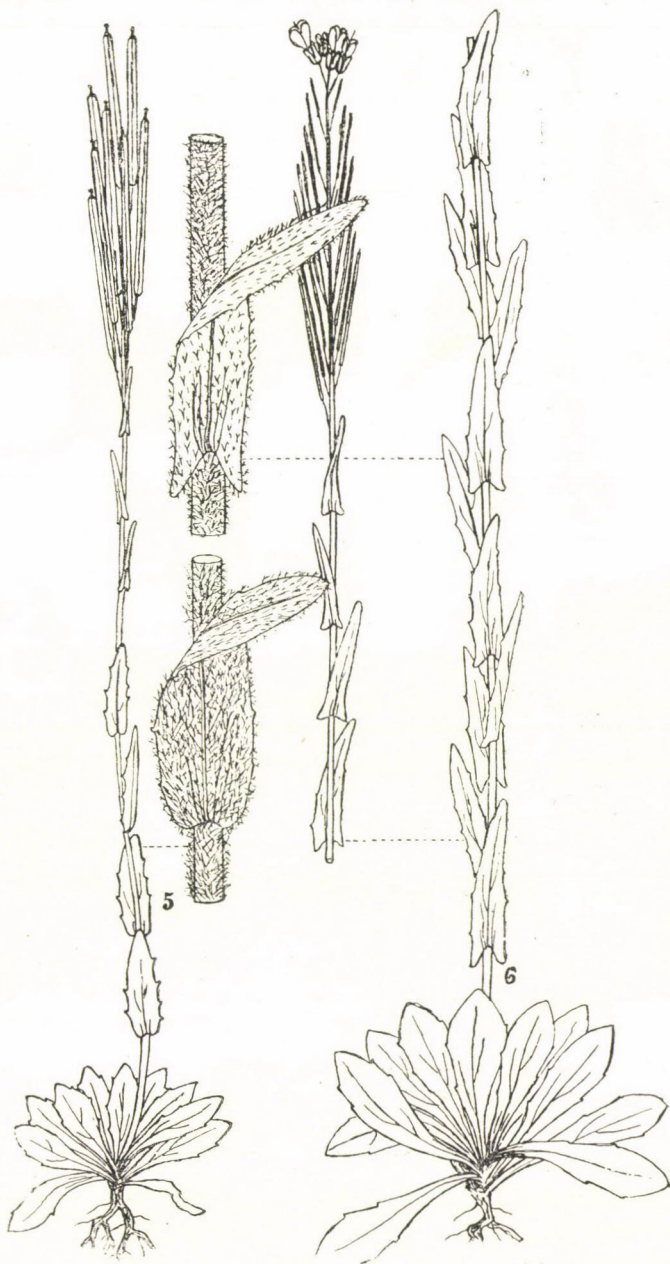
F. 7. Gerardi (BESS.). (*A. Gerardi* BESSER in litt., Koch, Syn. Fl. Germ. ed. I. 1837, p. 38; *Turritis Gerardi* BESSER, Prim. Fl. Gall. 2. 1809. p. 87. *Turritis nemorensis* WOLF, in HOFFMANN, Deutschl. Fl. ed. 2. II. 1804. p. 58.) *Caule pilis furcatis ramosisque adpressissimis hirsuto, plerumque dense folioso, saepe subnitido, crassiusculo; foliis caulinis oblongis oblongo-lanceolatisque, plus minus acutis, denticulis acutis, basi auriculato-sagittatis; foliis radicalibus oblongo obovatis in petiolum angustatis, obtuse dentatis; siliquis numerosis, erectissimis, tenuibus. Icon 2.*

Habitat: *Planities Hung.*: Ujfalu in insul Csepel (TAUSCHER, BORBÁS); ibid. (TAUSCHER) partim in *f. sagittatam*, partimque in *f. cordatam* transiens; Ercsi in insul. Csepel (TAUSCHER); Dunapataj (BORBÁS); Kalocsa (WIESBAUR). *Littor. Hungar.*: Fiume partim in *f. etruscam* partimque in *f. austriacam* transiens.

F. 8. glastifolia (RCHB.) (*A. hirsuta* γ . *glastifolia* REICHENBACH in STURM, Deutschl. Fl. I. 12. 1827. tab. 43. REICHENBACH, Ic. Fl. Germ. II. 1837—38. p. 13, tab. 4343 c.). *Foliis majoribus, caulinis oblongis vel oblongo-lanceolatis, basi sagittatis cordatisque, tenuibus, subnitidis, pilis paucis, dentatis subintegrisque, nonnunquam subpellucidis, virescentibus; caule pilis paucis, majori parte simplicibus.*



3. *Arabis hirsuta* (L.) SCOP. f. *hungarica* Tuzs.; 4. f. *sagittata* (DC.) Tuzs.
1:1, pars caulis foliosi aucta.



5. *Arabis hirsuta* (L.) SCOP. f. *Hornungiana* (SCHUR) TUZS.; 6. f. *etrusca* TUZS
1 : 1, pars caulis foliosi aucta.

Habitat: *Hung. or.*: Herkules-fürdő (THAISZ). *Territ. Carpat. bor.*: mte. Madaras pr. Bükköskút (TUZSON); Liptóújvár (BORBÁS); Rajecz (BORBÁS). *Hungaria occid.*: Kőszeg (WAISBECKER); Budapest (BORBÁS) in *f. etruscam transiens*. *Territ. Croat. Slav. Svarca* ad. flum. Mrezinca (ROSSI). *Terit. Karst.*: Fiume (KERNER) in *f. sagittatam transiens*; Ostaria, in mte. Velebit (BORBÁS).

F. 9. Hornungiana (SCHUR). (*Arabis Hornungiana* SCHUR, Enum. Trans. 1866. p. 43; *A. hirsuta c. comosa* BORB. Vizsg. a hazai Arabisek etc. in Math.-Természettud. Közl. XV. 1878. 151. *A. hirsuta* var. *alpina* et *A. hirsuta* var. *diminuta* KOTSCHY in Herb. Schott. 1850). *Caule pilis simplicibus hirsuto, basi saepe curvato; foliis caulinis minoribus, oblongo-lanceolatis, denticulatis subintegrisque, basi auriculatis; pedunculis glabris vel sub calycibus nonnunquam pilis solitariis; siliquis robustis, usque 2 mm. latis; inflorescentia fructifera plerumque haud longa, siliquis dense stantibus nonnunquam fere aggregatis. Planta plerumque humilis, habitu A. ciliatae f. alpestris* (SCHLEICH) *similis, a qua tamen seminibus alatis, siliquis majoribus certe differt. Etiam f. sudeticae* (TAUSCH) *similis, a qua tamen hirsutie distinguitur.* Icon 5.

Habitat: *Hung. or.*: Csikszentdomokos mte. Öcsém (SIMONKAI); Padság, com. Torda-Aranyos (SIMONKAI); Vidra, com. Bihar (SIMONKAI); Petrosz, com. Bihar (SIMONKAI); Herkules-fürdő, mte. Hunka-Kamena (SIMONKAI, BORBÁS). *Croatia*: St. Rochum, mte. Santo (Sweto-Brdo) (BORBÁS); Brüssáni, mte. Szamar (BORBÁS); Jezera pr. Kraszno (BORBÁS); mte. Mrzin prope Vrelo (BORBÁS).

F. 10. hungarica. *Foliis dentatis oblongo-lanceolatis, acutis, minoribus, caulinis basi plus minus truncatis, pilis mixtis obtectis, radicalibus latioribus in petiolum angustatis; caule pilis praecipue simplicibus hirsuto; siliquis plerumque brevibus. A. f. etrusca praecipue foliis minoribus acutisque distinguitur.* Icon 3.

Habitat: *Hung. or.*: Raho, com. Mármaros (VÁGNER); Rodna (PORCIUS); mte. Kodru, Bratkoja (SIMONKAI). *Carpat. bor.*: Fenyőháza (BORBÁS); Barlangliget (BORBÁS); ibidem (BORBÁS) in *f. glastifoliam transiens*; in alp. Bélai Havasok (BORBÁS); com.

Szepes (ULLEPITSCH); mte. Sturecz pr. Besztercebánya (STEFFEK et RICHTER). Icon 3.

11. F. integra. *Caulis pilis praecipue simplicibus; foliis caulinis lanceolatis basi sagittatis vel auriculato-cordatis, integerrimis subintegrisque, basi ad medium cauli plus minus adpressis, superne patentibus saepe paulo curvatis. A f. cordata foliis caulinis basi saepe sagittatis integrisque differt; f. etruscae valde similis a qua solum foliis integrioribus et statura plerumque minore differt.*

Habitat: *Carpat. bor.*: Blatnica, com. Turócz (BORBÁS); *Territ. Pannon.*: Budapest (STAUB, STEINITZ, THAISZ); Budafok (MÜLLER). *Bosnia-Herzegovina*: Igrishnik (WETTSTEIN); alp. Dinar. Jankovo brdo (JANCHEN et WATZL) in *f. etruscam* transiens. *Territor. Karszt*: Croat. litt. (Herb. BORBÁS) in *f. cordatam* transiens; Delnice (ROSSI).

F. 12. sagittata (DC.) (*Arabis sagittata* De Candolle, Fl. Fr. VI. 1815. p. 592; *A. hirsuta* β. *sagittata* REICHENBACH, in STURM, Deutschl. Fl. I. Abth. 12. Bd. 1827; «*Turritis nemorensis* WOLF, in HOFFMANN Deutschl. Fl. ed. II. 2. 1804. p. 58» apud *A. nemorensis* in REICHENBACH Fl. Germ. Excurs. 1830—1832. p. 681; *A. sagittata* BERTOLONI et *A. planisiliqua* PERSOON in REICHENBACH Icon. Fl. Germ. II. 1837—38, 4343 b. et 4343.) *Caule pilis majori parte ramosis hirsuto; foliis caulinis dentatis, oblongis oblongo-lanceolatisque, basi auriculato-sagittatis. A f. etrusca solum pilis caulinis ramosis, a f. austriaca foliis dentatis differt.* Icon 4.

Habitat: *Carpat. bor.*: Drevenyik, com. Szepes (SIMONKAI) in *f. Gerardi* transiens; *Carpat. Minor.* Wetterlin (KRZISCH). *Planities Hung.*: Csip, in insul. Csepel (TAUSCHER) in *f. etruscam* transiens. *Territ. Pannon.*: in montibus prope Budapest (STEINITZ, FRIVALDSZKY, BORBÁS); Budaörs (BORBÁS); Kamara-erdő pr. Budapest (TUZSON); Jutar, com. Veszprém (BORBÁS); mte. Mecsek, pr. Pécs (RICHTER L.) in *f. etruscam* transiens. *Territor. Karszt*: Crkvenica (BORBÁS); Szenszkobilo (BORBÁS) in *f. etruscam* transiens; Fiume, Grobnik (LORENZ); Fiume (SIMONKAI); Portoré (BORBÁS); Delnice (ROSSI) in *f. austriacam* transiens.

F. 13. velebitica. *Foliis majoribus, caulinis truncatis*

tenuibus subpellucidis plus minus hirsutis denticulatis, radicalibus plerumque parce pilosis subglabrisque; caule pilis simplicibus ramosisque haud dense oblecto; siliquis robustis. Formae glastifoliae similis, sed ab ea praecipue foliis caulinis exauriculatis, pilis caulinis partim ramosis siliquisque robustioribus differt.

Habitat: Croatia: Bilo pr. Kraszno (BORBÁS); mte. Bielo-Lasica pr. Razdolje (BORBÁS); mte. Sladikovac ad Ostaria (BORBÁS) in *f. cordatam* transiens. Hung. or.: inter saxa montium ad Dürstye (BORBÁS).

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 febr. 14.-én tartott üléséből.)

VÉKONY FÉMRETEGEK DISPERSIÓJÁRÓL ÉS ABSORPTIÓJÁRÓL.

POGÁNY BÉLA-tól.

Vékony fémrétegek elektromos vezetésére és optikai viselkedésére vonatkozó vizsgálataim során meghatároztam vékony platina-, palladium-, ezüst- és aranyrétegek optikai állandóit, mint a réteg vastagságának függvényeit.¹

Ez észlelések alapján megszerkesztettem a görbékét, melyek a fénytörésmutatónak, n -nek, az absorptio-indexnek, $k=nx$ -nak, továbbá a komplex törésmutató valós és imaginarius részének, n^2-k^2 -nak és $2nk$ -nak a réteg vastagságától való függését ábrázolják.

Az aranyrétegek optikai viselkedését előtűntető e görbék már most nevezetes qualitativ eltérést mutattak például azokhoz a görbékhez képest, melyek a platina- és a palladium-rétegek optikai állandóinak viselkedését tüntették elő. Míg ugyanis a palladium és a platina esetében n^2-k^2 a rétegek vastagodásával monoton módon csökken a legvékonyabb rétegen észlelt értéktől a tömör palladiumon és platinán észlelt értékig, addig a vékony aranyrétegek komplex törésmutatójának valós része, n^2-k^2 a rétegek vastagodásával csökken, elér egy minimumot és azután növekedve közeledik a tömör arany n^2-k^2 -ja felé. Az n^2-k^2 -nak aranyrétegeken észlelt ez a minimuma annál élesebb és mélyebb, mennél nagyobb hullámhosszúságú fényről van szó. Ez a minimum már most lényegében arra vezethető vissza, hogy

¹ „Igen vékony fémrétegek elektromos vezető-képessége és optikai állandói.” Előterjesztve a M. T. Akadémia III. osztálya 1915. évi december hó 13.-án tartott ülésén.

míg a palladium- és a platina-rétegeken észlelt k monoton módon növekvő függvénye a D -nek (a réteg vastagságának), addig az aranyrétegek absorptio-indexe körülbelül $12 \mu\mu$ -nél elér egy maximumot és azután csökkenve állandósul. Az $n^2 - k^2$ minimuma különben nem csak arany-, hanem ezüst-rétegeken is észlelhető volt.

Az észlelt görbéket összehasonlítottam azokkal a görbékkel, melyeket a fémek dispersiójának elektron-elmélete alapján nyerünk, ha W. PLANCK¹ nyomán feltesszük, hogy a vékony fém-rétegekben a szabad elektronokra működő «súrlódási erő»:

$$r = r_0 \left(1 + \frac{\alpha}{D} \right), \quad (1)$$

a hol r_0 a tömör fémekben fellépő «súrlódási erő», D a réteg vastagsága, α pedig egy pozitív állandó. Az összehasonlítás arra az eredményre vezetett, hogy a PLANCK-féle hypothesisből nagyon jól meg lehet magyarázni a palladium-typusú vékony fémrétegek optikai viselkedését, de $n^2 - k^2$ minimumát az (1) alatti feltevéssel magyarázni nem lehet.

Kimutattam továbbá, hogy a komplex törésmutató imaginárius részének, $2nk$ -nak a PLANCK-féle feltevés alapján várható maximuma, illetve e maximum nagysága független az (1)-ben szereplő α állandótól, mert az (1) feltevés természetével és a fém dispersióját jellemző állandókkal teljesen meg van határozva.

Ily módon α értékére vonatkozó minden speciális feltevés mellőzésével kiszámítva $2nk$ maximumának az értékét aranyrétegekre vonatkozólag vörös, sárga és zöld fényben ($700 \mu\mu$, $600 \mu\mu$ és $500 \mu\mu$ hullámhosszakra), azt találtam, hogy $2nk$ maximumának számított dispersiója sokkal kisebb, mint az észlelt dispersio.

Ez a két körülmény arra engedett következtetni, hogy a W. PLANCK-féle hypothesis átalakításra, illetve bővítésre szorul, ha vele az idevonatkozó észlelt jelenségeket a maguk teljességében akarjuk leírni. Mielőtt azonban ehhez hozzáfogtam

¹ W. PLANCK: Phys. Zeitschrift, 15. 563. l. 1914.

volna, az aranyrétegeken végzett optikai észleléseimnek az elmélettől eltérő, fentjelzett eredményeit újlag igazolni óhajtottam oly mérési módszerrel, mely az eddigi észlelésekre használt FÖRSTERLING-féle indirect eljárástól elvileg különbözik. Ez lehetséges volt. A kritikus pont ugyanis $n^2 - k^2$ minimuma, vagyis k maximuma, tehát az a körülmény, hogy egy bizonyos vastagságú rétegnek az absorptio-indexe nagyobb, mint akár a nálánál vastagabb, akár a nálánál vékonyabb rétegeké. Többé-kevésbé átlátszó fémrétegek absorptiója azonban közvetlenül mérhető, ha összehasonlítjuk a rétegre merőlegesen beeső energia mennyiségét amaz energia mennyiségével, mely a rétegen áthaladva, abból ismét kilép. Ilyen egyenes módon határozták meg, mint ismeretes, többek között E. HAGEN és H. RUBENS¹ is néhány fémnek az absorptio-indexét. Ők a színfém absorptio-indexét akarták meghatározni és ezért méréseiket oly vastag ($>50 \mu\mu$) rétegeken végezték, melyekről a rétegek visszaverő képességére vonatkozó méréseik alapján feltételezheték, hogy azok optikai állandói már elérték a tömör aranynak megfelelő értékeket.

Az absorbeált energia mennyiségét HAGEN és RUBENS bolometrikus úton mérte; én, minthogy egyelőre csak a spektrum látható részére szorítkoztam, a kényelmesebb photometrikus módhoz folyamodtam.

Jelen dolgozat első részében a vékony aranyrétegek absorptio-indexének photometrikus úton való meghatározásáról, második részében pedig arról lesz szó, hogyan lehet W. PLANCK (1) alatti feltevését úgy átalakítani, hogy a vékony rétegek optikai viselkedése a dispersio-elmélet alapján teljesen magyarázható legyen.

1. §. Vékony aranyrétegek absorptio-indexének meghatározása a photometer segítségével.

Az absorptio-index spektralphotometrikus meghatározásának elve a következő: Legyen az aranyrétegre merőlegesen beeső fény intenzitása I_0 . Ha most tekintetbe vesszük, hogy az

¹ E. HAGEN u. H. RUBENS: Ann. d. Phys. 8. 439. I. 1902.

aranyréteg üveglemezen volt, akkor mint az 1. ábrán látható, az áthaladt fény intenzitása csökkent, egyrészt a három határfelületen történő visszaverődés, másrészt a két közegben való absorptio révén. Jelöljük ρ -val a határfelület visszaverőképességét, akkor

$$I_0(1-\rho) = \delta I_0$$

lesz a következő közegbe átengedett energiamennyiség. Tekintetbe véve ily módon az összes veszteségeket, a végül a levegőbe kilépő fény intenzitása, I lesz:

$$I = I_0 \delta_1 \delta_2 \delta_3 e^{-\frac{4\pi k D}{\lambda} - \frac{4\pi k_0 D_0}{\lambda}}, \quad (2)$$

mely kifejezésben k az aranyréteg absorptio-indexét, D az aranyréteg vastagságát, k_0 az üveg absorptio-indexét, D_0 az üveglemez vastagságát és λ a fénynek levegőben mért hullámhosszát jelenti. A δ -k az 1. ábrán látható határfelületek átengedő képességei.

A photometer segítségével már most meghatározható az $\frac{I}{I_0}$ hányados. Ha ennek a természetes logaritmusát vesszük, lesz:

$$\log \frac{I}{I_0} = \log \delta_1 \delta_2 \delta_3 - \frac{4\pi k D}{\lambda} - \frac{4\pi k_0 D_0}{\lambda}. \quad (3)$$

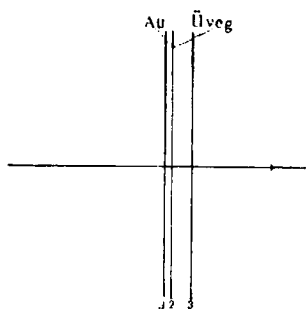
A k_0 és a D_0 mindegyik aranyrétegnél ugyanaz, minthogy a rétegek egyforma anyagú és közelítőlegesen egyenlő vastag üveglemezeken készültek, tehát írhatjuk, hogy

$$-\log \frac{I}{I_0} = -\left[\log \delta_1 \delta_2 \delta_3 - \frac{4\pi k_0 D_0}{\lambda} \right] + \frac{4\pi k D}{\lambda}. \quad (4)$$

Ha oly vastag rétegekkel van dolgunk, hogy k már nem függ D -től, az aranyréteg vastagságától, akkor a (4), mint D függvénye, egy egyenesnek az egyenlete. Ily rétegeken ugyanis a szögletes zárójelben még szereplő $\log \delta_1 \delta_2 \delta_3$ is állandó értékű. Ez egyenes és a D -tengely által bezárt szög trigonometrikus tangense szolgáltatja k -nak a szín-fémre vonatkozó értékét. Az egyenes által a $-\log \frac{I}{I_0}$ tengelyből levágott darab pedig egyenlő

a zárójeles kifejezéssel. HAGEN és RUBENS 50 $\mu\mu$ -nél vastagabb Au, Ag és Pt rétegeken végzett méréseik alapján konstatálták, hogy $-\log \frac{I}{I_0}$ mint D függvénye csakugyan egy egyenes.

Nyilvánvaló azonban, hogy ugyanez az eljárás a minket érdeklő vékonyabb aranyrétegek absorptio-indexének mérésére is alkalmas. A $-\log \frac{I}{I_0}$ mint D függvénye nem lesz többé egyenes, hanem általában egy görbe vonal. Azonban ha egy bizonyos D_1 értéknek elég kicsiny környezetére szorítkozunk, azon belül k oly kevésbé változik D -vel, hogy ez intervallumon belül állandónak tekinthetjük. Ez intervallumon belül tehát $-\log \frac{I}{I_0}$ mint D függvénye ismét egy egyenes lesz, melynek a D -tengellyel bezárt hajlásszöge, éppen úgy mint fent, szolgálatja k értékét ez intervallumon belül. Más szóval, ha a $-\log \frac{I}{I_0}$ görbe valamely D_1 abszcissájú pontjához érintőt húzok, akkor az érintő és a D -tengely által bezárt szög trigonometrikus tangense adja a D_1 vastagsághoz tartozó k_1 értékét.



1. ábra.

Szó sincs róla, vékony rétegek esetében az eljárás nem oly pontos, mint vastagabb rétegeknél, mikor csak az egyenes hajlásszögét kell meghatározni. Egy görbe vonal valamely pontjában a görbéhez érintőt húzni, illetőleg ez érintő irányát meghatározni oly feladat, mely csak bizonyos, eléggé korlátolt pontossággal oldható meg. Azért tehát az indirect FÖRSTERLING-féle módszer n és k meghatározására vékony rétegeknél éppen úgy pontosabb eredményeket ad, mint tömör tükrökre vonatkozóan a DRUDE-féle eljárás. Nem is arról lesz szó e dolgozat első felében, hogy újból és esetleg pontosabban meghatározzam vékony aranyrétegeken k értékét, mint azt már FÖRSTERLING-módszerével tettem, hanem csupán arról, hogy bizonyos pontossággal, vagy akár csak qualitative is konstatáljam, hogy egy bizonyos

vastagságú aranyréteg absorptio-indexe nagyobb úgy a vastagabb, mint a vékonyabb rétegek absorptio-indexénél, tehát, hogy van a $-\log \frac{I}{I_0}$ görbének egy oly darabja, hol meredekebben halad egyrészt a vastagabb rétegeknek megfelelő egyenesnél, másrészt a görbe ama darabjánál, mely az említett vastagság és $D=0$ között fekszik. E szempontból, és pedig k -nak úgy vastag, mint vékony rétegeken való meghatározása szempontjából egyáltalán nem okoz bonyodalmat az, hogy a fémrétegek üveglemezen vannak és ennek következtében az áthaladó fény az üveglemezen való áthatolás alkalmával is veszít intenzitásából. Arra is gondolhatnánk ugyanis, hogy ezt kísérletileg elimináljuk a mérésből az által, hogy I -t nem I_0 -val, hanem I_1 -gyel hasonlítjuk össze, ha I_1 a csupasz, rétegnélküli üveglemezen áthaladt fény intenzitása:

$$I_1 = I_0 \delta_3^2 e^{-\frac{4\pi k_0 D_0}{\lambda}}. \quad (5)$$

Ha a (2) egyenletet osztjuk (5)-tel és azután negatív előjellel a logarithmusát vesszük, lesz:

$$-\log \frac{I}{I_1} = \log \frac{\partial_1 \partial_2}{\partial_3} + \frac{4\pi k D}{\lambda}. \quad (6)$$

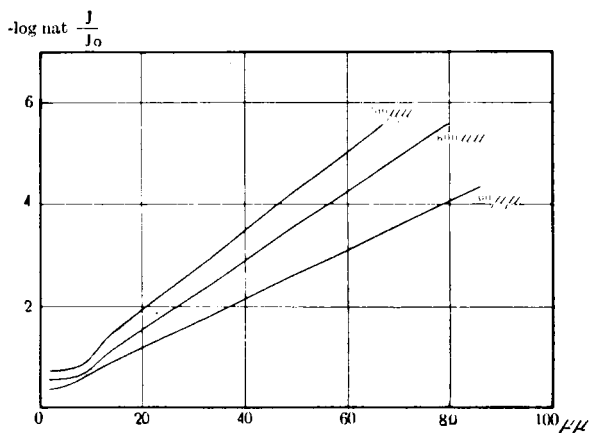
A $-\log \frac{I}{I_1}$ görbe e szerint csak abban különbözik a $-\log \frac{I}{I_0}$ görbétől, hogy ahhoz képest a D -tengelyre merőleges irányban és önmagával párhuzamosan egy bizonyos darabbal el van tolva, de a görbe alakja, mely k értéke szempontjából egyedül fontos, mit sem változott. Ennélfogva tehát még azt a csekély fáradtságot is megtakaríthatjuk, hogy I -t ne I_0 -val, hanem I_1 -gyel hasonlítsuk össze.

A mérések céljaira egy MARTENS és GRÜNBAUM¹ szerint átalakított KÖNIG-féle spektralphotometer szolgált.

A MARTENS és GRÜNBAUM által szerkesztett és az eszközre szerelt világítóberendezés a megvilágított részből kiinduló sugarakat két, párhuzamosan egymás mellett haladó sugárnyalábra

¹ F. MARTENS és F. GRÜNBAUM: Ann. d. Phys. 12. 984. 1903.

bontja, melyek mindegyike ismét a spektralphotometer egy-egy rését világítja meg. A Nicol-féle hasáb, mellyel a mérést tulajdonképen végezzük, úgy van beillesztve a foglalatába, hogy a foglalatban lévő mutató éppen a körosztályzat 0° pontjára mutat, mikor a két, egymással érintkező látómező közül az egyik teljesen sötét, mikor tehát a nicol rezgési iránya e látómező rezgési irányára merőleges. Tegyük¹ már most az aranyréteget először a másik látómezőt megvilágító sugárnyaláb útjába és legyen α_1 a szög, mellyel a nicolt fenti 0° állásából el kell forgatni, hogy a két



2. ábra.

látómező egyenlő világos legyen. A másik sugárnyaláb útjába állítva az aranyréteget, legyen a megfelelő szög α_2 . Akkor

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}. \quad (7)$$

Ily módon tehát az $\frac{I}{I_0}$ hányadosok meghatározhatók. Kellő intenzitású monochromatikus fényforrással nem rendelkezvén, a világító berendezés rését egy pálczika-alakú 1 AMPÉRES NERNST-égővel világítottam meg. A mérésnek alávetett aranyrétegek ugyanazok voltak, melyeknek fajlagos ellenállását mértem és

¹ F. MARTENS és F. GRÜNBAUM: Ann. d. Phys. 12. 997. 1903.

melyeknek egy részén végeztem FÖRSTERLING-módszerével n és k meghatározásait. A méréseket $\lambda=500, 600$ és $700 \mu\mu$ hullámhosszúságú fényben végeztem. Még csak azt akarom megjegyezni, hogy mindegyik réteget két különböző állásban photometráltam, nevezetesen mikor a fény először az aranyon és azután az üvegen haladt át és megfordítva, mikor az üvegen keresztül esett az aranyrétegre. Az alig különböző leolvasásoknak középértékét vettem.

A réteg vastagsága	— lg nat I/I_0		
	$\lambda=700 \mu\mu$	$\lambda=600 \mu\mu$	$\lambda=500 \mu\mu$
1.5 $\mu\mu$	0.65	0.51	0.35
3.4 „	0.72	0.59	0.41
5.4 „	0.74	—	0.44
6.5 „	0.75	0.57	0.50
6.7 „	0.77	—	0.49
7.2 „	0.82	0.59	0.57
9.2 „	0.87	0.62	0.62
12.0 „	1.33	0.94	0.84
17.3 „	1.65	1.29	1.04
23.1 „	2.26	1.74	1.37
28.6 „	2.60	2.03	1.56
30.9 „	—	2.16	—
31.9 „	—	2.28	1.70
32.2 „	2.82	2.28	1.69
39.5 „	3.42	2.80	—
43.7 „	3.76	3.10	2.30
50.3 „	4.31	3.57	2.67
69.2 „	—	4.90	—
113.2 „	—	7.66	—

E tábla alapján rajzoltam meg a 2. ábra görbéit. E görbék nyilvánvalóan mutatják, hogy a spektralphotometrikus mérések a FÖRSTERLING-féle módszerrel nyert eredményeket mindenben megerősítik. A $\lambda=700 \mu\mu$ és a $\lambda=600 \mu\mu$ -nek megfelelő görbéknek csakugyan van egy-egy inflexiós pontjuk; viszont a zöld fényben észlelt görbén az inflexiós pont létezése alig hogy kon-

statálható. Ez inflexiós pontokhoz húzott érintők trigonometriai tangense adja nyilván az absorptio-index maximális értékét. A maximális érték $D=11 \mu\mu$ környezetében van, tehát ott, a hol várható volt. A $15 \mu\mu$ -nél vastagabb rétegeknek megfelelő értékek észrevehetően egy egyenesen helyezkednek el. Az optikai állandók értékei tehát már hamarabb állandósulnak, mint a visszaverőképeség. Az ábrán látható, hogy az előbbi észleléseknek megfelelően k maximuma vörös fényben nagyobb mértékben emelkedik végleges értéke fölé, mint sárga vagy éppen esetleg zöld fényben.

A vékony fémrétegek optikájának W. PLANCK-féle elmélete és a tapasztalat között mutatkozó eltéréseket tehát újból leszögezvén, hozzáfoghatunk ez eltérések kiküszöböléséhez.

2. §. W. Planck-feltevésének az észleléseknek megfelelő átalakítása.

Tekintetbe véve már most a pontokat, melyekben az észlelések eltérnek a W. PLANCK-féle feltevés következményeitől, nevezetesen n^2-k^2 észlelt minimumát, $2nk$ maximumának a számítottnál nagyobb dispersióját, tekintetbe véve továbbá, hogy míg a vastagabb lemezek átmenő fényben sárgás-zöld színűek, addig a $12 \mu\mu$ -nél vékonyabb aranylemezek átmenő fényben egymásután zöld, kékes-zöld és végül határozott világoskék színűek, a spektrum vörös végének absorptiója tehát mindjobban előtérbe lép: láthatjuk, hogy ezek a jelenségek mind magyarázatukat lelik abban a körülményben, hogy k -nak, az absorptio-indexnek $12 \mu\mu$ körül maximuma van. Ez a maximum annál nagyobb és élesebb, mennél nagyobb hullámhosszúságú fényről van szó; $\lambda=500 \mu\mu$ -nél még csak éppen hogy konstatálható. Egy bizonyos vastagságú réteg tehát a spektrum vörös végét jobban absorbeálja, mint a vastagabb rétegek, vagy akár egy tömör tükör. $12 \mu\mu$ -nél vékonyabb rétegeken azután rohamosan csökken k értéke. Az absorptio-index értékének csökkenését a W. PLANCK-féle feltevés azzal magyarázza, hogy a rétegek vékonyodásával a szabad elektronokra ható «surlódási erő» mind nagyobb lesz, ezáltal a szabad elektronok mozgási szabadsága és befolyása az

abszorptióra elvész és azt teljesen a kötött elektronok szabják meg. Az észlelések azonban azt mutatják, hogy a viszonyok nem egészen ily egyszerűek. Mint az aranylemezek fajlagos ellenállására vonatkozó méréseimből kitűnik, körülbelül $12\ \mu\mu$ -nél kezdődik a «surlódási erő» nagyobb mérvű növekedése. Ugyancsak az észlelések szerint k -nak $12\ \mu\mu$ -nél, tehát mielőtt a «surlódási erő» növekedése következtében k csökkenne, egy maximuma van. Közéleső dolog ezt a maximumot is a vezető-elektronoknak tulajdonítani. Azt mondhatjuk, hogy a szabad elektronok befolyása az abszorptióra, mely vastag rétegeknél az egész spektrumra kiterjed, $12\ \mu\mu$ -nél, még mielőtt teljesen megszűnnék, a spektrum egy bizonyos vörös vagy ultravörös részére koncentrálódik. Ezt úgy magyarázhatjuk, hogy a mellett, hogy a «surlódási erő» a rétegek vékonyodásával nagyobbodik, a szabad elektronok folytatólagosan ultravörös önfrequentiájú kötött elektronokká alakulnak át, más szóval, vékony rétegekben egy véges, λ_0 saját-hullámhosszra tesznek szert, mely a tömör fémekben nyilván végtelen nagy. Bizonyos vastagságú rétegeken tehát a szabad elektronoktól származó abszorptio λ_0 környezetében túlsúlyra vergődik a spektrum egyéb vidékeivel szemben, sőt megfelelő viszonyok között, ha ugyanis a «surlódási erő» még nem nagyon nagy, a szabad elektronok λ_0 környezetére koncentrált abszorptiója nagyobb lehet, mint a szabad elektronoktól származó abszorptio a spektrum ugyane részében a színfémekben.

Ha ezt a feltevést bevisszük a dispersio alapegyenleteibe, valóban oly görbéket fogunk kapni, melyek az észleléseknek mindenben megfelelnek.

A dispersio alapegyenletei:¹

$$\left. \begin{aligned} 2nk &= \frac{C_1 \lambda'_{10} \lambda^3}{\lambda^2 + \lambda'^2_{10}} + \sum_1 \frac{C \frac{1}{\lambda \lambda'}}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2}} \\ n^2 - k^2 &= 1 - \frac{C_1 \lambda'^2_{10} \lambda^2}{\lambda^2 + \lambda'^2_{10}} + \sum_2 \frac{C \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2}}, \end{aligned} \right\} \text{I.}$$

¹ L. pl. W. MEIER: Ann. d. Phys. 31. 1036. 1. 1910.

a hol az egyes betűk jelentése a következő: λ a beeső fény hullámhossza, $\lambda'_{10} = \frac{2\pi cm_1}{h_1}$ egy hosszúság (c a fény továbbterjedésének sebessége, m_1 a szabad elektronok tömege, h_1 a szabad elektronokra ható surlódási erő) jellegű állandó, λ' ugyanaz a kötött elektronokra vonatkozóan, λ_0 a kötött elektronok saját hullámhossza és végül

$$G = \frac{Ne \left(\frac{e}{m} \right)}{\pi c \lambda^2},$$

a hol e az elektron töltése, N pedig az illető fajtájú elektronok száma köbczentiméterenként. Az első tag a szabad elektronokra, a Σ a kötött elektronokra vonatkozik. A szabad elektronokra vonatkozó tag számlálóját és nevezőjét osszuk most $\lambda'^2_{10}\lambda^4$ -nel:

$$2nk = \frac{G_1 \frac{1}{\lambda \lambda'_{10}}}{\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2_{10}}} + \sum \frac{G \frac{1}{\lambda \lambda'}}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2}};$$

$$n^2 - k^2 = 1 - \frac{G_1 \frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2_{10}}} + \sum \frac{G \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2}}.$$

Látható, hogy a szabad elektronokra vonatkozó tag úgy keletkezik az egyensúlyi helyhez kötött elektronokra vonatkozó Σ egyik tagjából, hogy $\lambda_0 = \infty$ -t írunk.

Tegyük most fel, hogy a rétegek vékonyodásával a szabad elektronok is fokozatosan kötött elektronokká alakulnak át és ezzel kapcsolatban véges saját-hullámhosszra tesznek szert a következő törvényszerűség szerint:

$$\lambda_s = \lambda_0 e^{\frac{\beta}{2} D}, \quad (8)$$

hol β egy pozitív állandó, D a réteg vastagsága; λ_0 pedig az a véges ultravörös érték, mely felé λ_s a $D=0$ határesetben convergál. Legyen e mellett továbbra is természetesen:

$$\lambda'_1 = \frac{\lambda'_{10}}{1 + \frac{a}{D}}, \quad (9)$$

a mi (1)-ből következik. Behelyettesítve ezeket a feltevéseket a dispersio alapegyenleteibe, lesz:

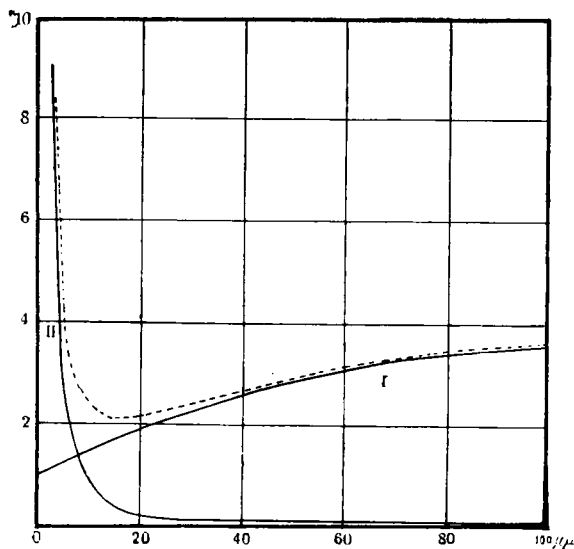
$$\left. \begin{aligned} 2nk &= \frac{C_1 \left(1 + \frac{a}{D}\right)}{\lambda \lambda'_{10}} \frac{\left(1 + \frac{a}{D}\right)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2 e^{\beta D}} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{\left(1 + \frac{a}{D}\right)^2}{\lambda^2 \lambda'^2_{10}}} + \Sigma_1 \\ n^2 - k^2 &= 1 + \frac{C_1 \left(\frac{1}{\lambda_0^2 e^{\beta D}} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2 e^{\beta D}} - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{\left(1 + \frac{a}{D}\right)^2}{\lambda^2 \lambda'^2_{10}}} + \Sigma_2 \end{aligned} \right\} \text{II.}$$

Mindenekelőtt megállapítható, hogy vastag rétegek esetében ($D=\infty$) a II. redukálódik az I. alatti egyenletekké. A $D=0$ határesetben pedig lesz:

$$\begin{aligned} 2nk &= \Sigma_1 \\ n^2 - k^2 &= 1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

A maximum és a minimum helyeit egész általánosságban diskutálni nehéz, mert bonyolódott egyenletre jutunk még akkor is, ha az exponentiális függvényt esetleg egy lineárisal közelítjük meg. $2nk$ maximumának és $n^2 - k^2$ minimumának helyéről azonban mindenesetre tájékozódhatunk a következő megfontolások alapján: $n^2 - k^2$ kifejezésében a szabad elektronokra vonatkozó tag a spektrumnak itt tekintetbe jövő, látható részében mindig negatív előjelű, mert $\lambda_0 > \lambda$. $n^2 - k^2$ -nak ott van a minimuma, a hol e tag abszolút értékének a maximuma van. Azt kell tehát keresnünk, hogy úgy $2nk$ mint $n^2 - k^2$ kifejezésében a szabad elektronokra vonatkozó tagnak hol van maximuma? Nyilván ott, a hol e tagok nevezőjének a minimuma van. Hogy a nevezőnek van-e minimuma, az már most λ_0 , továbbá a és β

értékeinek megválasztásától függ. Ha λ_0 , továbbá α és β értékei elég kicsinyek, akkor van minimum. A viszonyokat legjobban illusztrálja a 3. és 4. ábra. Ez ábrákon az I. görbe a nevező első tagját, a II. görbe a nevező második tagját ábrázolja mint a D vastagság függvényét. A pontozott görbe a teljes nevező. A 3. ábrán $\alpha=22$, $\beta=0.05$, a 4. ábrán $\alpha=50$, $\beta=1$. Hogy a viszonyok kényelmesen ábrázolhatók legyenek, a nevező mind-



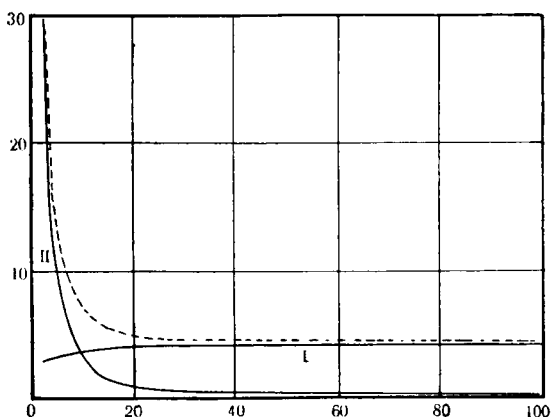
3. ábra.

két tagja meg van szorozva 10^{13} -nel. Az ábrák vörös fényre és $\lambda_0=1000 \mu\mu$ -re vonatkoznak.

λ'_{10} a MEIER¹ által meghatározott érték. A 3. és 4. ábrán látható, hogy a 8. és 9. egyenletben megfogalmazott feltevés α és β alkalmas megválasztása mellett számot adhat egyrészt az oly fémek optikai viselkedéséről, melyek, mint például az arany, vékony rétegein n^2-k^2 minimumát észleltem, de beszámolhat az oly fémek viselkedéséről is, mint például a platina, melyeken ily minimum nincs.

¹ W. MEIER, l. c.

A vékony rétegek optikai viselkedése szempontjából esetleg még lehetne a II.-ban szereplő exponenciális függvényt $1 + \beta D$ -vel megközelíteni, bár a tapasztalattal kevésbé jól egyező eredményeket kapnánk; de fontos az exponenciális függvény azért, mert általa a szabad elektronok vékony rétegekben jelentkező véges saját-hullámhossza a rétegek vastagodásával igen gyorsan közeledik a ∞ felé, ami a vastagabb rétegek vezetőképessége szempontjából fontos. Alapul véve például a 3. ábra száma-



4. ábra.

taít, $\lambda_0 = 1000 \mu\mu$, $\beta = 0.05$ -t, egy $D = 1000 \mu\mu$, tehát 0.001 mm vastag rétegben már

$$\lambda_s = 1000 e^{25} \mu\mu > 10^{13} \mu\mu = 10 \text{ km},$$

egy $D = 0.01 \text{ mm}$ vastag rétegben pedig már

$$\lambda_s > 10^{91} \text{ km},$$

a mi, $3 \cdot 10^5 \text{ km}$ lévén a fény terjedési sebessége, bizvást végtelennek mondható.¹ És e viszonyok a β konstans értékének na-

¹ ENSKOG, (Ann. d. Phys. 38. 761. l. 1912) számításai szerint az idő, mely alatt egy vezető-elektron szabadon mozog, vagyis mely két egymásra következő összeütközése között eltelik, 10^{-15} sec. rendű.

gyobb megválasztásával még javíthatók a nélkül, hogy ezáltal a várható optikai viselkedés lényegesen más lenne. Ha például $\beta=0.1$ -nek választom, akkor már egy $D=0.001$ mm vastag rétegben

$$\lambda_s > 10^{11} \text{ km};$$

egy $D=0.01$ mm vastagságú rétegben pedig $\lambda_s > 10^{191}$ km.

Bár egyelőre még nem tudom számítással követni, hogy a szabad elektronoknak a rétegek vékonyodásával a 8. feltevés értelmében folytatólagosan kötött elektronokká való átalakulása, vagyis a fellépő és egyre nagyobbodó quasierlasztikus erő, hogyan és mennyiben járul hozzá a réteg vezető-képességének csökkenéséhez, melyet lényegében 9. határoz meg, de a vékony rétegek fajlagos ellenállása körül tapasztalt bizonyos kvalitatív jelenségek 8. alapján egyszerű magyarázatukat lelnék. (Lásd a 450. oldalt.)

Lássuk már most, hogy feltevéseink alapján mennyire tudjuk megmagyarázni $2nk$ és n^2-k^2 -nak, mint D függvényeinek viselkedését. Néhány szót kell itt szólnom a 8. és 9. formulában szereplő állandók értékeinek megválasztásáról. A λ_0 és β állandók numerikus értékeinek meghatározása kísérleti úton is történhetné s ily mérések pozitív eredménye direct úton támogatná a 8. feltevés helyességét. E végből néhány kellő vékonyságú, például a 9.2, 12.0 és 17.3 $\mu\mu$ vastagságú rétegek absorptióját kellene folytatólagosan az ultravörös spektrumban is meghatározni. Feltéve, hogy az absorptio-görbe alapján az ultravörös önrezgés helye bizonyos pontossággal megállapítható, legyen az a különböző rétegekben λ_9 , λ_{12} és λ_{17} . Akkor például

$$\frac{\lambda_9}{\lambda_{17}} = e^{\frac{\beta}{2} (9.2-17.3)}$$

és

$$\lambda_{9.2} = \lambda_0 e^{\frac{\beta}{2} 9.2}.$$

Ily mérések hiányában próbálgatásra vagyunk utalva, melyekre vonatkozólag némi directívát adnak és bizonyos határokat szabnak n^2-k^2 minimumának helye és mélysége. Én λ_0 és β értékét úgy választottam, hogy $\lambda=700 \mu\mu$ -nél n^2-k^2 minimumát

a számított görbe lehető hűen előállítsa. Tekintetbe kell venni, hogy β értékének növelése a minimum helyét kisebb vastagságok felé tolja el, mélységét pedig csökkenti.

Ezt a hatást λ_0 értékének csökkentésével bizonyos mértékben ellensúlyozni lehet. Tekintetbe kell venni továbbá, hogy 10—12 $\mu\mu$ vastag rétegeken az önrezgés az ultravörösben legyen, de viszont ne nagyon távol, tekintettel e rétegek anomális dispersiójára. β értékét lehető nagynak igyekeztem választani, hogy a 8. feltevés quantitative még ismeretlen befolyását a vezetőképességre a lehetőségig csökkentsem. α értékét előző dolgozatomban meghatároztam és szinte változatlanul¹ átvettem. Mindezek alapján az állandók következő értékeiben állapodtam meg:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 22 \\ \beta = 0.05 \\ \lambda_0 = 1000 \mu\mu \end{array} \right\} \text{III.}$$

Ez értékekkel $n^2 - k^2$ minimuma $\lambda = 700 \mu\mu$ -nél hely és nagyság szerint jól előállítható. A minimum nagyságára vonatkozólag helyes értéket kapunk $\alpha = 22$, $\beta = 0.1$ és $\lambda_0 = 800 \mu\mu$ -vel is, de a minimum helye ezáltal az észlelt 12 $\mu\mu$ -ról 7—8 $\mu\mu$ -re tolódik el. A minimum hely és nagyság szerint előállítható az $\alpha = 50$, $\beta = 0.05$ és $\lambda_0 = 800 \mu\mu$ -vel is, de ekkor viszont a minimum után a számított görbe az észlelthez képest nem megy elég meredeken felfelé.

Az I. és II. egyenletekben szereplő C_1 és λ'_{10} állandók értékeit MEIER, ki az arany dispersióját a spektrumnak a $\lambda = 250 \mu\mu$ -tól $\lambda = 650 \mu\mu$ -ig terjedő részében vizsgálta, meghatározta és szorinte

$$\begin{aligned} C_1 &= 416 \times 10^{-7}; \\ \lambda'_{10} &= 11250. \end{aligned}$$

Tekintve, hogy az egész vastag (113 $\mu\mu$) rétegeimen meghatározott n és k értékek nem egyeznek teljesen MEIER-nek az ő elektrolytikus tükrén nyert értékeivel, vagyis az én vastag tükröm dispersiója némileg különbözik az ő tükrének disper-

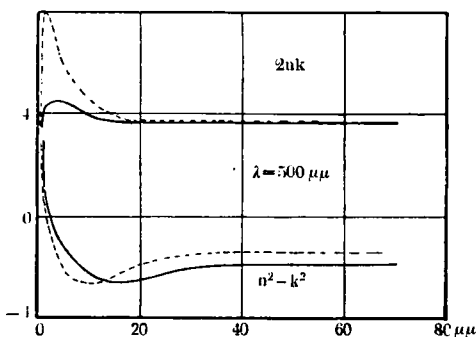
¹ Előző dolgozatom szerint α kb. 25.

síójától, a fenti számok nem alkalmasak teljesen az én tüköröm dispersiójának előállítására. Nehogy ez a körülmény az elmélet és a mérések eredményeinek itt következő összehasonlítását nagyobb mértékben zavarja, MEIER értékeit a saját vastag rétegeim dispersiójának megfelelően kissé megkorrigáltam. Ezáltal lesz

$$C_1 = 332 \times 10^{-7};$$

$$\lambda'_{10} = 11250.$$

Rétegeim ultraviola dispersióját megfelelő eszközök hiányában nem határozhattam meg és így nem tudom ellenőrizni, hogy MEIER értékeinek fenti korrigálása nem önkényes-e kissé



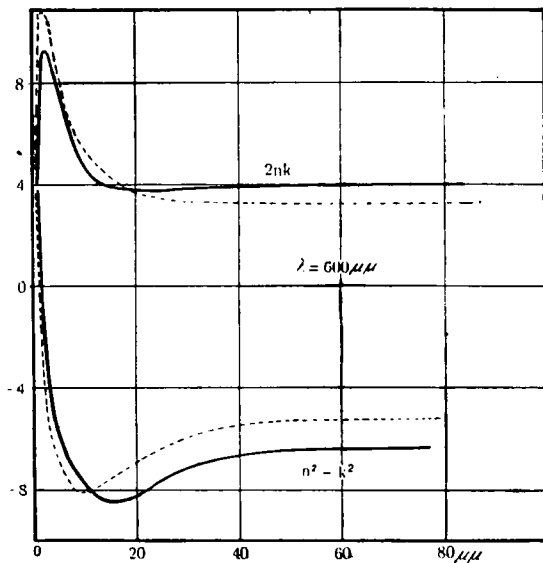
5. ábra.

az ultraviola dispersio szempontjából. Minthogy azonban minden valószínűség szerint, éppúgy, mint a spektrum jól látható részében, nem nagy eltérésekről van szó, másrészt, mint-hogy a MEIER-féle értékek, mint arra előző dolgozatomban rámutattam, úgyis bizonyos önkénnyel vannak meghatározva, a következőkben jobb hiányában is a fenti korrigált értékeket fogjuk használni. A kötött elektronokra vonatkozó Σ_1 és Σ_2 értékeit MEIER szerint változatlanul megtartottam.

Az ez adatok alapján $2nk$ és $n^2 - k^2$ -ra különböző színekben nyert elméleti görbék az 5., 6. és 7. ábrába pontozva vannak berajzolva. A kihúzott görbék az észlelt görbék úgy, mint azokat előző dolgozatomban észleléseim alapján a 17., 18. és 19. ábrába berajoltam. Az összehasonlítás kedvéért a jelen

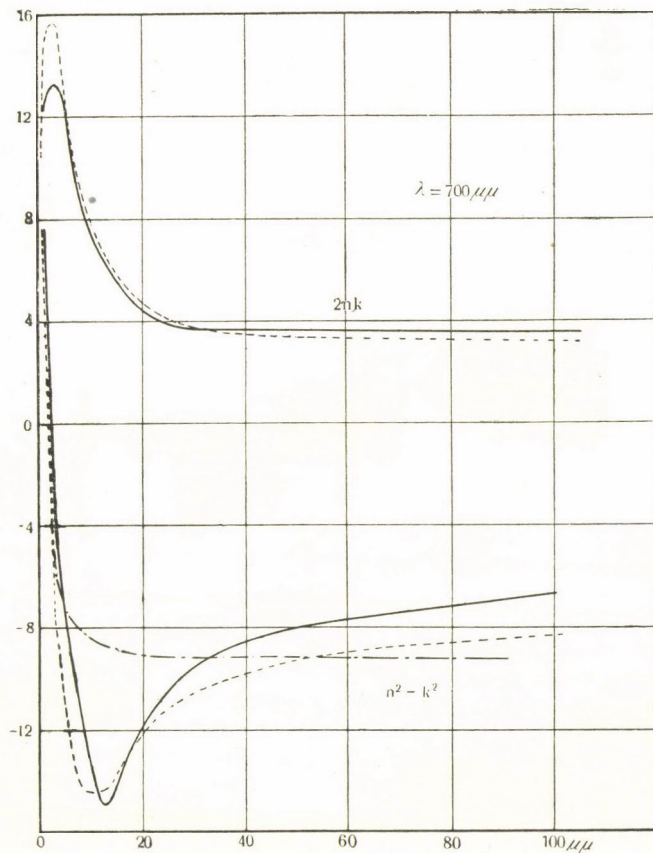
dolgozat 7. ábrájába —.—.— vonallal berajzoltam az $n^2 - k^2$ -ra $a=22$ -vel pusztán a 9. feltevés alapján nyerhető görbét is.

Az egyezés a pontozott és a kihúzott görbék között nagyon jónak mondható. Először is a theoretikus görbék, qualitative nézve a dolgot, teljesen ugyanoly típusúak, mint az észlelt görbék; másodszor pedig a numerikus egyezés is nagyon jó, különösen ha tekintetbe vesszük a dispersio konstansainak értékéről fent elmondottakat. Quantitative két észrevehető eltérés van.



6. ábra.

Az elméleti $n^2 - k^2$ görbék a vastag rétegeknél nem konvergálnak teljesen ugyanegy érték felé, mint az észlelt $n^2 - k^2$ -görbék. Minthogy a vastag rétegeknél a vékony rétegekre vonatkozó 8. és 9. feltevések sem természetüknél, sem pedig a bennök szereplő állandók értékeinél fogva már nem jönnek tekintetbe, az eltérés oka természetesen csakis abban kereshető, hogy a C_1 és λ_{10} dispersio-állandók nem alkalmasak az én vastag rétegeim dispersiójának teljes, numerikus előállítására. A másik nume-



7. ábra.

rikus eltérés az, hogy $2nk$ theoretikus maximuma minden színben körülbelül hárommal nagyobb, mint az észlelt maximum.

	100 $\mu\mu$	600 $\mu\mu$	700 $\mu\mu$
$2nk_e$	4.4	9.1	13.0;
$2nk_{sz}$	8.2	10.9	15.9.

Tekintve, hogy az észlelt dispersio (8.6) nagyon megközelelti a számított dispersiót (7.7), ebből a szempontból is javulás konstatálható az egyszerű 9. feltevéssel szemben; mi több: ez a körülmény nagyon valószínűvé teszi, hogy alkalmasabban

megválasztva a dispersio állandóit, ez a különbség is eltüntethető lesz. Ugyanis a 8. alatti feltevés 9.-cel szemben $2nk$ számított maximumát csak növelheti. Alig valamivel növeli $\lambda=500 \mu\mu$ -nél, azonban $\lambda=700 \mu\mu$ -nél már körülbelül 4·5-del és azáltal a számított dispersiót összhangba hozza az észlelittel.

$2nk$ maximumát $500 \mu\mu$ -nél tehát még lényegében a 9. határozza meg, erről a maximumról pedig előző dolgozatomban kimutattam, hogy az csakis C_1 és λ'_{10} -tól függ. Ha tehát ezek értékének helyes megválasztásával sikerül majd a maximumot $500 \mu\mu$ -nél a kellő észlelt értékre lenyomni, akkor a 8. feltevessel megkorrigált dispersio következtében $700 \mu\mu$ -nél is teljes lesz az egyezés.

A 8. feltevés alapján továbbá néhány más, inkább kvalitatíve észlelt jelenség is magyarázatát leli. Nevezetesen mind a négy általam vizsgált fémnél azt tapasztaltam, hogy a fajlagos ellenállás egy bizonyos vastagságtól kezdve nagyobb mértékben növekedett, mint az a 9. alapján várható lett volna, mi több, a fajlagos ellenállás görbéje D véges értékénél ∞ -re szökkent, holott egyedül a 9. alapján a fajlagos ellenállás csak $D=0$ -nál lehet ∞ .

4—5 $\mu\mu$ vastag arany- és ezüstrétegek már nem vezették az áramot; platinarétegek azonban egészen 1 $\mu\mu$ -ig vezették az áramot. Ez úgy magyarázható, hogy a 8. értelmében a vékony rétegekben fellépő quasielastikus erő (ha ν_s -el jelölöm a sajátrezgés frekvenciáját, $\nu_s^2 = \frac{k}{m}$, a hol k a quasielastikus erő, m az elektron tömege)¹ is hozzájárul a vezetőképesség csökkentéséhez és ha bizonyos vékonyságon alul a szabad elektronok teljesen átalakultak kötött elektronokká, a réteg egyáltalában megszűnik az áramot vezetni. Arany- és ezüstrétegek optikai viselkedéséből (k maximuma) következtethető már most, hogy ezeken a rétegeken már nagyobb vastagságoknál teljesen átalakultak a szabad elektronok ultravörös frekvenciájú kötött elektronokká, mint platina-rétegeken, hol k -nak nincs maximuma.

Érthető lenne tehát, hogy az aranyrétegek ellenállása hama-

¹ W. MEIER, l. c. 1036. oldal.

rabb lesz végtelen nagy, mint például a platina-rétegeké. Ezzel függ össze az a tapasztalat is, hogy a 6—8 $\mu\mu$ -nél vékonyabb aranylemezek átmenő fényben a réteg vékonyodásával változtatják a színüket, mindinkább kékülnek, míg ezzel szemben platina-rétegek csak egyre halványabb szürke, de *szürke* szint mutatnak. Aranyrétegeken ugyanis már 6—8 $\mu\mu$ -nél előtérbe lép a a spektrum vörös végén a kötött elektronokká átalakult szabad elektronok ultravörös önrezgésének absorptiója, míg platina-rétegeken az ultravörös önfrequentia csak sokkal kisebb rétegvastagságnál fejlődve ki, a platinarétegek sokkal kisebb vastagságokig változatlanul filtrálják a fényt.

Ha a 12 $\mu\mu$ -nél vékonyabb rétegeken a 8. értelmében a spektrum vörös végén fellép egy önfrequentia, akkor egyszerűen megmagyarázhatjuk a vékonyabb rétegek anomális dispersióját is. Az arany dispersiója ugyanis a spektrum látható részében normális. MEIER észlelései és számításai szerint az arany dispersiója a vezető elektronokon kívül két ultraviola önrezgésre $\lambda_0=150 \mu\mu$ és $\lambda_0=370 \mu\mu$ -nél vezethető vissza. Ez ultraviola önfrequenciáktól a spektrum látható részében származó normális dispersio nyilván nagyobb, mint a szabad elektronoktól származó anomális dispersio és így végeredményben az arany dispersiója normális. De ez csak a vastag rétegeken van így. Méréseim tanúsága szerint már a 12·0 és 9·2 $\mu\mu$ vastag aranyrétegek anomális dispersiót mutatnak a spektrum vörös végében. Még vékonyabb rétegeken pedig az anomális dispersio az egész látható spektrumra kiterjed. Ez azt mutatja, hogy a rétegek vékonyodásával először a spektrum vörös vége, majd az egész látható spektrum egy jól kifejlődött, a spektrum vörös vége felől közeledő absorptio-sáv közelébe² jut.

² A látható spektrum belekerül az esetleg széles absorptio-sáv úgynevezett „Halbwertsintervallum”-ába. Lásd W. VOIGT: *Magneto- und Elektro-optik*, 115—117. oldal. Leipzig, 1908.

Összefoglalás.

Vékony aranyrétegek absorptio-indexét spektralphotometrikus úton meghatározva, mindenben beigazolvva találtam előbbi, indirect módon végzett észleléseim eredményeit, nevezetesen, hogy egy bizonyos vastagságú aranyréteg absorptio-indexe nagyobb a nálánál vastagabb és vékonyabb ugyancsak aranyrétegek absorptio-indexénél. (k max.) Ebben a körülményben kereshető azoknak az eltéréseknek az oka, melyek vékony aranyrétegek optikai viselkedése és vékony fémrétegek optikájának W. PLANCK-féle elmélete között fennállottak. Szükséges volt tehát ennek az elméletnek az észleléseknek megfelelő átalakítása. Ez sikerült a 8. feltevéssel, hogy a vékony rétegekben a szabad elektronok kötött elektronokká válnak egy ultravörös önfrequenciával. Ezáltal teljes qualitativ és a körülményekhez képest jó numerikus egyezést is kapunk az elmélet és az észlelések között. Az új feltevés továbbá plausibilis magyarázatát adja a legvékonyabb aranyrétegek anomális dispersiójának, színváltozásának *átmenő fényben*, továbbá annak a körülménynek is, hogy például platinarétegektől eltérően vékony aranyrétegek már körülbelül 4—5 μ -tól kezdve egyáltalán nem vezetik az elektromos áramot.

★

A méréseket a kolozsvári Tud. Egyetem természettani intézetében végeztem. Kedves kötelességem, hogy az intézet igazgatójának, TANGL KÁROLY professor úrnak, ki a Martens-Grünbaum-féle photometer beszerzését is lekötélező előzékenységgel engedélyezni kegyeskedett, szíves érdeklődéseért és jóindulatú támogatásáért e helyen is hálás köszönetet mondjak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 április 10.-én tartott üléséből.)

KÜLÖNBÖZŐ TÖRÉSŰ, ÁTLÁTSZÓ KÉT KÖZEG VÁLASZFELÜLETE KÖZELSÉGÉBEN LÉVŐ FÉNYLŐ PONTOK ELMÉLETÉHEZ.

FRÖHLICH IZIDOR r.-tagtól.

TARTALOMMUTATÓ.

Tájékoztató, bevezető rész.

1. §. Jelen dolgozat célja: Idetartozó előbbi elméletem továbbfejlesztése, tökéletesítése, általánosítása. 454. lap.

2. §. Előbbi elméletem vázlatos ismertetése. A nyert eredmények a tapasztalattal egyezők. 457. lap.

Az általánosabb elmélet kifejtése, mikor a fénylő pontok az elválasztó síktól optikailag jelentékenyebb távolságban vannak.

3. §. Segédttétel: Pontszerű fényforrásból induló sugárkúp szétterülése sík válaszfelületen végbement törés után. Divergentia-coefficiens (szétterülési együttható). Fontos jegyzet a viszonyosági vonatkozások tárgyában. 1. és 2. ábra, 459. lap.

4. §. Tetszésszerű, egyszínű, pontszerű fényforrásból származó törött fénynyaláb vektorának és összetevőinek kifejezése a teljes fényvisszaverődés határszögén innen és azon túl. 469. lap.

5. §. Segédttétel: Tetszésszerű, egyszínű, pontszerű fényforrásból keletkezett sugár vektorának kifejezése a meridionális rendszer alapján. A beesés síkjára merőleges és a vele párhuzamos összetevőjének megalkotása. 3., 4., 5., 6. ábra. 474. lap.

6. §. A törött sugarak vektorainak részletes megvizsgálása

a teljes visszaverődés határszögén *innen* eső térben, mikor a fénylő pont nincsen optikailag közel az elválasztó síkhoz. Algebrai és physikai fejtegetés. 7., 8., 9. ábra. 484. lap.

7. §. A törött sugarak vektorainak részletes megvizsgálása a teljes visszaverődés határszögén *túl* eső térben, mikor a fénylő-pont nincsen optikailag közel az elválasztó síkhoz. 492. lap.

Az általánosabb elmélet kifejtése, mikor a fénylő pontok az elválasztó síktól optikailag kicsiny távolságban vannak.

8. §. A második, a sűrűbb közegbe szétszórt, törött fény-sugarak vektorainak tapasztalatszerű megvizsgálása, mikor a fénylő pont igen közel esik az elválasztó síkhoz. 496. lap.

9. §. A teljes visszaverődés határszögén *belül* haladó, szétszórva törött sugarak vektorainak és összetevőinek közelebbi megvizsgálása, ha a fénylő pont az elválasztó síkhoz optikailag közel esik. 499. lap.

10. §. A teljes visszaverődés határszögén *kívül* haladó, szétszórva törött sugarak vektorainak és összetevőinek közelebbi megvizsgálása, ha a fénylő pont az elválasztó síkhoz optikailag közel esik. 501. lap.

11. §. Specziális esetek: Az a , b , c amplitudójú gerjesztő összetevők közül mindig csak egy-egy legyen a zérustól különböző. Az elválasztó síkkal párhuzamos, vagy erre merőleges lineáris, gerjesztő vektor. 507. lap.

12. §. További specziális esetek: Az elválasztó síkkal párhuzamos, ellipsises, gerjesztő vektor. Részletezés. 511. lap.

13. §. További specziális esetek: Az elválasztó síkra merőleges, ellipsises gerjesztő vektor. Részletezés. 513. lap.

Tájékoztató, bevezető rész.

1. §. *Jelen dolgozat célja: Idetartozó előbbi elméletem továbbfejlesztése, tökéletesítése, általánosítása.*

Közismert tény a fénytanban, hogy a mikor a pontszerű fényforrások igen közel vannak különböző törésű, átlátszó két közeg közös határfelületéhez, különösen pedig, mikor a fénylő-

pontok az optikailag ritkább közegben fekszenek: az ily fény-pontokból induló sugarak az optikailag sűrűbb közeg oly helyein is észrevehetők, azaz e pontok ott is megfigyelhetők, a hol a geometriai optika egyszerű törvényei szerint sugarak nem léphetnének fel, illetőleg ily fénylő pontok nem volnának észlelhetők.

Még csak kevés évvel ezelőtt e nevezetes sajátság éppen csak ismert volt, de sem quantitativ és beható kísérleti vizsgálatával, sem elméletével nem foglalkoztak.

Az 1911. évben egy terjedelmesebb dolgozatot¹ terjesztettem a Tekintetes Akadémia elé, a melyben szerencsém volt közölni az ily fénylő pontok által a tér legkülönbözőbb irányába szétküldött sugarak polárossági állapotának kísérleti megvizsgálása eredményeit. Ezek kapcsán megkísérlettem ezeknek az eredményeknek egybevetését a FRESNEL-féle fénytörési elmélet alkalmazásából folyó, de a teljes visszaverődés határszögén túl is érvényesített formulákkal; a megegyezés a polározási állapotra nézve elég jól bevált.

E kísérletsorozatok arra az esetre vonatkoztak, mikor a beejtett intenzív fénynyaláb, a mely a válaszfelület közelségében lévő ultramikroskopos koromszemecskéket optikailag gerjesztette, ez elválasztósíkra merőlegesen esett és síkban, lineárisan poláros fényből állott; ez által e szemecskék az elválasztó síkkal párhuzamosan váltakozó, lineáris gerjesztő vektort nyertek.

E vizsgálatokat KURDILLA FERENCZ tanár a Tekintetes Akadémia elé az 1912. évben terjesztett hosszabb dolgozatában² kiterjesztette azokra az esetekre is, a mikor a beejtett, gerjesztő fénynyaláb beesésének szöge tetszésszerű volt ugyan, a fénye azonban mindig a beesés síkjában volt polározva, azaz a koromszemecskék gerjesztő fényvektora ismét párhuzamos volt az elválasztó síkkal.

¹ FRÖHLICH IZIDOR: Az elhajlított fény polárossági állapotának újabb, nevezetes törvényszerűségei. Előterjesztve 1911. évi május hó 15-én. M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője. XXX. kötet 1—97. ll. 1912.

² KURDILLA FERENCZ: Ultramikroskopos részecskék létesítette fény-elhajlás polárosságáról. Előterjesztve 1912 évi november hó 18-án. M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője XXXI. kötet, 121—183. ll. 1913.

Itt is a kísérletekből nyert adatok és az előbb jelzett elméleti formulák a koromrészekéből haladó sugarak polárossági állapotára vonatkozólag elég jó egyezést mutattak.

De ez az elmélet főleg a gerjesztett, szétszórt sugarak *polárossági állapotának* előállítására szolgált és, miként már említettük, e tekintetben elég jó szolgálatot tett: ugyanis e sugarak ellipsis-vektorai tengelyeinek hányadosát és összetevőiknek phasis-külömbségét, legalább *általánosságban*, a tapasztalattal megegyezőleg tüntette elő.

Ellenben e fényvektoroknak külön, abszolút értékei kifejezéseit általánosságban véve nem hasonlítottam össze a megfigyelhető sugarak fényerősségével, minthogy az összehasonlítás oly fényintenzitási kísérleti megvizsgálásokat követelt volna, a melyekkel ez alkalmakkor nem foglalkoztunk. De egy specziális esetben, ugyanis a teljes visszaverődés határszögénél, a melynél a törött sugár ez elmélet szerint eltűnnék, ez mégis észlelhető fényerősségű; s így akkori elméletem e folyománya nem egyezett a tapasztalattal, miként azt egyenesen ki is jelentettem.¹

Kiváncosnak látszott a jelzett elméletemet akként kiegészíteni, tökéletesíteni, hogy belőle a fényvektorok amplitúdóinak abszolút értékei is, nemcsak általános menetükben, hanem különösen az éppen említett specziális esetben is, a tapasztalattal egyezően adódjanak.

Ez alkotja a jelen közlemény főcélját; az elmélet továbbfejlesztése egyszerűen abban áll, hogy a közismert FRESNEL-féle, már fentjelzett fénytörési elméletet nemcsak, mint azt rendesen szokás tenni, párhuzamos sugárnyalábokra alkalmazom, hanem keskeny kúpszerű sugárkévékre is kiterjesztem és az így nyert eredményeket a totális reflexio határszögén túl terjedő térre nézve is érvényesítem.

Ekként a fent kíváncosnak jelzett czélt el lehetett érni, a miközben azonban a polározási állapotra vonatkozó, fent említett, már előbb nyert elméleti eredményeim változatlan érvényességben megmaradtak.

¹ FRÖHLICH, i. h. 72. lap.

2. §. Előbbi elméletem vázlatos ismertetése. A nyert eredmények a tapasztalattal egyezők.

E §-ban némileg megváltoztatom, általánosítom idézett előbbi közleményemben¹ használt jelzéseimet, hogy megegyezzenek jelen dolgozatom további, érdemleges részei jelzéseivel.

Legyen ugyanis ezentúl, jelen dolgozat egész terjedelmében: n_1, n_2 , a két, egytörésű közeg abszolút törésmutatója; φ_1, φ_2 tetszésszerű szétaszórt sugár beesés- és törésszöge; e szögek mindig egy síkban vannak és rájuk nézve áll:

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2;$$

$A_{1,m}; A_{1,p}$ az 1. közegből a 2. közeg felé induló sugár vektorának a besés síkjára merőleges és a vele párhuzamos összetevője amplitudója;

$F_{1,m}; F_{1,p}$ a FRESNEL-féle közismert, sík hullámok esetében érvényes törési együtthatók, mikor a törés az 1. közegből a 2. közegbe történik, hol

$$F_{1,m} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad F_{1,p} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Akkor e törött sugár vektora említett két összetevőjének amplitúdói a törés után rendre

$$A_{1,m} \cdot F_{1,m}; \quad A_{1,p} \cdot F_{1,p}.$$

Ha most is, mint az idézett helyen, felvesszük, hogy az 1. közegben lévő, egyszínű, pontszerű fényforrás nem más, mint valamely kicsiny részecskének a válaszsíkkal párhuzamosan (például itt a 6. ábra szerint az $X_1 X_1 \dots$ mentén) végbemenő váltakozása, akkor az ily fénylő pontból kiinduló szétszórt sugarak vektorai oly meridionális rendszert alkotnak, a melynek symmetria-tengelye az az egyenes, a melynek mentén e pontszerű fényforrás gerjesztő vektora váltakozik (azaz, e példában az $X_1 X_1$ egyenes).²

Jelezze most valamely ily szétszórt sugár haladási iránya

¹ FRÖHLICH: i. h. 22. és 23. §§., 64--74. ll.

² Erre nézve részletes tájékozást nyújt a jelen dolgozat 5. §-ának lábjegyzéke.

és a közelségében lévő elválasztósík normálisa által az 1. közegben képzett szöget φ_1 , akkor e φ_1 nem más, mint a 6. ábra (479. lap) szerinti S_1RQC szétszóró sugárnak e válaszsíkra vonatkozó (ott φ -vel jelölt) beesésszöge. Legyen továbbá ugyanez ábra szerint ϑ az a szög, a melyet ugyane sugár és a válaszsík normálisa által képezett síknak, azaz e sugár említett beeséssíkjának normálisa alkot a gerjesztő vektornak (itt X_1X_1 -gyel jelzett) egyenesével; végre legyen a egy amplitudo jellegű állandó.

Ekkor, miként azonnal adódik,¹ ez X_1X_1 körül létesült meridionális vektorrendszer szabálya szerint áll:

$$A_{1,m} = a \cos \vartheta; \quad A_{1,p} = a \sin \vartheta \cos \varphi_1;$$

úgy, hogy a nevezett két összetevőnek a törés után az amplitudói:

$$A_{1,m} F_{1,m} = a \cos \vartheta \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$A_{1,p} F_{1,p} = a \sin \vartheta \cos \varphi_1 \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)};$$

ellenben pházisai egymással egyenlők maradnak, mert ezek a törés folyamatánál fogva nem szenvednek változást, legalább a meddig ezek az amplitudók valós értékűek.

Jelezzé most még θ azt a szöget, a melyet a törés után e két vektorösszetevő lineáris eredője alkot a szétszóró sugár s az elválasztósík normálisa által meghatározott síknak normálisával: a mely itt a merőlegesen beeső fénynyaláb esetében egyszersmind e szétszóró sugára elhajlítási (szétszórási) síkjának is a normálisa.

Ekkor e szögre nézve:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_{1,p} \cdot F_{1,p}}{A_{1,m} \cdot F_{1,m}} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \operatorname{tg} \vartheta.$$

A meddig ez a hányados reális, ez az eredő vektor is csak lineáris lehet; ez pedig addig áll, míg φ_2 kisebb a teljes visszaverődés határszögénél, vagy legfeljebb egyenlő vele; ez alatt egyszersmind $0 < \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$.

¹ FRÖHLICH, i. h. 67. lap.

Ha φ_2 nagyobb a teljes visszaverődés határszögénél, akkor $\cos \varphi_1$ imaginárius; akkor az $A_{1,m} \cdot F'_{1,m}$ és az $A_{1,p} \cdot F'_{1,p}$ szorzományok komplex mennyiségekké válnak, a melyeknek, a fényvektorok esetében szokásos FRESNEL-féle értelmezési eljárás szerint, a physikai jelentését az idézett helyen részleteztem, valamint kifejeztem az ily esetben az elméletnek megfelelő reális, ellipsisszerű fényvektor összetevőinek amplitudóit és phasisait; ezekből pedig az amplitudók hányadosát és a két összetevő phasiskülönbségét. Így azután ez ellipsisvektor főtengelyeinek hányadosát, e főtengelyek irányítását és e vektor keringése előjelét, szóval e vektor polározási állapotának jellemző meghatározóit lehetett kifejezni, a mi az idézett közleményben meg is történt. Ebben állott előbbi elméletem lényege.

Jegyzet: A jelzett polározási állapot említett jellemzőit egyébként az akkor, a teljes visszaverődés határszögén túl lévő térben komplex jellegűvé vált $\operatorname{tg} \theta$ kifejezésének reális és imaginárius részéből közvetlenül állíthatni elő.¹ Ugyanis ily kifejezések esetében a reális részt és az imaginárius résznek reális együtthatóját véve: e két mennyiség négyzetösszege egyenlő a két vektorösszetevő reális részei amplitudói hányadosa négyzetével; másrészt ugyanennek a két reális mennyiségnek a hányadosa egyenlő a két vektorösszetevő reális részei phasis-különbségének trigonometriai tangensével.

Az általánosabb elmélet kifejtése, mikor a fénylő pontok az elválasztósíktól optikailag jelentékeny távolságban vannak.

3. §. *Segédétel: Pontszerű fényforrásból induló sugárkúp szétterülése sík válaszfelületen végbement törés után. Divergentia-coëfficiens (szétterülési együttható).*

Reátérek most általánosabb elméletem fejtegetésére, de e végből egy fontos, nevezetes segédételt kell megállapítanom.

¹ Ily előállítások találhatók: ARTHUR SCHUSTER: Einführung in die theoretische Optik. Übersetzt von H. KONEN. Leipzig und Berlin, 1907; 23, 24. lap. — WOLDEMAR VOIGT: Magneto- und Elektro-Optik. Leipzig, 1908, 31., 32. lap.

Vegyünk fel a két egyenletes és egyöntetű közeg egyikében lévő valamely fénylő pontot, a melyből minden irányban mennek szét sugarak. Ezekről a sugarakról feltételezni akarjuk, hogy transversális vektoraik lineáris vektorokból vannak összetéve.

Bármilyen természetű legyen is ez a fényforrás, annyit mindenesetre szigorúan lehet és szabad feltételezni, hogy a belőle induló bármely, igen keskeny sugárnyalábon belül, e nyalábnak bármely merőleges haránt-szelvénye bármely pontjára nézve e sugarak egy-egy lineáris vektorának amplitudója egyenletes; a mennyiben pedig ez a nyaláb a fénylő ponttal együtt ugyanabban a közegben van: ez az amplitudo, egy- és ugyanabban a nyalábban, oly távolságban e fényforrástól, a mely a hullámhosszúsághoz képest jelentékeny, a távolsággal fordítva arányosan csökken; ez közismert tapasztalat.

Egészen más az amplitudónak a forrástól számított optikai távolságtól való függése a törött nyalábban; e függés törvényének megállapításával kívánunk e §-ban foglalkozni; e törvényt éppen eredményünk fogja kifejezni.

1. Felvesszük most, az 1. ábra szerint, hogy az S_1 pontszerű fényforrásból az 1. közeg minden része felé haladnak sugarak; ezek közül azonban csak egy igen keskeny, körkúp-alakú nyalábot szemelünk ki s e mellett a rendes fényelhajlástól eltekintünk, mely itt, az 1. közegben szabadon végbemehető szétterülésnél csakugyan észrevehetetlen.

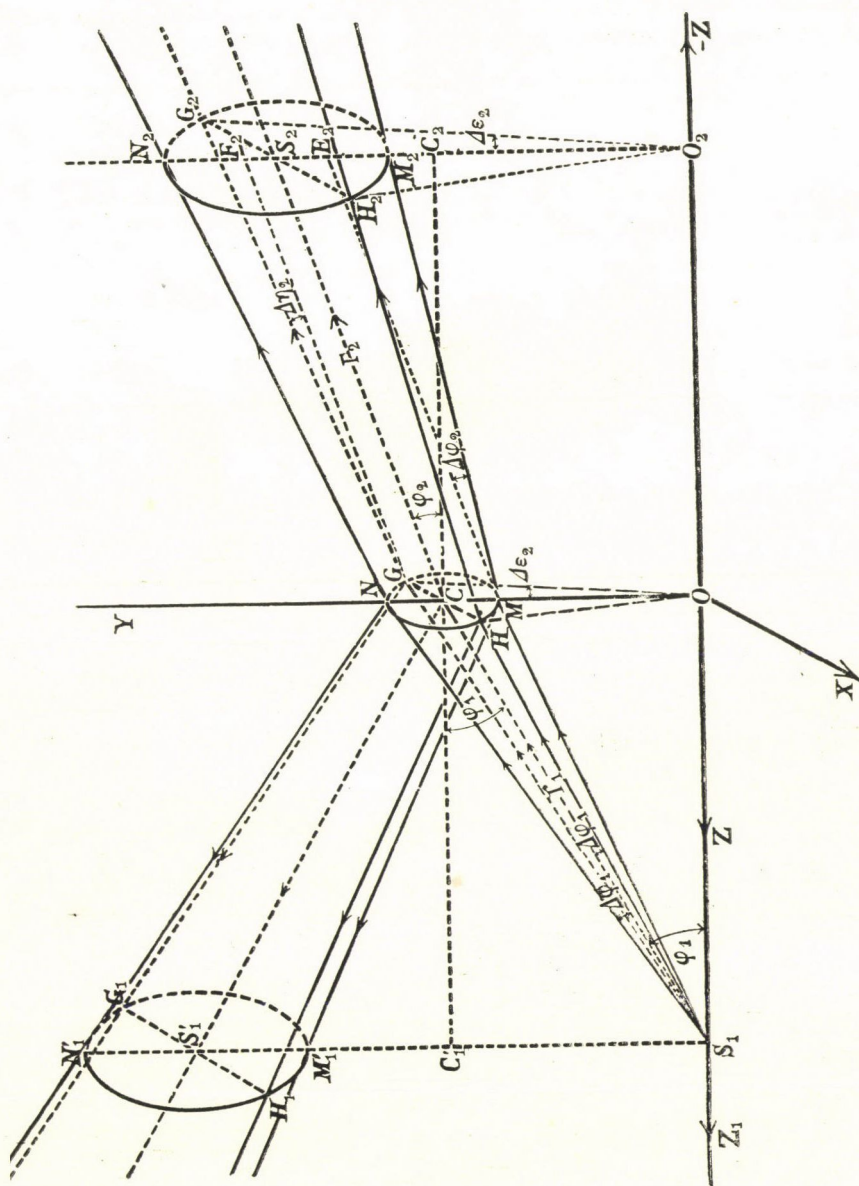
Keressük az S_1 optikai hatásánál fogva a 2. közeg S_2 pontjában előálló vektor vagy vektorok amplitudóját vagy amplitudóit, ha XOY a két közeg elválasztó síkja.

Erre nézve úgy járunk el, hogy az S_1 és S_2 helye megadott lévén, a válaszsík C pontját akként határozzuk meg, hogy az $\vec{S_1C}$ fénysugár a törés után a $\vec{CS_2}$ irányban haladjon tovább; hol, az 1. ábra jelzése szerint

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2; \quad (1)$$

és az S_1CS_2 tört egyenes és az $\vec{S_1O}$ normális a beejtés síkjában van.

Legyen, szintén e rajz szerint, az itt megvizsgálandó igen



1. ábra.

keskeny körkúpnyaláb nyílásszögének fele $d\varphi_1$; ¹ e körkúp sugarai zavartalanul terjednek az XOY sík határfelületig; a kúp palástfelülete e síkot az $MGNH$ ellipsisben találja.

Jelölje A_1 az S_1 -től számított távolságegységben előálló amplitudóját e sugarak egyik lineáris vektorának *ebben a keskeny nyalámban*; akkor $\frac{A_1}{r_1}$ ennek az amplitudónak az értéke r_1 távolságban az S_1 -től; azaz, ez az értéke a C helyen az $S_1C=r_1$ -re normális

$$r_1^2 \cdot \pi \cdot (d\varphi_1)^2 \quad (2)$$

területű keresztmetszetben; ez az amplitudo e keresztmetszet területegységére vonatkozik.

A sík határlapon törés és visszaverődés áll elő; s mint-hogy az S_1MGNH kúp igen keskeny, a legszigorúbb közelítéssel *ennek* a nyalábnak sugarai itt, a határsík legközelebbi szomszédságában, a *törés* és a *visszaverődés* szempontjából, egymással párhuzamosnak tekinthetők, úgy, hogy a *törött* és a *visszaverődött nyalábnak e határsík legközelebbi közelségében lévő részére nézve* FRESNEL-nek a párhuzamos fénynyalábokra vonatkozó törési és visszaverődési formulái szigorúan érvényesek.

A továbbiakban csak a *törött* nyaláb vizsgálatára szorítkozunk.

Jelölve itt általánosságban véve F_1 a FRESNEL-féle törési együtthatót, a *törött nyalábnak* a C -hez igen közel eső valamely normális keresztmetszetében az amplitudo:

$$A_{\tau,0} = \frac{A_1}{r_1} F_1, \quad (3)$$

hol a τ index a *törött* nyalábra vonatkozó jelző és $_0$ az $r_2=0$ helyre vonatkozik.

Ez a normális keresztmetszet szintén ellipsis; és pedig a beesés síkjára merőleges főtengelye

$$GH = 2r_1 d\varphi_1; \quad (4)$$

ellenben a beesés síkjában lévő főtengelye egyenlő az MN -nek a C -n átmenő, a CS_2 -re merőleges síkra való vetületével, a mely az 1. ábra szerint rendre írható:

¹ Az 1. és a 2. ábrán a $\varphi_1, \varphi_2; \varepsilon_1, \varepsilon_2; \eta_1, \eta_2$ szögek növekményei Δ betűvel, a szövegben d betűvel vannak jelezve.

$$MN \cdot \cos \varphi_2 = \frac{2r_1 d\varphi_1}{\cos \varphi_1} \cdot \cos \varphi_2. \quad (5)$$

E két főtengely értéke szerint e törött sugárnyalábnak a C helyhez legközelebbi, normális, ellipszisszerű keresztmetszeti területe

$$\pi \cdot r_1^2 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \cdot (d\varphi_1)^2. \quad (6)$$

Ennek a keresztmetszetnek területegységére vonatkozik a (3) alatti $\frac{A_1}{r_1} \cdot F_1$ amplitudo a törött fényben, miként ez a fénytörésnek és visszaverődésnek akár mechanikai, akár elektromágnességi, idetartozó elméletéből szigorúan és a tapasztalattal teljesen egyezően következik. A fénynyalábok területegységére való vonatkoztatása a mindenkori amplitudónak ugyanis az energiafluxusnak érvényben lévő elvével elválaszthatatlan kapcsolatban áll, mert ezek az elméletek mind szigorúan fejezik ki azt, hogy a beejtett, a visszaverődött és a törött nyaláb haránt-keresztmetszetein áthaladó energia-fluxusokra nézve az első mindig egyenlő az utóbbi kettőnek algebrai összegével, úgy, hogy az idetartozó amplitudók mindig a hozzájuk tartozó nyalábaik normális keresztmetszetei területegységeire vonatkozhatnak csak.

2. Ámde a mint a törött nyaláb harántmetszetét a C -től mindinkább távolabbra eső helyeken megvizsgáljuk: e keresztmetszet alakja ellipsis marad ugyan, de főtengelyeinek hányadosa a C -től számított különböző helyeken különböző.

Ennek a harántmetszetnek területére szükségünk van, hogy a benne előálló amplitudót az $\overline{S_1 C} = r_1$, a $\overline{CS_2} = r_2$ távolságoknak, valamint a φ_1 és φ_2 szögeknek függvényeként fejezhessük ki.

Az 1. ábrából azonnal kitetszik, hogy az $MGNH$ és az $M_2 G_2 N_2 H_2$ törött nyalábnak a beesés síkjában és e síkra merőleges irányban a szétterülése egymástól lényegesen különböző.

A beesés síkjában $d\varphi_2$ az iránykülönbség a $\overline{CS_2}$ középső sugár és az $\overline{MM_2}$ vagy az $\overline{NN_2}$ szélső sugár között; az a *tangenciális divergentia*, a beesés síkjában való szétterülés.

A beesés síkjára merőleges síkban $d\gamma_2$ az irányeltérés a

\overline{CS}_2 középső sugár és a \overline{GG}_2 vagy a \overline{HH}_2 szélsősugár között; ez a *sagittális divergentia*, a beesés síkjára merőleges szétterülés.

a) A *tangenciális divergentia* azonnal adódik, mivel az $\overline{S_1M}$ sugárból a törés után \overline{MM}_2 sugár, éppen így $\overline{S_1N}$ -ből \overline{NN}_2 sugár lesz, úgy, hogy az

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$$

egyenletből nyerjük:

$$\begin{aligned} n_1 \cos \varphi_1 d\varphi_1 &= n_2 \cos \varphi_2 d\varphi_2 \\ d\varphi_2 &= \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} d\varphi_1. \end{aligned} \quad (7)$$

b) A *sagittális divergentia* legegyszerűbb megállapítása talán következőképen végezhető.

Az $\overline{S_1G}$ sugárból a törés után a \overline{GG}_2 sugár lesz; éppen így az $\overline{S_1H}$ -ből a \overline{HH}_2 sugár.

Az $\overline{S_1G}$ sugár beeséssíkja tartalmazza magát az $\overline{S_1G}$ -t és a G -pontban a törő XOY síkra emelt normálist, mely utóbbi az $\overline{S_1O}$ normálissal párhuzamos. E szerint ez a két normális oly párhuzamos két egyenes, a melyet az $\overline{S_1G}$ sugár az S_1 -ben, illetőleg a G -ben metsz; ennél fogva az $\overline{S_1G}$ sugár beeséssíkja egyszersmind az $\overline{S_1OG}$ sík, a mely az $\overline{S_1OC}$ síkkal $d\varepsilon_2$ szöget alkot.

Minthogy pedig a \overline{GG}_2 törött sugárnak ugyanebben az $\overline{S_1OG}$ síkban kell lennie, szigorúan következik, hogy ennek az $\overline{S_1GG}_2$ síknak csak *egy* meghatározott hajlása lehet az $\overline{S_1CS}_2$ síkhoz; azaz, kell hogy álljon

$$(\overline{COG}) \nearrow = d\varepsilon_2 = (\overline{S_2O_2G_2}) \nearrow.$$

Az 1. ábrából rendre következik:

$$\overline{OC} = r_1 \sin \varphi_1; \quad \overline{O_2S_2} = r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2;$$

$$\overline{CM} = \frac{r_1 d\varphi_1}{\cos \varphi_1}; \quad \overline{S_2M_2} = \overline{S_2E_2} + \overline{E_2M_2};$$

$$\overline{S_2E_2} = \overline{CM} = \frac{r_1 d\varphi_1}{\cos \varphi_1}; \quad \overline{E_2M_2} = \frac{r_2 d\varphi_2}{\cos \varphi_2}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned}\overline{CG} &= r_1 d\varphi_1 = \overline{OC} \cdot d\varepsilon_2 = r_1 \sin \varphi_1 \cdot d\varepsilon_2; \\ \overline{S_2 G_2} &= \overline{S_2 H_2} = \overline{S_2 F_2} + \overline{F_2 G_2} = r_1 d\varphi_1 + r_2 d\eta_2 = \\ &= \overline{O_2 S_2} \cdot d\varepsilon_2 = (r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2) d\varepsilon_2.\end{aligned}$$

Ezek alapján a $d\varphi_1$ -ből rendre a $d\varphi_2$, a $d\varepsilon_2$ és a $d\eta_2$ kifejezhető, lévén ugyanis:

$$d\varphi_2 = \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \cdot d\varphi_1; \quad d\varepsilon_2 = \frac{d\varphi_1}{\sin \varphi_1}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}d\eta_2 &= \frac{d\varepsilon_2}{r_2} (r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2) - \frac{r_1}{r_2} d\varphi_1 = \\ &= \frac{d\varphi_1}{r_2} \left\{ \frac{r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} - r_1 \right\} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} d\varphi_1 = d\eta_2.\end{aligned} \quad (8a)$$

A (8) és (8a) segítségével megszerkeszthetjük a törött sugárral *normális, haránt-keresztmetszetét* az S_2 helyen; ugyanis e harántszelvénynek a beesés síkjában való, tangenciális mérete

$$\overline{M_2 N_2} \cdot \cos \varphi_2;$$

ellenben a beesés síkjára merőleges, sagittális mérete

$$\overline{G_2 H_2} = \overline{GH} + 2r_2 d\eta_2 = 2 \cdot \overline{CG} + 2r_2 d\eta_2.$$

Felhasználva nyert eredményeinket

$$\overline{M_2 N_2} \cos \varphi_2 = 2 \overline{S_2 M_2} \cos \varphi_2 = 2 \left(\frac{r_1 d\varphi_1}{\cos \varphi_1} + \frac{r_2 d\varphi_2}{\cos \varphi_2} \right) \cos \varphi_2;$$

azaz e két méret:

$$\overline{M_2 N_2} \cdot \cos \varphi_2 = 2 \left(r_1 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} + r_2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \right) d\varphi_1. \quad (9)$$

$$\overline{G_2 H_2} = 2 \cdot r_1 d\varphi_1 + 2 r_2 \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} d\varphi_1 = 2 \left(r_1 + \frac{n_1}{n_2} \cdot r_2 \right) d\varphi_1. \quad (10)$$

Ezek szerint a keresett harántmetszet területe az S_2 helyen:

$$\begin{aligned}& \frac{\pi}{4} \cdot \overline{M_2 N_2} \cdot \cos \varphi_2 \overline{G_2 H_2} = \\ &= \pi \left(r_1 + \frac{n_1}{n_2} r_2 \right) \left(r_1 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} + r_2 \frac{n_1 \cos \varphi_1}{n_2 \cos \varphi_2} \right) (d\varphi_1)^2.\end{aligned} \quad (11)$$

Másrészt a (6) szerint ugyane törött nyaláb harántmetszetének területe a határsíkba lépés helyén, a C helyen:

$$\pi r_1^2 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} (d\varphi_1)^2,$$

míg $A_{\tau,0}$ amplitúdója, ugyane metszet területegységére vonatkoztatva, a (3) szerint

$$A_{\tau,0} = \frac{A_1}{r_1} F_1;$$

itt a τ index a *törött* nyalábra vonatkozó jelző és 0 az $r_2 = 0$ helyre, azaz a beesés C helyére vonatkozik.

A (6) és a (11) szerint az utóbbi keresztmetszet területe az $r_2 = 0$ helyen egyenlő lesz az előbbivel; de tetszésszerinti r_2 esetében e két keresztmetszet területi hányadosa:

$$\frac{r_1^2 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}}{\left(r_1 + \frac{n_1}{n_2} r_2\right) \left(r_1 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} + r_2 \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}\right)},$$

vagy, némiképp rövidítve

$$D_2^2 = \frac{r_1^2 n_2^2 \cos^2 \varphi_2}{(n_1 r_2 + n_2 r_1) (n_1 r_2 \cos^2 \varphi_1 + n_2 r_1 \cos^2 \varphi_2)}, \quad (12)$$

a mely hányadost helyesen nevezhetni a 2. közegben haladó *törött sugárnyaláb divergentia-coëfficiensének, szétterülési együtthatójának*.

Ez a nevezetes együttható valódi természete szerint geometriai optikai jellegű és csak *számot* jelentő mennyiség; ez nem függ a beejtett fénynek polárossági állapotától és így független a fénylő pont gerjesztő fényvektora sajátosságaitól.

3. Hogy a második közeg S_2 helyén előálló A_{τ,r_2} amplitúdót kifejezhessük, tekintetbe kell vennünk azt, hogy a törött nyalábra nézve a C törés helyéhez tartozó normális keresztmetszeten, a (6)-on át, és a tetszésszerinti S_2 helyhez tartozó normális keresztmetszeten, a (11)-én át egyenlő időközökben egyenlő energiák haladnak, a mi annyit mond, hogy ily normális metszet területe, szorozva a benne előálló amplitudo négy-

zetével, mindig ugyanakkora szorozmánynyal egyenlő, bármely r_2 távolság helyére nézve e harántszelvények.

E szerint a jelen esetünkben, használt jelöléseinkkel, kell hogy álljon:

$$\begin{aligned} & \pi r_1^2 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \cdot (d\varphi_1)^2 A_{\tau, 0}^2 = \\ & = \pi \left(r_1 + \frac{n_1}{n_2} \cdot r_2 \right) \left(r_1 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} + r_2 \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \right) (d\varphi_1)^2 \cdot A_{\tau, r_1}^2; \end{aligned}$$

ebből, a (3) és a (12)-ből nyerjük:

$$A_{\tau, r_1}^2 = A_{\tau, 0}^2 \cdot D_2^2 = \frac{A_1^2}{r_1^2} \cdot F_1^2 \cdot D_2^2;$$

úgy, hogy a törött nyaláb S_2 helyén az amplitudo:

$$A_{\tau, r_1} = \frac{A_1}{r_1} F_1 \cdot D_2. \quad (13)$$

4. Fontos jegyzet a viszonyossági vonatkozások tárgyában.

Az ebben a §-ban végzett vizsgálat a megfordított jelenségre nézve is éppen így végezhető: a mikor ugyanis valamely S_2 pontszerű fényforrás a 2. közegben van és azt az amplitudót keressük, a melyet az S_2 -ből induló, $2d\varphi_2$ nyílású, körkúpalakú sugárnyaláb az 1. közegbe való törés után az S_1 helyen létesít.

E célra szükséges megfontolások a 2. ábra felhasználásával végezhetők; de azonnal látható, hogy ebben az esetben az idetartozó fejtegetések és kifejezések a jelen §-ban végeztetektől csak annyiban fognak különbözhetni, hogy bennük az 1. és a 2. indexek kölcsönösen felcserélve vannak.

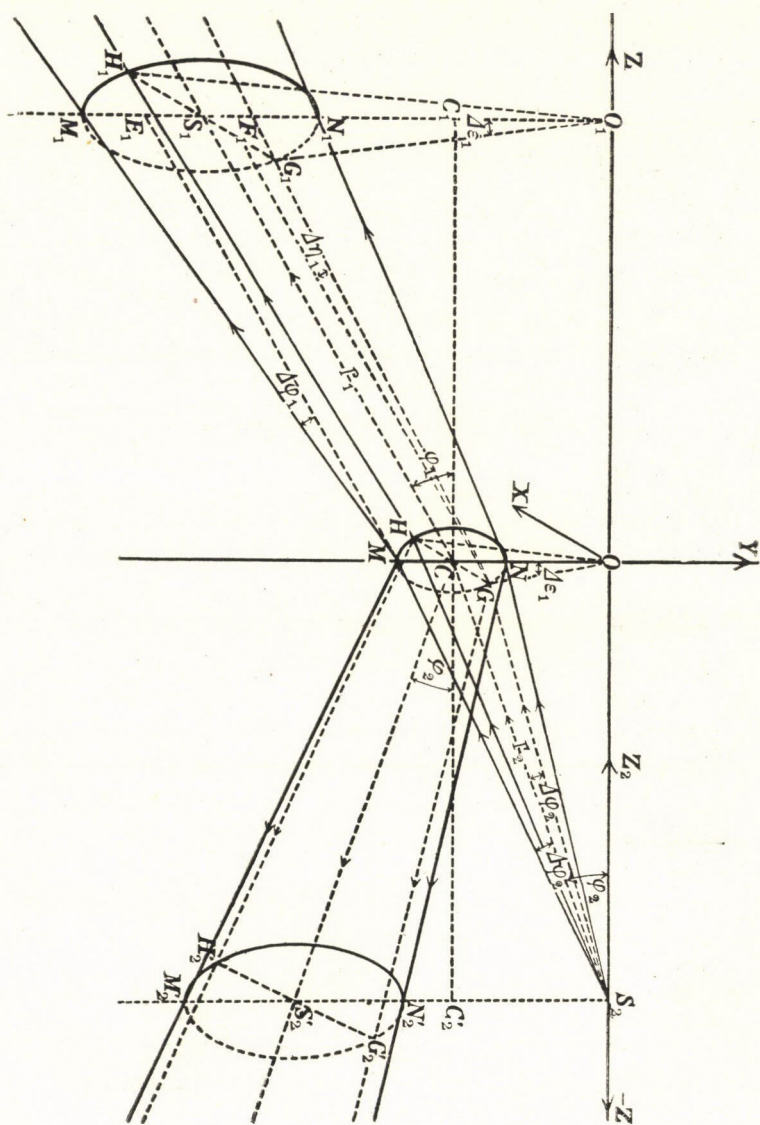
Ezek értelmében a (6), (11), (12), (13) eredményei és a 2. ábra szerint:

az 1. közegbe törött és benne tovább haladó sugárnyaláb normális haránt-keresztmetszete a C törés helyén és a tetszés-szerinti S_1 helyen:

$$\pi r_2^2 \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \cdot (d\varphi_2)^2; \quad (6a)$$

$$\pi \left(r_2 + \frac{n_2}{n_1} r_1 \right) \left(r_2 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} + r_1 \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \right) (d\varphi_2)^2; \quad (11a)$$

továbbá a divergentia-coëfficiensre nézve:



2. äbra.

$$I_1^2 = \frac{r_2^2 n_1^2 \cos^2 \varphi_1}{(n_2 r_1 + n_1 r_2) (n_2 r_1 \cos^2 \varphi_2 + n_1 r_2 \cos^2 \varphi_1)} \quad (12a)$$

és maga az amplitudo az S_1 helyen:

$$A_{r, r_1} = \frac{A_2}{r_2} \cdot F_2 \cdot I_1, \quad (13a)$$

hol F_2 az a FRESNEL-féle fénytörési együttható, a mely érvényes, a mikor a törés a 2. közegből az 1. közegbe történik.

A D_1 és a D_2 divergentia-együtthatók nevezői egymással egyenlők; ez a körülmény kiinduló pontjául szolgálhat a fizikai optika oly viszonyossági tételei megállapításakor, a melyeket ez alapon könnyen bizonyíthatni be, a melyeket azonban, mint-hogy itt *nincs szükség* reájuk, más alkalommal lesz szerencsém a Tekintetes Akadémia elé terjeszteni.

4. §. *Tetszésszerű, egyszínű, pontszerű fényforrásból származó törött fénynyaláb vektorának és összetevőinek kifejezése a teljes visszaverődés határszögén innen és azon túl.*

Legyen most az S_1 helyen lévő fénylő pont tetszésszerű, egyszínű váltakozásban: akkor a belőle minden irányban haladó elemi sugárkúpok közül bármelyikre nézve, a mely a két közeg határsíkjához érkezik, a megelőző § fejtegetései érvényesíthetők és az 1. és a 6. ábra használható.

Magát az S_1 -ből induló és például r_1 mentén C -ig eljutott sugár vektorát mindenkor szétbonthatni az S_1C sugár beesés-síkjára merőleges és a beesés síkjában váltakozó összetevőre.

Ezeknek az összetevőknek az S_1 -től számított távolságegységére vonatkozó amplitudóit jeleljék $A_{1,m}$ és $A_{1,p}$; ugyanezeknek a vektor-összetevőknek kezdőphasisait $\delta_{1,m}$ és $\delta_{1,p}$; ekkor a C helyre nézve e két összetevő kifejezése, ugyanis $\varrho_{1,m}$ és $\varrho_{1,p}$ -éi következőképen írhatók:

$$\varrho_{1,m} = \frac{A_{1,m}}{r_1} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right) + \delta_{1,m} \right]; \quad (14)$$

$$\varrho_{1,p} = \frac{A_{1,p}}{r_1} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right) + \delta_{1,p} \right]. \quad (15)$$

1. A (14) vektorból, a második közegbe történt törés után, az S_2 helyen, a megelőző § eredményei felhasználásával a követ-

kező szerkezetű, de még mindig a beesés-síkra merőlegesen váltakozó, $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ -vel jelölendő vektor lesz:

$$\mathfrak{E}_{1,m,2} = \frac{A_{1,m}}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,m} \right]. \quad (16)$$

2. A (15) vektorból, ugyanígy, az S_2 helyen létesül az $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ -vel jelölendő:

$$\mathfrak{E}_{1,p,2} = \frac{A_{1,p}}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,p} \right] \quad (17)$$

vektor, mely még mindig a beesés síkjában váltakozik.

Az $F_{1,m}$ és $F_{1,p}$ jelenti a merőleges és a párhuzamos összetevőhöz tartozó FRESNEL-féle törési együtthatót, ha a törés az 1. közegből a 2. közegbe megyen végbe.

A törés folyamata önmagában véve egyik vektornak sem változtatja meg a phasisát.

Az $\overline{S_1 C} = r_1$ és a $\overline{CS_2} = r_2$ távolságokra nézve az 1. ábra szerint megjegyzendő:

Ha C egy derékszögű koordinátarendszer kezdete, melyre nézve a beesés és a törés síkjában, ugyanis az $S_1 CS_2 OO_2$ síkban az S_1 és az S_2 koordinátái

$$\begin{aligned} \overline{S_1 O} = z_1 = r_1 \cos \varphi_1; \quad \overline{OC} = s_1 = r_1 \sin \varphi_1; \\ \overline{CS_2} = z_2 = r_2 \cos \varphi_2; \quad \overline{C_2 S_2} = s_2 = r_2 \sin \varphi_2; \end{aligned} \quad (18a)$$

akkor azonnal:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{z_1}{\cos \varphi_1} = z_1 \cos \varphi_1 + s_1 \sin \varphi_1; \\ r_2 &= \frac{z_2}{\cos \varphi_2} = z_2 \cos \varphi_2 + s_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Ezek szerint a (16) és (17)-ben kiírt vektorok phasisai:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,m} &= \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z_1 \cos \varphi_1 + s_1 \sin \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{z_2 \cos \varphi_2 + s_2 \sin \varphi_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,m} \right]; \\ \varphi_{1,p} &= \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z_1 \cos \varphi_1 + s_1 \sin \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{z_2 \cos \varphi_2 + s_2 \sin \varphi_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,p} \right]; \end{aligned} \quad (19)$$

úgy hogy (16) és (17)-ből:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{1, m, 2} &= \frac{A_{1, m}}{r_1} \cdot F_{1, m} \cdot D_2 \sin \varphi_{1, m}; \\ \mathfrak{E}_{1, p, 2} &= \frac{A_{1, p}}{r_1} \cdot F_{1, p} \cdot D_2 \sin \varphi_{1, p};\end{aligned}\quad (20)$$

avagy, az imaginárius kifejezések sajátosságainak felhasználásával

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{1, m, 2} &= -\sqrt{-1} \cdot \frac{A_{1, m}}{r_1} \cdot F_{1, m} \cdot D_2 \cdot e^{\varphi_{1, m} \sqrt{-1}}; \\ \mathfrak{E}_{1, p, 2} &= -\sqrt{-1} \cdot \frac{A_{1, p}}{r_1} \cdot F_{1, p} \cdot D_2 \cdot e^{\varphi_{1, p} \sqrt{-1}};\end{aligned}\quad (21)$$

hol a bal oldalak egyenlők a jobb oldalak kifejezéseinek reális részével. E két vektor amplitúdóinak hányadosa:

$$\frac{A_{1, p}}{A_{1, m}} \cdot \frac{F_{1, p}}{F_{1, m}}. \quad (22)$$

a) Mindaddig, míg φ_2 a teljes visszaverődés $\varphi_{2 \text{ tot}}$ határszögénél *kisebb*, az

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 \quad \text{és} \quad n_1 \cos \varphi_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \varphi_2}$$

menntiségek reálisak, lévén itt az 1. ábra szerint

$$n_1 < n_2;$$

de addig egyszersmind az $A_{1, m}$, $A_{1, p}$; $F_{1, m}$, $F_{1, p}$; D_2 ; $\varphi_{1, m}$, $\varphi_{1, p}$ mennyiségek is mind reálisak, különösen még valóságos az r_1 és r_2 távolságok is.

b) Ha φ_2 e $\varphi_{2 \text{ tot}}$ határszögénél *nagyobb*, akkor

$$\sin \varphi_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2$$

értéke nagyobb a számegységénél és

$$\cos \varphi_1 = + \frac{\sqrt{-1}}{n_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2},$$

mely tisztán imaginárius. Itt a *positiv* előjelet azért kell választani, hogy ebben az esetben a z_1 távolság növekedésével az amplitúdók hatvány-kitevős *reális* együtthatói a zérus felé fogynak; ellenben a teljes visszaverődés elméletében, hol a suga-

rak haladása ellentett irányú, ugyanily oknál fogva $\cos \varphi_1$ előjele ellentett. V. ö. a (24) kifejezéseket.

Ez esetben a $\Phi_{1,m}$ és $\Phi_{1,p}$ pházisok, a (18_a) és (19) szerint rendre írhatók, ha rövidség kedvéért:

$$\Psi_{1,m} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1 \sin \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,m}; \quad (23_a)$$

$$\Psi_{1,p} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1 \sin \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,p};$$

$$\Phi_{1,m} = \Psi_{1,m} - \sqrt{-1} \cdot \frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \cdot \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}; \quad (23)$$

$$\Phi_{1,p} = \Psi_{1,p} - \sqrt{-1} \cdot \frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \cdot \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}.$$

Ezekkel az értékekkel a törött fénynyaláb S_2 helyén előálló két vektorösszetevő a (21)-ből

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,m,2} &= \left\{ -\sqrt{-1} \cdot \frac{A_{1,m}}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 \cdot e^{\Psi_{1,m}} \right\} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}; \\ \mathfrak{E}_{1,p,2} &= \left\{ -\sqrt{-1} \cdot \frac{A_{1,p}}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \cdot e^{\Psi_{1,p}} \right\} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

hol ismét a jobboldali kifejezéseknek csak a *valós* része jelenti e vektorokat.

Ebben az esetben az $A_{1,m}$, $A_{1,p}$; $F_{1,m}$, $F_{1,p}$; D_2 mennyiségek valamennyien vagy közülük többen komplex szerkezetűek; ez különösen az $A_{1,m}$ és $A_{1,p}$ amplitudók szerkezetéből (34), (36), (38), (39) fog kitünni.

A két vektor amplitudóinak hányadosa itt is ugyanaz, mint fent, (22) alatt; de ez most mindig:

$$\frac{A_{1,p}}{A_{1,m}} \cdot \frac{F_{1,p}}{F_{1,m}} = A + B \sqrt{-1} \quad (25)$$

alakban állítható elő; és ekkor, miként már a 2. § végén is megjegyeztük,

$$\Gamma = (A^2 + B^2)^{1/2}$$

jelenti e vektorok reális amplitudóinak hányadosát és

$$\frac{B}{A}$$

az imaginárius törés folytán a reális két vektor-összetevő között létesülő fáziskülömbőség a trigonometriai tangensét.

c) Minthogy a szóbanforgó törtnek úgy (22) alatti, mint (25) alatti kifejezése független a (24)-ben jelentkező közös, külső exponentiális együtthatótól, továbbá a szintén közös D_2 szétterülési együtthatótól: *a szétszórt nyaláb bármely sugara polárisbeli állapotának jellemző adatai a jelen tökéletesített elmélet szerint ugyanazok, mint a melyek előbbi, az 1. §-ban említett egyszerűbb, a szétterülési együtthatót és az exponentiális szorzót nem tartalmazó elméletéből következtek.*

A (21) kifejezésesei a közönséges törés eseteinek felelnek meg, a melyekkel itt közelebbről nem foglalkozunk.

A (24) kifejezésesei a totális visszaverődés $\varphi_{2\text{ tot}}$ határszögén túl lévő térben haladó sugarakra és ezek vektoraira nézve érvényesek; e határszög meghatározó egyenlete

$$n_2 \sin \varphi_{2\text{ tot}} = n_1;$$

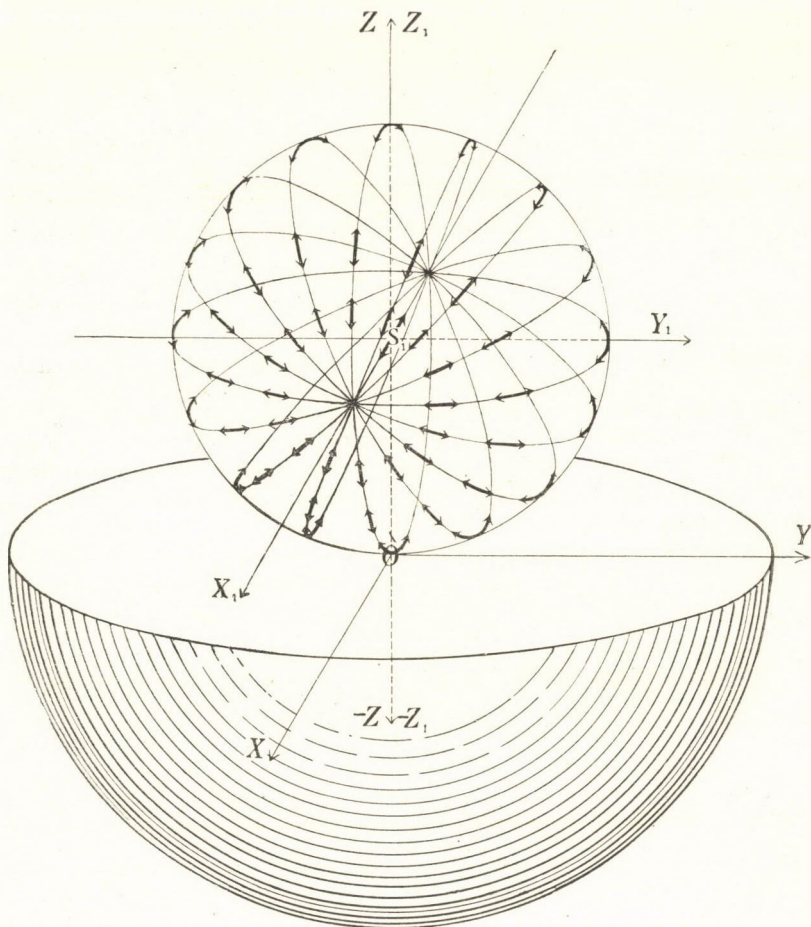
a közös exponentiális együttható

$$e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}$$

értéke e határszögnél egyenlő ugyan az egységgel; de a φ_2 -nek további növekedésével igen gyorsan esik a zérus felé, ha a z_1 a λ_1 -hez képest jelentékeny.

Ez teljesen megegyezik a tapasztalattal, mert ha az S_1 fénylő pont nincsen egészen közel a határfelülethez: a sűrűbb közegben nem vehetők észre sugarak a teljes visszaverődés határszögén túl.

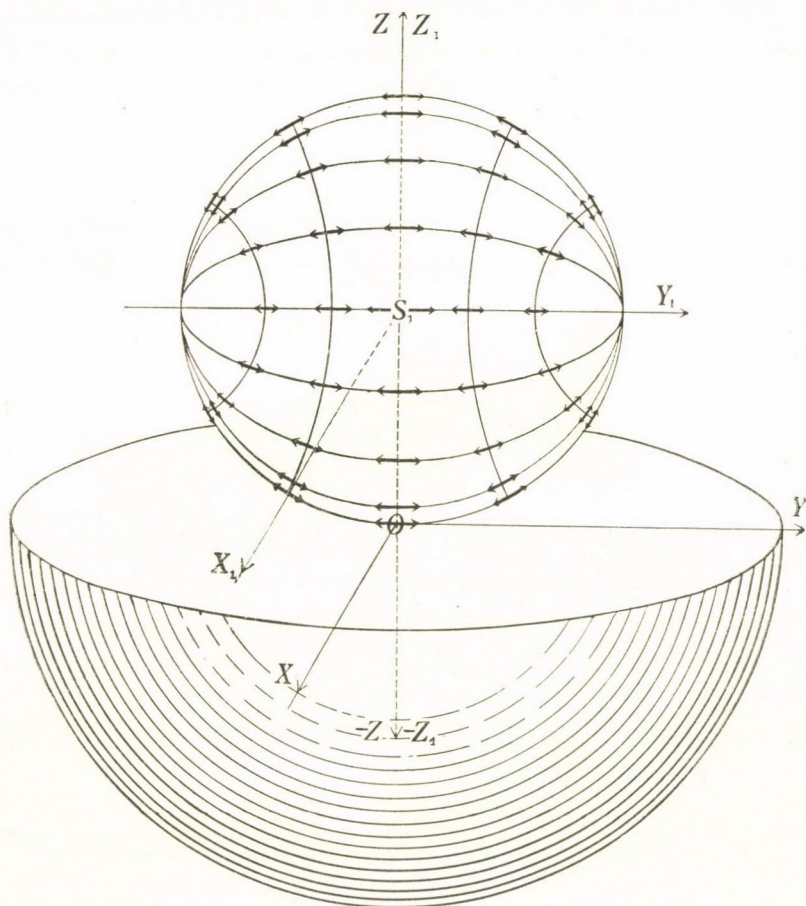
De, ha a z_1 a λ_1 -gyel egyenlő rendű: ez az exponentiális együttható a φ_2 növekedésével csak lassan esik az egységérték alá és $\varphi_2 = 90^\circ$ esetben sem lesz zérus; e szerint várható, hogy a mennyiben a (24) kifejezések $\{ \}$ zárójeles együtthatói nem zérusok, a teljes visszaverődés határszögén túl lévő térben ily szétszórt sugarak előállhatnak és észrevehetők. Ez egyszersmind a fénytannban közismert tapasztalat; közelebbről pedig azok az észleletek, a melyek az e dolgozat elején idézett közleményekben foglaltatnak, igen nagy részükben az ily,



3. ábra.

a teljes visszaverődés határszögén túl lévő térben haladó sugarak vektorainak polározási állapotára vonatkoznak, a mely polárossági állapot, miként már fentebb megállapítottuk, ettől a hatvány-kitevős együttthatótól teljesen független.

5. §. *Segéd-tétel: Tetszésszerű, egyszínű, pontszerű fényforrásból keletkezett sugár vektorának kifejezése a meridionális rendszer alapján. A beesés síkjára merőleges és a vele párhuzamos összetevőjének megalkotása.*



4. ábra.

1. A további fejtegetésekre az eddig használt $A_{1,m}$ és $A_{1,p}$ amplitudóknak idetartozó, legáltalánosabb, a φ_1 beesésszögétől is függő, kifejtett kifejezései ismeretére van szükségünk, hogy a (21) és (24) vektormennyiségeket érdemlegesen lehessen megvizsgálni.

E végből alapul vesszük azt az általános tételt, hogy bármely monochromatikus, gerjesztő forrásvektort egymásra merőleges három egyszerű, vonalmenti vektorra lehet bontani s hogy e három gerjesztő összetevő egyenkénti optikai hatásának eredője egyenlő a forrásvektor eredő optikai hatásával.

Legyen a 3., 4., 5., 6., ábra szerint S_1 a pontszerű gerjesztő vektor helye; az elválasztósík e négy ábrán az XOY -sík, a mely, a kísérleti valóságnak megfelelőleg, a λ -hoz képest *igen nagy* sugarú üveg-félgömb átfogó lapja, legnagyobb körének síkja. Az S_1 -ben váltakozó gerjesztő vektornak említett derékszögű, lineáris összetevői váltakozzanak rendre az X_1 , az Y_1 , a Z_1 tengelyek mentén: e vonalmenti három vektor-összetevő mindegyike külön-külön, egymástól függetlenül létesít maga körül egy-egy egyszerű, meridionális vektorrendszert, a melynek symmetria-tengelye a mindenkor gerjesztő lineáris vektor egyenese.¹

¹ Az elméleti fénytan egyik legfontosabb problémája a következő:

• *Mily hullámokat gerjeszt maga körül valamely vonalmenti, egyszerűen harmonikus, stationárius váltakozás valamely egyenletes, egyöntetű közegben?*

E kérdés többféleképpen, meghatározott előfeltételek mellett, bizonyos korlátozásokkal nyert teljes megoldást, mely az idetartozó irodalomban könnyen hozzáférhető.

A mechanikai-rugalmasságtani fényelmélet felfogása alapján:

W. VOIGT: *Theorie des leuchtenden Punktes*. CRELLE's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 89., p. 288—321, 1880; továbbá ugyanennek rövid áttekinthető, de mégis szigorú előállítása: W. VOIGT, *Kompendium der theoretischen Physik*, Bd. II. p. 756, 757; 759—762. Leipzig, 1896. Ez az utóbbi tárgyalás lényegében véve megegyezik azzal a formailag mesteri fejtegetéssel, a melylyel G. KIRCHHOFF e kérdést kezeli: *Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn Voigt: Theorie des leuchtenden Punktes*. CRELLE's Journal, Bd. 90. p. 34, 1881 és G. KIRCHHOFF: *Gesammelte Abhandlungen, Nachtrag*, herausgegeben von L. BOLTZMANN: p. 17—22, Leipzig, 1891. Ugyane tárgyalást, a legegyszerűbb esetre vonatkozólag ismerttettem és fejtegettem: I. FRÖHLICH: *Polarisation des gebeugten Lichtes*. Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. XXII. p. 65—438, Leipzig, 1907. Különösen §. 14—§. 21, p. 141—167; és ebben 144—146. ll.

Az elektromágnességi fényelmélet felfogása alapján igen nagyszámú idetartozó közlemény közül közvetlenül hivatkoztam azokra, a melyeket most említett munkálatom 168. lapján idéztem, valamint azokra a fejtegetésekre is, a melyek e közlésem 168—186. lapján részletezve vannak.

Ezekon kívül az elektromágnességi térben lévő «optikai akadályok» létesítette elektromágnességi zavarokra nézve felemlítem még Lord RAYLEIGH-nek erre a tárgyra vagy evvel szoros kapcsolatban lévő tárgyakra vonatkozó dolgozatai közül a következőket (az elsőt már más megjelenése helyével fentemlített közleményemben idéztem): «*On the Electromagnetic Theory of Light*». Scientific Papers, Vol. I. Cambridge 1899,

E szerint itt rendre a három koordináta-tengely körül, mint symmetria-tengelyek körül létesül egy-egy ily egyszerű vektorrendszer, a mint ezt a 3., a 4., az 5. ábra külön-külön is mutatja.

A 6. ábra egyszerre tünteti elő az S_1 gerjesztő vektor jelzett három gerjesztő összetevőjét és egyszersmind az ezek által a térnek R helyén létesített, gerjesztett három lineáris vektort, ϱ_x -et, ϱ_y -t, ϱ_z -t; ezek a vektorok tartoznak az S_1 -ből induló, tetszésszerű irányú $\vec{S_1R}$ szétszórt sugárhoz.

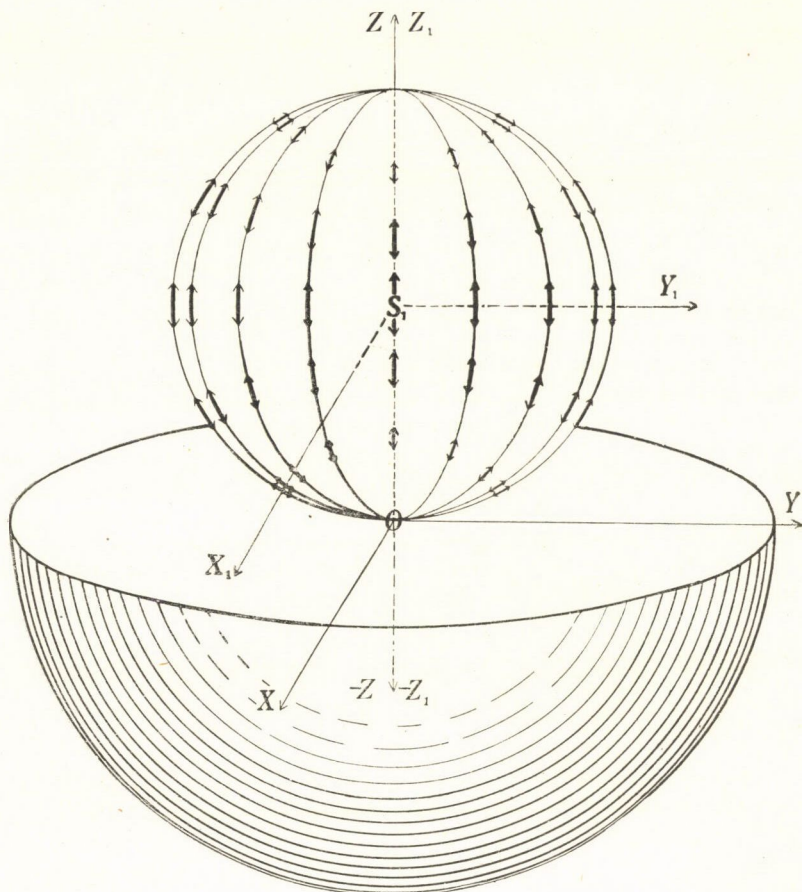
Ezek közül a ϱ_x váltakozik az R helyen az $\widehat{X_1R}$ meridián mentén; a ϱ_y váltakozik az R helyen az $\widehat{Y_1R}$ meridián mentén; a ϱ_z váltakozik az R helyen az $\widehat{Z_1R}$ meridián mentén; e szerint mind a három vektor váltakozása merőleges az $\widehat{S_1R}$ sugárra.

Jelöljék a 6. ábra szerint rendre ϱ_x , ϱ_y , ϱ_z azokat a szögeket, a melyeket az $\vec{S_1R}$ sugár alkot az S_1X_1 , S_1Y_1 , S_1Z_1 koordináta-tengelyekkel; továbbá legyenek a , b , c az egyes gerjesztő vektorösszetevők által az S_1 -től számított távolság-egységben létesített vektorok amplitúdó-állandói és ∂_a , ∂_b , ∂_c ez utóbbi vektorok kezdőpházisai; akkor a meridionális egyszerű vektorrendszerek szerkezete elemi törvénye szerint e gerjesztett vektorok következőképen írhatók:

$$\begin{aligned}\varrho_x &= \frac{a}{S_1R} \cdot \sin \varrho_x \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\overline{S_1R}}{\lambda} \right) + \partial_a \right]; \\ \varrho_y &= \frac{b}{S_1R} \cdot \sin \varrho_y \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\overline{S_1R}}{\lambda} \right) + \partial_b \right]; \\ \varrho_z &= \frac{c}{S_1R} \cdot \sin \varrho_z \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\overline{S_1R}}{\lambda} \right) + \partial_c \right].\end{aligned}\quad (26)$$

p. 518—536. — «On the Incidence of Aerial and Electric Waves upon Small Obstacles» Sc. P., Vol. IV, Cambridge, 1903, p. 305—326. — «The Incidence of Light upon a Transparent Sphere of Dimensions, comparable with the Wave-Length.» Sc. P. Vol. V., Cambridge, 1910, p. 546—568. — «On The Diffraction of Light by Spheres of Small Relative Index.» Proceedings of the Royal Society, Series (A) Vol. 90. Nr. A 617., 1914, p. 219—225.

Bármily felfogás alapján fejtsék is meg e probléma, bármily alakú legyen is a stationáriusan váltakozó, gerjesztő, de kicsiny fényforrás: ettől a hullámhosszúsághoz képest jelentékeny távolságban mindig egyszerűen harmonikus, meridionális vektorrendszer létesül.



5. ábra.

Ez az $\overline{S_1 R}$ sugár útja folytatásában a C helyen találja a két közeg elválasztó síkját; e szerint $(S_1 OC)$ e sugár beesés-síkjá; legközelebbi lépésünk most abban áll, hogy az R -ben jelentkező e három, $\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z$ vektor-összetevő $(\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2)^{1/2} = \varrho$ eredőjének a beesés síkjára merőleges és vele párhuzamos összetevőit, azaz ϱ_m -et és ϱ_p -t megalkossuk.

E végből jeleljék, szintén a 6. ábra szerint, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ azokat a szögeket, a melyeket, a ϱ_x , a ϱ_y , a ϱ_z váltakozások egye-

Ha e (27) összetevőket nem az R helyre, hanem az ugyan-ezen S_1RQC sugár mentén levő Q pontra kívánjuk vonatkoztatni: a (26)-ban az $\overline{S_1R}$ távolság helyett az $\overline{S_1Q}$ távolságot kell tennünk s a (27)-et így kifejezni.

Legyen még rövidség kedvéért:

$$\overline{S_1Q} = r; \quad (28)$$

és (26)-ból a phasisokra nézve:

$$\begin{aligned} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \delta_a &= \eta_a; \\ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \delta_b &= \eta_b; \\ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \delta_c &= \eta_c. \end{aligned} \quad (29)$$

Akkor a tekintetbe vett $\overline{S_1C}$ sugár Q helyére nézve e ϱ_m és ϱ_p összetevők kifejezései:

$$\begin{aligned} \varrho_m &= \frac{a}{r} \sin \Omega_x \sin \varepsilon_x \sin \eta_a - \frac{b}{r} \sin \Omega_y \sin \varepsilon_y \sin \eta_b; \\ \varrho_p &= \frac{a}{r} \sin \Omega_x \cos \varepsilon_x \sin \eta_a + \frac{b}{r} \sin \Omega_y \cos \varepsilon_y \sin \eta_b + \frac{c}{r} \sin \Omega_z \sin \eta_c. \end{aligned} \quad (30)$$

E két összetevő a 6. ábrán a Q helyre nézve van előtüntetve.

2. A 6. ábra szerint $\pi - \Omega_z = \varphi$, hol φ az $\overline{S_1C}$ sugárnak az elválasztó síkra vonatkozó beesés-szöge; továbbá ugyane sugár beesés síkja S_1OC ; e sík és vele együtt a benne lévő \widehat{OR} meridián-síkja is az $S_1Y_1Z_1$ síkkal ϑ szöget képez.

A továbbiakban ezt a φ és ϑ két szöget akarjuk az S_1RQC sugár független két irányszögének tekinteni és a (30)-ban felépő $\varepsilon_x, \varepsilon_y$; továbbá az $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ helyébe bevezetni.

E végből felhasználjuk a gömbháromszögtan elemi két tételét, ugyanis

$$\begin{aligned} \sin a : \sin A &= \sin b : \sin B = \sin c : \sin C; \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A; \end{aligned} \quad (31)$$

hol a, b, c e gömbháromszög oldalai; A, B, C az ezekkel szemközt fekvő szögek; így rendre nyerjük a 6. ábra szerint:

a) Az (X_1RO) gömbháromszögben

$$\begin{aligned}\sin \varrho_x : \sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) &= \sin (\widehat{X_1O}) : \sin (\pi - \varepsilon_x); \\ \sin \varrho_x \cos (\pi - \varepsilon_x) &= \cos (\widehat{X_1O}) \sin (\pi - \varrho_z) - \\ &\quad - \sin (\widehat{X_1O}) \cos (\pi - \varrho_z) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right); \end{aligned}$$

azaz, mivel itt $\widehat{X_1O} = \frac{\pi}{2}$; $\pi - \varrho_z = \varphi$:

$$\begin{aligned}\sin \varrho_x \sin \varepsilon_x &= \cos \vartheta; \\ \sin \varrho_x \cos \varepsilon_x &= \sin \vartheta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

β) Az (Y_1RO) gömbháromszögben:

$$\begin{aligned}\sin \varrho_y : \sin \vartheta &= \sin (\widehat{Y_1O}) : \sin (\pi - \varepsilon_y); \\ \sin \varrho_y \cos (\pi - \varepsilon_y) &= \cos (\widehat{Y_1O}) \sin (\pi - \varrho_z) - \\ &\quad - \sin (\widehat{Y_1O}) \cos (\pi - \varrho_z) \cos \vartheta; \end{aligned}$$

azaz, mivel itt $\widehat{Y_1O} = \frac{\pi}{2}$; $\pi - \varrho_z = \varphi$:

$$\begin{aligned}\sin \varrho_y \sin \varepsilon_y &= \sin \vartheta; \\ \sin \varrho_y \cos \varepsilon_y &= \cos \vartheta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (33)$$

γ) Egy harmadik gömbháromszög fölösleges, mert $\varepsilon_z = 0$.

3. A ϱ_m és ϱ_p eredő vektorösszetevők a (29) és (30)-ban jelentkező szerkezetük szerint csak vonalmenti, az időben egyszerűen harmonikus váltakozások lehetnek; ezek az $\widehat{S_1C}$ sugárnak tetszésszerű Q helyére nézve ily alakban írhatók:

$$\begin{aligned}\varrho_m &= \frac{A_m}{r} \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \delta_m \right]; \\ \varrho_p &= \frac{A_p}{r} \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \delta_p \right]; \end{aligned} \quad (34)$$

hol $A_m, A_p, \delta_m, \delta_p$ még meghatározandó mennyiségek.

E végből, hasonlóan, mint (29)-ben, rövidség kedvéért írható:

$$\begin{aligned} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \delta_m &= \eta_m; \\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \delta_p &= \eta_p; \end{aligned} \quad (35)$$

így a (30) összefüggések szerint:

$$\begin{aligned} \varrho_m &= \frac{A_m}{r} \sin \eta_m = \frac{1}{r} \{a \cos \vartheta \sin \eta_a - b \sin \vartheta \sin \eta_b\}; \\ \varrho_p &= \frac{A_p}{r} \sin \eta_p = \frac{1}{r} \{a \sin \vartheta \cos \varphi \sin \eta_a + \\ &\quad + b \cos \vartheta \cos \varphi \sin \eta_b + c \sin \varphi \sin \eta_c\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Hogy a (36) rendszert az A_m , A_p ; δ_m , δ_p mennyiségek meghatározó egyenletrendszerévé lehessen alakítani, írjunk a (29) és (35) tekintetbe vételével:

$$\begin{aligned} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) &= \phi; \\ \eta_a &= \phi + \delta_a; \quad \eta_b = \phi + \delta_b; \quad \eta_c = \phi + \delta_c; \\ \eta_m &= \phi + \delta_m; \quad \eta_p = \phi + \delta_p, \end{aligned} \quad (37)$$

miáltal a (36)-ból:

$$\begin{aligned} A_m \sin(\phi + \delta_m) &= a \cos \vartheta \sin(\phi + \delta_a) - b \sin \vartheta \sin(\phi + \delta_b); \\ A_p \sin(\phi + \delta_p) &= a \sin \vartheta \cos \varphi \sin(\phi + \delta_a) + \\ &\quad + b \cos \vartheta \cos \varphi \sin(\phi + \delta_b) + c \sin \varphi \sin(\phi + \delta_c). \end{aligned} \quad (38)$$

Ez a (38) rendszer a szokásos módon engedi meghatározni az eredeti, pontszerű, gerjesztő fényforrás a , b , c ; δ_a , δ_b , δ_c jellemző állandóiból az A_m , A_p ; δ_m , δ_p vektor-jellemzőket; de ezek, miként (38) világosan mutatja, még az $S_1 RQC$ sugárnak φ és ϑ független irányszögeitől is explicite függenek.

Az így nyert (34), (36), (38) kifejezések e szerint arra szolgálnak, hogy a tetszésszerű, egyszínű, gerjesztő S_1 pontszerű fényforrásból származó, de még ugyanabban a közegben haladó, tetszésszerű irányú $\overline{S_1 Q}$ szétszórt sugárnak Q helyén előálló, gerjesztett vektora ϱ_m és ϱ_p két összetevőjét kifejezhessük.

Ha $\varphi < \frac{\pi}{2}$, akkor, a 6. ábra szerint, e szétszórt sugár az elvászto síkon a C helyen áthaladva, a második közegbe lép és ott az alábbiakban tárgyalandó törés folytán módosul. De ha $\varphi > \frac{\pi}{2}$, akkor e sugár mindig az eredeti S_1 gerjesztőhely közegében marad, s az elvászto síkot soha és sehol sem érheti; az ily sugár vagy sugárnyaláb e szerint szabadon terjed a fényforrás közegében.

4. Nyert kifejezéseinket most az $S_1 RQC$ sugárnak az elvászto síkra való érkezése C helyére fogjuk alkalmazni; *erre* nézve:

$$\overline{S_1 C} = r_1;$$

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right) = \phi_1;$$

továbbá a (14)-ben és (15)-ben használt részletesebb jelölést is követve, a (36) vagy (38) meghatározó egyenletek írhatók, ha most az $_1$ indexet mindenütt, a hol szükséges pótlólag hozzátesszük:

$$\frac{A_{1,m}}{r_1} \sin(\phi_1 + \delta_{1,m}) = \frac{1}{r_1} \{a \cos \vartheta \sin(\phi_1 + \delta_{1,a}) - b \sin \vartheta \sin(\phi_1 + \delta_{1,b})\};$$

$$\frac{A_{1,p}}{r_1} \sin(\phi_1 + \delta_{1,p}) = \frac{1}{r_1} \{a \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin(\phi_1 + \delta_{1,a}) +$$

$$+ b \cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin(\phi_1 + \delta_{1,b}) +$$

$$+ c \sin \varphi_1 \sin(\phi_1 + \delta_{1,c})\}. \quad (39)$$

Ezek az egyenletek, a melyek a C helyre nézve érvényesek, alkotják az alapját azoknak a kifejezéseknek, a melyek a (20), (21) és (24) egyenleteiben fellépő

$$\frac{A_{1,m}}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 \cdot \sin \phi_{1,m} \quad \text{és} \quad \frac{A_{1,p}}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \sin \phi_{1,p}$$

szorozmányok megalkotására és ezeknek bármily törőszögre vonatkozó megvizsgálására és értelmezésére szükségesek.

E végből még megjegyzendő, hogy az $S_1 C$ sugárnyaláb a törés után a második közegbe halad, de minden tekintetben

phasisváltozás nélkül; ott az 1. ábra szerint S_2 -ig jut s ott oly $\varphi_{1,m,2}$, $\varphi_{1,p,2}$ vektor-összetevőket létesít, a melyek (39)-ből adódnak, ha első egyenletét $F_{1,m} \cdot D_2$ -vel, másodikát $F_{1,p} \cdot D_2$ -vel szorozzuk, továbbá a $\varphi_1 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right)$ helyébe $\varphi_{1,2} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right)$ -t írunk, végre magukat a vektor-összetevőket $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ -vel és $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ -vel jelöljük.

6. §. *A törött sugarak vektorainak részletes megvizsgálása a teljes visszaverődés határszögén innen eső térben, mikor a fénylő pont nincsen optikailag közel az elválasztó síkhoz.*

a) *Algebrai fejtegetés.*

Felhasználva a megelőző §-ban nyert eredményeinket és tekintetbe véve 4. szakaszának jelzéseit, valamint a végén tett észrevételeket, az S_1 -ből származó, az S_2 -ben keletkező fényvektor két összetevője írható:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,m,2} &= \frac{A_{1,m}}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 \sin \varphi_{1,m} = \\ &= \frac{1}{r_1} \{ a \cos \vartheta \sin \varphi_{1,a} - b \sin \vartheta \sin \varphi_{1,b} \} \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} \cdot D_2; \\ \mathfrak{E}_{1,p,2} &= \frac{A_{1,p}}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \sin \varphi_{1,p} = \quad (40) \\ &= \frac{1}{r_1} \{ a \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin \varphi_{1,a} + b \cos \vartheta \cdot \cos \varphi_1 \sin \varphi_{1,b} + \\ &\quad + c \sin \varphi_1 \sin \varphi_{1,c} \} \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot D_2; \end{aligned}$$

hol a $\varphi_{1,a}$; $\varphi_{1,b}$; $\varphi_{1,c}$ phasisokra nézve, a megelőző § végén tett megjegyzés szerint, rendre áll:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,a} &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,a} = \varphi_{1,2} + \delta_{1,a}; \\ \varphi_{1,b} &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,b} = \varphi_{1,2} + \delta_{1,b}; \quad (41) \\ \varphi_{1,c} &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,c} = \varphi_{1,2} + \delta_{1,c}. \end{aligned}$$

Éppen így a $\varphi_{1,m}$ és $\varphi_{1,p}$ phasisokra nézve:

$$\begin{aligned}\varphi_{1,m} &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,m} = \varphi_{1,2} + \delta_{1,m}; \\ \varphi_{1,p} &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_{1,p} = \varphi_{1,2} + \delta_{1,p}.\end{aligned}\quad (42)$$

Mind e phasis-kifejezésekben a (18) szerint áll:

$$\begin{aligned}r_1 &= z_1 \cos \varphi_1 + s_1 \sin \varphi_1 \\ r_2 &= z_2 \cos \varphi_2 + s_2 \sin \varphi_2.\end{aligned}\quad (18)$$

A (38), illetőleg a (39) meghatározó egyenletek most a (40) szerint a következők:

$$\begin{aligned}A_{1,m} \sin \varphi_{1,m} &= a \cos \vartheta \sin \varphi_{1,a} - b \sin \vartheta \sin \varphi_{1,b}; \\ A_{1,p} \sin \varphi_{1,p} &= a \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin \varphi_{1,a} + b \cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \varphi_{1,b} + \\ &\quad + c \sin \varphi_1 \sin \varphi_{1,c}.\end{aligned}\quad (43)$$

Ezekből, tekintettel a (41) és (42) jelzésekre, a szokásos módon adódik:

$$\begin{aligned}A_{1,m} \cos \delta_{1,m} &= a \cos \vartheta \cos \delta_{1,a} - b \sin \vartheta \cos \delta_{1,b}; \\ A_{1,m} \sin \delta_{1,m} &= a \cos \vartheta \sin \delta_{1,a} - b \sin \vartheta \sin \delta_{1,b}.\end{aligned}\quad (43_a)$$

$$\begin{aligned}A_{1,p} \cos \delta_{1,p} &= a \sin \vartheta \cos \varphi_1 \cos \delta_{1,a} + \\ &\quad + b \cos \vartheta \cos \varphi_1 \cos \delta_{1,b} + c \sin \varphi_1 \cos \delta_{1,c}; \\ A_{1,p} \sin \delta_{1,p} &= a \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin \delta_{1,a} + \\ &\quad + b \cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \delta_{1,b} + c \sin \varphi_1 \sin \delta_{1,c}.\end{aligned}\quad (43_b)$$

A D_2 pedig, a (12)-ből

$$D_2 = \frac{n_2 r_2 \cos \varphi_2}{(n_1 r_2 + n_2 r_1)^{1/2} \cdot (n_1 r_2 \cos^2 \varphi_1 + n_2 r_1 \cos^2 \varphi_2)^{1/2}}. \quad (44)$$

Ezek szerint mindazok a jellemzők, a melyekkel az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és az $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ mint egyszerű harmonikus lineáris váltakozások kifejezhetők, az a, b, c ; $\delta_{1,a}, \delta_{1,b}, \delta_{1,c}$; az r_1, r_2 ; φ_1, φ_2 és a ϑ adatokból meghatározhatók.

Magok az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ összetevők egymásra is és a $\overline{CS}_2 = r_2$ -re is merőlegesek; eredőjük e szerint egy az r_2 -re merőleges ellipsisvektor.

Megjegyzendő, hogy a bennük előforduló együttthatók még írhatók:

$$\frac{1}{r_1} F_{1,m} \cdot D_2 = \frac{2}{r_1} \cdot \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{n_1 r_2}{n_2 r_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{n_1 r_2}{n_2 r_1} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos^2 \varphi_2} \right) \right\}^{-1/2} \quad (45)$$

$$\frac{1}{r_1} F_{1,p} \cdot D_2 = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{\cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot F_{1,m} \cdot D_2. \quad (46)$$

Ezek a kifejezések az r_1 és r_2 távolságok bármely oly értékeire nézve érvényesek, a melyeknél az eddigi fejtegetések alapját képező kísérleti tapasztalatok és tételek még fennállanak.

Ezenkívül, a meddig itt φ_2 a teljes visszaverődés határszögénél *kisebb*, addig a φ_1 is kisebb mint 90° , úgy hogy ekkor a jelen § valamennyi kifejezése *reális* marad; különösen pedig az r_1 és r_2 távolságok ilyenek.

Továbbá megjegyzendő, hogy a (40) egyenletekben csak az

$$\frac{1}{r_1} F_{1,m} \cdot D_2$$

együtttható fordul elő a nélkül, hogy a φ_1 vagy φ_2 valamely trigonometriai függvényével volna szorozva; ellenben az

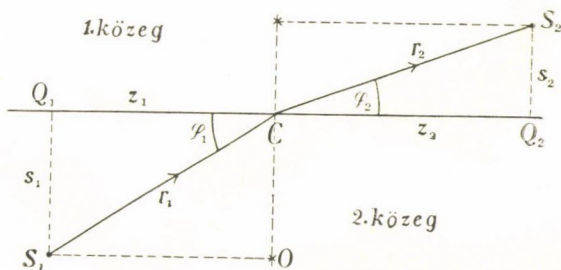
$$\frac{1}{r_1} F_{1,p} \cdot D_2$$

együtttható külön úgy a $\cos \varphi_1$ -gyel, mint a $\sin \varphi_1$ -gyel szorozva jelentkezik. Ezek szerint, ha csak algebrailag tekintjük a felforgó viszonyokat, azt kell következtetnünk, hogy a meddig r_1 és r_2 távolságok *végesek*: a (40) kifejezések amplitúdói szintén csak végesek és folytonosak lehetnek; de a teljes visszaverődés $\varphi_{2\text{ tot}}$ határszögénél $\varphi_1 = 90^\circ$ lévén, maguk ezek az amplitúdók is eltűnnek. Ezt már a közönséges, mindennapi tapasztalat igazolja; ugyanis a teljes visszaverődés határszögén belül eső térben a szétszórva törött sugár fényerőssége véges és megfigyelhető; de folytonosan fogy e határszögig, ott teljesen eltűnik és

a tér többi részében is zérus értékű, észrevehetetlen csekély, mindaddig, míg r_1 és r_2 véges.

b) *Physikai fejtegetés.*

Szóban forgó jelenségünket most physikai sajátosságai szerint is kissé kell közelebbről tárgyalnunk, mert csak ez alapon ítélhetjük meg azt, miképen kelljen a (40) kifejezéseinket alkalmazni, ha a fénylő pont igen közel esik az elválasztó felülethez.



7. ábra.

E végből újra kiindulunk az 1. ábrából, a melynek most használandó részletét a 7. ábra tünteti elő; ebben az OC egyenes az elválasztó síknak a rajz síkjával való metszete; a (18) egyenletek szerint

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{z_1}{\cos \varphi_1} = z_1 \cos \varphi_1 + s_1 \sin \varphi_1; \\ r_2 &= \frac{z_2}{\cos \varphi_2} = z_2 \cos \varphi_2 + s_2 \sin \varphi_2; \end{aligned} \quad (18)$$

legyenek továbbá az S_1 és az S_2 pontok helyei előre megadva; ekkor a C pont helyzete is meg van határozva.

Ugyanis maga az S_1CS_2 sík az által van meghatározva, hogy az S_1 és S_2 pontokon áthaladó, az elválasztó sík merőleges síknak tartozik lenni; másrészt, az S_1 és S_2 pontok helye az elválasztó síkhoz képest ismert lévén: a z_1 , z_2 és $s_1 + s_2$ hosszúságok is ismertek, úgy hogy e hosszúságok, a φ_1 és φ_2 szögek és az n_1 és n_2 törésmutatók között a következő két egyenlet áll fenn:

$$\begin{aligned} z_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + z_2 \operatorname{tg} \varphi_2 &= s_1 + s_2; \\ n_1 \sin \varphi_1 &= n_2 \sin \varphi_2; \end{aligned} \quad (47)$$

ezekből az eddig ismeretlen φ_1 és φ_2 meghatározható; ez alapján külön az

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1 \operatorname{tg} \varphi_1; \\ s_2 &= z_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \end{aligned} \quad (48)$$

következik; ekként az r_1 sugár C beejtési helye meg van határozva.

Maga a számítás nem egészen egyszerű; (47)-ből lesz:

$$\left\{ \frac{z_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}} + \frac{z_2 n_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \varphi_1}} \right\} \sin \varphi_1 = s_1 + s_2, \quad (47_a)$$

a mely $\sin^2 \varphi_1$ -re nézve negyedfokú, $\sin \varphi_1$ -re nézve nyolczadfokú egyenlet.

A valóságban rendszeren igen jelentékenyen egyszerűsíthető az eset; ugyanis rendszerint az S_1 helye a választó síkhoz képest meghatározott és ismert; továbbá szintén adva szokott lenni a φ_2 szög, a melynek egyik szára a most tetszésszerűtől hosszúnak hagyott r_2 ; fejeztessék ki a keresendő $\overline{OC} = s_1$ és φ_1 .

E szerint áll:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2; \\ s_1 &= z_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = z_1 \frac{n_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \varphi_2}}; \end{aligned} \quad (49)$$

a második egyenlet értelmében az s_1 , azaz az \overline{OC} (a mely a C érkezési helynek a távolsága az S_1 fénylő pontnak az elválasztó síkra vonatkozó O talppontjától) a φ_2 szöggel együtt folytonosan növekszik.

Magán a teljes visszaverődés $\varphi_{2 \text{ tot}}$ határszögén, hol

$$n_2 \sin \varphi_{2 \text{ tot}} = n_1,$$

az s_1 a végtelen felé növekszik és így a C az O talpponttól csakugyan — a *véges* z_1 -hez képest — igen nagy távolságba jut, úgy hogy a fenti (18) formulák és a 7. ábra szerint, már ezáltal is, az r_1 igen nagy lesz, a törött fénysugár amplitudója pedig elenyésző kicsiny.

Maga a D_2 szétterülési együttható a (45) és a (18) szerint írható

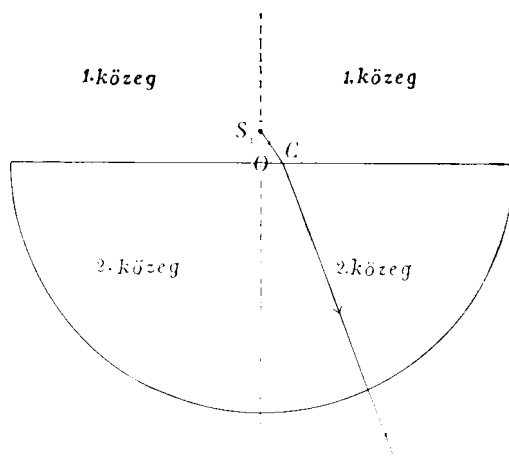
$$\frac{1}{r_1} D_2 = \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\{n_1^2 r_2^2 \cos^2 \varphi_1 + n_1 n_2 r_1 r_2 (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2) + n_2^2 r_1^2 \cos^2 \varphi_2\}^{1/2}};$$

vagy

$$\frac{1}{r_1} D_2 = \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\left\{n_1^2 r_2^2 \cos^2 \varphi_1 + n_1 n_2 r_1 r_2 \left(\cos \varphi_1 + \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos \varphi_1}\right) + n_2^2 r_1^2 \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1}\right\}^{1/2}}. \quad (50)$$

E jelenségnek igen fontos részlete az, *hol látszik a fénylő pont az észlelő szemnek?*

E végből legyen a 8. ábra szerint ismét S_1 a pontszerű fényforrás az első közegben (például levegőben), míg a második



8. ábra.

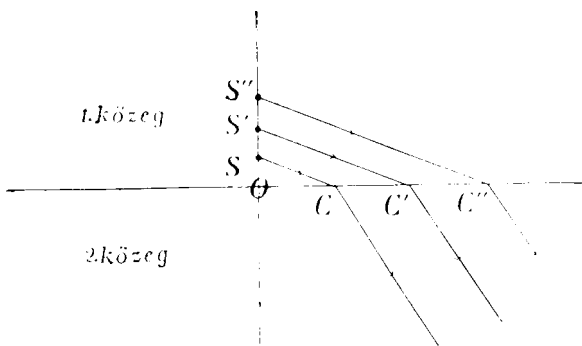
közeg félgömb- vagy félhenger-alakú legyen (és például üvegből álljon.) Az S_1 közel legyen e második közeg átfogó lapjához és ennek középpontján átmenő normálisa valamely pontjában legyen elhelyezve; e szerint az $S_1 C$ sugár a törés után a második közegben tovább haladva, igen közelítőlegesen merőlegesen halad át a félgömb- vagy félhenger-felületen; és így ez *utóbbi* törésnél fogva e sugár alig szenved irányváltozást.

E kilépő sugár az észlelő szemébe jut; e szem e szerint az S_1 -et éppen ennek a kilépő a sugárnak ellentétes folytatásá-

ban látja, azaz a szem S_1 -nek a képét az elválasztó síknak mindenkori C pontjára vetítve látja, de általában véve *nem* az S_1 -nek e síkra merőleges vetülete O helyén.

Szabadjon itt egy elemi kísérletre emlékeztetnem:

Ha a 9. ábra szerint a 8. ábra \overline{OS}_1 normálisa mentén több S, S', S'', \dots , fénylő pont van elhelyezve s az észlelő szeme ez $\overline{OS}, \overline{OS'}, \overline{OS''}$ merőleges távolságokhoz képest jelentékeny távolságban van, akkor az e fénylő pontokból a szembe jutó sugarak igen közelítőlegesen egymáshoz párhuzamosak és így e szem az



9. ábra.

S, S', S'', \dots képeit az elválasztó síknak C, C', C'', \dots pontjain látja, jelentékenyen széthúzva egymástól.

Ha például fémkörző csúcsvégét, fémtűt vagy bármely hosszmenti méretű testet merőlegesen az átfogó síkra úgy helyezünk el, hogy egyik, csúcsos vége e lapot érintse, és szemünk a 8. ábra félgömb- vagy félhenger-lencséjén át tekint egymás után különböző irányokból e testre: ennek képe különböző módon széthúzva, eltorzítva látszik.

Akként helyezve el szemünket, hogy a beléje jutó sugárnyaláb közel haladjon az üvegben a teljes visszaverődés határ irányához: az észlelet szerint az S képének \overline{OC} látszólagos helyzetváltozása többszörösét teszi ki az SO merőleges távolságnak.

Mindezek a C, C', C'', \dots képek magánál, a teljes visszaverődés határszögénél teljesen eltűnnek s e határon túl lévő φ_2

szögekre nézve is eltűnve maradnak, ha csak az \overline{SO} távolságok nem rendkívül kicsinyek; így például egy késpenge puha éle, melyet erősen szorítunk az elválasztó síkhoz, az érintkezés helyén még e $\varphi_{2\text{ tot}}$ határszögön túl is látszik, mint igen kicsiny méretű folt, a mely helyét a választó felületen nem változtatja, bárhonnan nézzük is.

Hasonlóképen számos egyenes megfigyelés alapján állíthatom, hogy mindazok a fénylő pontok, melyek oly közel esnek az elválasztó felülethez – bár vele közvetlenül nem érintkeznek – hogy még a teljes visszaverődés határszögén túl terjedő térben is láthatók, egyszersmind azt a közös saját-ságot mutatják, hogy képük mindig egy- és ugyanazon a helyén az elválasztó síknak látszik, ugyanis e lapra való O normális vetületük helyén, bárhonnan nézzük is az ily fénylő pontot.

E kétségtelen tapasztalatok mutatják, hogy ily S_1 pontok z_1 merőleges távolsága az elválasztó síktól, sőt még a hozzátartozó valamennyi $s_1 = z_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ hosszúságok, éppen úgy, mint az
$$r_1 = \frac{s_1}{\sin \varphi_1} = \frac{z_1}{\cos \varphi_1}$$
 sugárhosszúságok is, csak *igen kicsinyek lehetnek*, oly kicsinyek, hogy rendesen, különös mérési eljárások nélkül alig mérhetők; mindenesetre több százezerte, vagy milliószorta kisebbek, mint azok a rendesen több deciméteres vagy méteres r_2 távolságok, a melyekben, C -től számítva az észlelő szeme szokott lenni.

c) Összefoglalva a jelen § fejtegetéseinek és tapasztalatainak eredményeit: a (40) és (44) kifejezések közvetlenül érvényben vannak és alkalmazhatók mindaddig, míg z_1 és vele r_1 sehol sem lesz az r_2 véges értékhez képest igen kicsiny; a törött sugár amplitudói folytonosan fogynak a teljes visszaverődés határirányáig s e határon magán, valamint az azon túl lévő térben eltűnnek.

Egyben, magán e határon a (40) és (44) kifejezések felmondják a szolgálatot, mert ekkor véges, bár kicsiny z_1 -re nézve az r_1 a végtelen felé növekszik, a mi megvalósíthatatlan, lehetetlen physikai jelenségre vallana.

Jegyzet. Az az eset, mikor z_1 , valamint r_1 igen kicsiny

az n_2 -höz képest, külön vizsgálat tárgya, melyről a 8. és 13. §. részletesen szól,

7. §. *A törött sugarak vektorainak részletes megvizsgálása a teljes visszaverődés határszögén túl eső térben, mikor a fénylő pont nincsen optikailag közel az elválasztó síkhoz.*

Ha φ_2 nagyobb a totális reflexio $\varphi_{2\text{ tot}}$ határszögénél, akkor mindig

$$\begin{aligned}\cos \varphi_2 &\leq \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2}; \quad \sin \varphi_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2 \geq 1; \\ \cos \varphi_1 &= + \frac{1}{n_1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \varphi_2} = + \frac{\sqrt{-1}}{n_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2};\end{aligned}\quad (51)$$

hol az utolsó kifejezés pozitív előjele már a 4. § (22) formulája után következő *b*) pontjában nyert okadatolást.

A (20) és (43), (23_a), (23), (24) egyenletek szerint itt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{1,m,2} &= \left\{ -\sqrt{-1} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 (a \cos \vartheta e^{\psi_{1,a}^{\sqrt{-1}}} - b \sin \vartheta \sin e^{\psi_{1,b}^{\sqrt{-1}}}) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}; \\ \mathfrak{C}_{1,p,2} &= \left\{ -\sqrt{-1} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 (a \sin \vartheta \cos \varphi_1 e^{\psi_{1,a}^{\sqrt{-1}}} + \right. \\ &\quad \left. + b \cos \vartheta \cos \varphi_1 e^{\psi_{1,b}^{\sqrt{-1}}} + c \sin \varphi_1 e^{\psi_{1,c}^{\sqrt{-1}}}) \right\} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}.\end{aligned}\quad (52)$$

E vonatkozásokban a (41) egyenletekből, a (23) egyenletek szerkezete szerint rendre:

$$\{\phi_{1,a}, \phi_{1,b}, \phi_{1,c}\} = \{\psi_{1,a}, \psi_{1,b}, \psi_{1,c} - \sqrt{-1} \cdot \frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}\};$$

hol áll:

$$\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1 \sin \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right), \quad (52_a)$$

$$\phi_{1,a} = \phi + \delta_{1,a};$$

$$\phi_{1,b} = \phi + \delta_{1,b}; \quad (52_b)$$

$$\phi_{1,c} = \phi + \delta_{1,c}.$$

E kifejezések *reális* részei egyenlők a baloldali vektor-összetevőkkel; a külső exponentiális tényező a teljes visszaverődés

$\varphi_{2\text{ tot}}$ határszögétől kezdve egészen a $\varphi_2 = 90^\circ$ -ig mindig valós marad.

Itt is hozhatók e jobboldali kifejezések a lineáris, egyszerűen harmonikus vektorok alakjába; az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ összetevők itt is egy eredő ellipszisszerű fényvektort szolgáltatnak, melynek síkja az r_2 -re merőleges.

Jelen § további részeiben a z_1 a λ_1 -hez képest ne legyen kicsiny vagy vele egyenlő rendű, hanem *tetemes*; itt külön a teljes visszaverődés határszögének esete és külön az ezentúl eső tér vizsgálendő meg.

a) Ha φ_2 egyenlő a $\varphi_{2\text{ tot}}$ határszöggel, akkor

$$\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} = 0;$$

és az (52)-ben fellépő, külső hatványkitevőleges tényezők az egységgel egyenlők; minthogy azonban itt $\cos \varphi_1 = 0$, és a D_2 is az (50) szerint végtelen kicsiny lesz, azért e határesetben az (52) rendszer zérus amplitudójú fényvektorokat jelent; ezért e kifejezések rendes méretű z_1 -eknél itt, hol r_1 számára $r_1 = \frac{z_1}{\cos \varphi_1}$ szerint végtelen hosszúságú r_1 -eket szolgáltatnának, nem alkalmazhatók.

β) Ha $\varphi_2 > \varphi_{2\text{ tot}}$, akkor rendes méretű z_1 -nél az említett exponentiális mennyiség igen gyorsan igen kicsiny lesz. Ha ezenkívül az r_1 és az r_2 nem lesznek egyszerre igen kicsinyek, a mi a most tárgyalt esetünkben nem fordul elő, akkor az $F_{1,m} \cdot D_2$ és az $F_{1,p} \cdot D_2$ nem lehetnek jelentékeny értékűek; ennél fogva a $\varphi_2 > \varphi_{2\text{ tot}}$ esetben az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ vektorok amplitudói elenyészők, úgy hogy a teljes visszaverődés határszögén túl eső térben a fényerősség az említett hatványkitevős tényezőnél fogva valóban észrevehetetlen.

Ez a körülmény szintén teljesen megfelel a tapasztalatnak, a mikor ugyanis a fénylő pont az elválasztó síktól a λ_1 -hez képest tetemes z_1 távolságban van.

Maga az $\frac{1}{r_1} D_2$ értéke a jelen esetben a megelőző § (50) szerkezete szerint:

$$\frac{1}{r_1} D_2 = \frac{+\sqrt{-1} \cdot n_2 \cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{\{r_2^2 (n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \varphi_2)^2 + n_1^2 n_2^2 z_1^2 \cos^2 \varphi_2 + \sqrt{-1} n_2 z_1 r_2 [2n_1^2 - (n_1^2 + n_2^2) \sin^2 \varphi_2] \cdot \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}\}^{1/2}}, \quad (53)$$

melynek számlálója és nevezője is imaginárius tagokat tartalmaz.

Írva most egyszerűség kedvéért rendre:

$$\begin{aligned} n_2 \cdot \cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} &= P; \\ r_2^2 (n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \varphi_2)^2 + n_1^2 n_2^2 z_1^2 \cos^2 \varphi_2 &= Q; \\ n_1 z_1 r_2 (2n_1^2 - (n_1^2 + n_2^2) \sin^2 \varphi_2) \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} &= S; \end{aligned} \quad (53_a)$$

akkor lesz

$$\frac{1}{r_1} D_2 = \frac{+P \cdot \sqrt{-1}}{\{Q + S \cdot \sqrt{-1}\}^{1/2}}; \quad (54)$$

vagy

$$\frac{1}{r_1} D_2 = \frac{P \cdot \sqrt{-1} (Q - S \sqrt{-1})^{1/2}}{(Q^2 + S^2)^{1/2}}. \quad (54_a)$$

Jegyzet: A $(Q - S \sqrt{-1})^{1/2}$ mennyiség könnyen alakítható egyszerű komplex mennyiséggé; írva ugyanis

$$(Q - S \sqrt{-1})^{1/2} = q - s \sqrt{-1}, \quad (a)$$

kell, hogy álljon:

$$Q - S \cdot \sqrt{-1} = q^2 - s^2 - 2qs \sqrt{-1},$$

a miből külön-külön

$$\begin{aligned} q^2 - s^2 &= Q; \\ 2qs &= S. \end{aligned} \quad (b)$$

Ezekből

$$q^2 - \frac{S^2}{4q^2} = Q, \quad \text{azaz:} \quad q^4 - Qq^2 = +\frac{1}{4} \cdot S^2;$$

és

$$-s^2 + \frac{S^2}{4s^2} = Q, \quad \text{azaz:} \quad s^4 + Q \cdot s^2 = +\frac{1}{4} S^2,$$

avagy:

$$\begin{aligned} q^2 &= +\frac{1}{2} Q \pm \frac{1}{2} \sqrt{Q^2 + S^2}; \\ s^2 &= -\frac{1}{2} Q \pm \frac{1}{2} \sqrt{Q^2 + S^2}. \end{aligned}$$

Itt $Q, S; q, s$ az (53_a) szerint *reális mennyiségek*, azaz Q^2, S^2, q^2, s^2 csak *positívek*; e szerint a reális gyökörtékek:

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{1}{2} (\sqrt{Q^2 + S^2} + Q); \\ s^2 &= \frac{1}{2} (\sqrt{Q^2 + S^2} - Q). \end{aligned} \quad (r)$$

Ezekkel végre:

$$\begin{aligned} (Q - S \sqrt{-1})^{1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{Q^2 + S^2} + Q)^{1/2} - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{Q^2 + S^2} - Q)^{1/2} \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

mint a kívánt átalakítás egyszerű eredménye; evvel az (54_a) jobb oldala egyszerű komplex mennyiséggel fejezhető ki.

Arra nézve, hogy az (52) jobb oldalai reális részei előállíthatók legyenek, kell, hogy ezekben mindenekelőtt azokra a mennyiségekre fordítsuk figyelmünket, a melyek a φ_1 és φ_2 függvényeit tartalmazzák, melyek e szerint a teljes visszaverődés határszögén túl eső térben komplex szerkezetűek lesznek. Az $F_{1,m}$ és $F_{1,p}$ -nek a 2. §-ban idézett alakjai, továbbá az (54_a) értelmében az (52)-nek ily természetű mennyiségei a következők:

$$\begin{aligned} &(-\sqrt{-1}) \frac{2 \cdot \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \cdot (+\sqrt{-1}) \cdot \frac{P(Q - S \sqrt{-1})^{1/2}}{(Q^2 + S^2)^{1/2}}; \\ &(-\sqrt{-1}) \frac{2 \sin \varphi_2 \cos^2 \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) (\cos \varphi_1 - \varphi_2)} \cdot (+\sqrt{-1}) \cdot \frac{P(Q - S \sqrt{-1})^{1/2}}{(Q^2 + S^2)^{1/2}}; \quad (55) \\ &(-\sqrt{-1}) \frac{2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot (+\sqrt{-1}) \cdot \frac{P(Q - S \sqrt{-1})^{1/2}}{(Q^2 + S^2)^{1/2}}; \end{aligned}$$

hol az (53_a) szerint P, Q, S a $\sin \varphi_2$ *reális* függvényei.

Az (55) kifejezéseknek a $\varphi_2 \leq \varphi_{2 \text{ tot}}$ esetre való, egyszerű, komplex mennyiségekké való alakítása semmi különös nehézséggel nem jár; de az ily általánosságban itt nem szükséges, mert az ezek mellett a kifejezések mellett fellépő

$$e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}$$

hatvány-mennyiség még e határszögnél is csak az egységgel egyenlő, míg a $\cos \varphi_1$ ekkor zérus, úgy hogy az (55) szorozmányok zérussal egyenlők. Másrészt, e határszögen túl eső térben, ha $z_1 : \lambda_1$ jelentékeny, vagy csak néhányszor is nagyobb az egységénél: e hatvány-kitevős együttható igen rohamosan esik a zérus felé, úgy hogy a megfigyelhetőség szempontjából a z_1 -nek kicsiny, de λ_1 -nél nem kisebb értékei mellett is e térben az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ zérusnak veendő, a mi ismét teljesen megegyezik a tapasztalattal, úgy hogy az (55) kifejezéseknek, az ott irt általánosságban való további átalakításával itt nem kell foglalkoznunk; legalább addig nem, míg z_1 nem kisebb, mint λ_1 -nek kevés számú többszörös értéke.

Ellenben, ha a fénylő pont mindinkább közelebb jut az elválasztó síkhoz, akkor a megelőző, a 6. § második részében említett teljesen biztos tapasztalat érvényesül, ugyanis, hogy a teljes visszaverődés határirányán túl eső térben a fénylő pont csak akkor látszik, amikor egyszersmind e pontnak az elválasztó síkra vetített mindenkori látszólagos képe (helye) nem különböztethető meg ugyane fénylő pontnak a nevezett síkra való merőleges vetületétől, bármily oly irányból tekint is reá az észlelő szeme a félhenger- vagy félgömbalakú lencsén keresztül, v. ö. a 7., 8., 9. ábrát.

Ezeket az eseteket, mikor a fénylő pont az elválasztó síkhoz oly nagy közelségben van, eddigi fejtegetéseink alapján a következő §§-ban fogjuk tárgyalni, mert az ekkor előálló nevezetes jelenségek éppen azok, a melyeknek egyszerűbb esetei a már az 1. §-ban idézett két dolgozat terjedelmes kísérleti vizsgálatainak tárgyai voltak.

Az általánosabb elmélet kifejtése, mikor a fénylő pontok az elválasztó síktól optikailag kicsiny távolságban vannak.

8. §. *A második, a sűrűbb közegbe szétszórt, törött fénysugarak vektorainak tapasztalatszerű megvizsgálása, a mikor a fénylő pont igen közel esik az elválasztó síkhoz.*

Az a kérdés: mily közelségbe az elválasztó, a törő és visszaverő síkhoz kell jutnia a pontszerű fényforrásnak, hogy ez

a második közegben a teljes visszaverődés határán és azon túl is látható legyen, külön, nagyobb terjedelmű, kényes kísérleti vizsgálat tárgya lesz, a melylyel, a mint időm engedi, foglalkozni fogok, vagy a melylyel alkalmas segéderőt megbízni ohajtok.

E kérdés megoldására szolgáló kísérleti eljárás módszerét már teljesen megbízhatóan megállapítottam és nagyszámú észlelettel igen alkalmasnak találtam; ha majd részletes és pontos mérési eredmények birtokában leszek, bátor leszek erre vonatkozó vizsgálataimat a Tekintetes Akadémia elé terjeszteni.

Jelenleg talán el'egendő, ha eddig megállapított eredményeim közül a következőket sorolom fel, a melyek az itt szereplő távolságok és hosszmeretek *rendjét* engedik megbecsülni és a melyek értelme a 7., 8., 9. ábrán követhető.

a) Az a merőleges távolság az elválasztó síktól, a z_1 , a melynél a fénylő pont a második közegben, fehér fény esetén a totális reflexio határán túl is kezd láthatóvá lenni, levegő és üveg lévén a két közeg, középértékben egy mikront teszen ki.

b) Az elválasztó síkon előálló annak a kis körnek az átmérője, a mely kör területére az ily közelségben vagy még közelebben lévő fénylő pontból ejtett sugarak a törés után a második közegben, az említett határirányon túl még megláthatók, nem lehet nagyobb, mint átlagban 0.05 mm.; de rendszerint ennél sokkal kisebb marad, sőt gyakran oly kicsiny, hogy méretét nem is lehetett megállapítani.

Mínthogy (18) szerint $r_1 = \frac{\tilde{z}_1}{\cos \varphi_1}$, kitetszik, hogy z_1 és r_1 fentemlített méretei mellett $\cos \varphi_1$ nem is lehet oly közel a zérushoz, hogy r_1 jelentékeny, illetőleg könnyen jól mérhető legyen, úgy hogy e tapasztalat szerint, *szigorúan* egyszínű fény esetében a $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ határirány mentén valamint a hozzá legközelebben, e határirányon innen és túl haladó sugarak nem is adhatnak olyan törött sugarakat, a melyek megfigyelhetők, észrevehetők volnának.

Ámde a tapasztalat szerint a most említett ily határirányokban is láthatók e fénylő pontok, és pedig merőleges vetü-

leti talppontjuk O helyén; ez csak úgy lehetséges, ha fényük nem szigorúan homogen, mert ekkor az egyes féynemek mindegyikének más-más értékű $\varphi_2 = \varphi_{2\text{ tot}}$ határszöge van, és bármely törési irány mentén a második közegben lesz egy vagy több féynyaláb, a mely a fénylő pontot mindig láthatóvá teszi.

Ezt a felfogást a legnagyobb mértékben megerősíti az a sokszorosan megfigyelt és igazolt ténykörülmeny, hogy az elválasztó síkhoz ily közelségben lévő fénylő pontból határozott polárossági állapotban induló, szétszórt, a második közegbe nyomuló törött féynyalábok közül azok, a melyek a teljes visszaverődés határiránya mentén, vagy ennek az iránynak igen közeli szomszédságában, ezen innen vagy túl haladnak, *nem mutatnak határozott polározási állapotot*, bár a többi irány mentén haladó szétszórva törött sugarak polárossági állapota egészen meghatározott és jól mérhető.

E körülmenyt részletesen fel is említettem jelen dolgozatom 1. §-a lábjegyzékében idézett közleményem 11. lapján; továbbá folytatólagosan a 29., 30., 31., 32., 34., 38., 39., 40.; 77., 78., 79., 80., 82., 84., 85., 86., 87., 93., 94. lapján lévő számtáblákban, hol a megfelelő helyeken: «*a totális reflexio határiránya*» sor jelzi, hogy e helyen a polározási állapot bizonytalansága miatt mérések nem voltak végezhetők.

Éppen így KURDILLA FERENCZnek ugyancsak jelen dolgozatom 1. §-a lábjegyzetében idézett közleménye 144., 145., 147., 148., 150., 151., 153., 154., 156., 157., 159., 160., 162., 163., 165., 166., 173., 174., 176., 177., 180. lapjain ugyanezeket a határirányokat sorolja fel, mint a melyek mentén a szétszórt sugarak polárossági állapotát bizonytalanságánál fogva nem lehetett mérni.

Az idézett táblák felsorolt helyei még azt is mutatják, és pedig egész világosan, hogy e szétszórt sugarak polárossági állapota csak akkor volt határozott, mikor e sugarak a nevezett határiránytól, ezen innen es túl legalább is átlagban 2.5° -kal eltértek.

Az így határolt, 5° -ot kitevő közben a BABINET-féle kompensátorral való megfigyelés nem mutatott szabályszerű interferencia-csikrendszert, hanem ellenkezőleg, ködszerűen vagy füstszerűen megvilágított látóteret; az ezt a közt megelőző és követő

térben e csikrendszer mindig szépen van kialakulva, jelölés annak, hogy ott a látótérben lévő fénynek határozott polározási állapota van.

Ezért úgy előbbi elméletem, mint alább részletesen kifejthető kiegészített elméletem eredményei közvetlenül nem hasonlíthatók össze a most említett, határozatlan polározásbeli állapotú tér jelenségeivel, hanem csak azokkal, a melyek a határozott polárosságú szétszóró sugarakon állanak elő.

9. §. *A teljes visszaverődés határszögén belül haladó, szétszórva törött sugarak vektorainak és összetevőinek közelebbi megvizsgálása, ha a fénylő pont az elválasztó síkhoz optikailag közel esik.*

Az előbbi három §-ban részletesen ismertetett tapasztalatok szerint a jelenleg tárgyalandó esetben a z_1 és vele együtt az r_1 is csak igen kicsiny lehet az r_2 -höz képest; e szerint, különösen a 6. és 8. §. kifejezéseiben az r_1 -gyel szorzott tagok az r_2 -vel szorzottakkal szemben elhanyagolhatók, mint például a (40) és (44) kifejezésekben; de a hol az r_1 - vagy a z_1 -gyel szorzott tagok magukban, vagy λ_1 -el osztva lépnek fel, ez az elhanyagolás már nem engedhető meg, mint például a (41)- és (42)-ben és az (52) kifejezések hatvány-kitevős tényezőinél, valamint (52_a) és (52_b)-ben.

a) Csak egy kivételes esetet kell és pedig előre felemlítenünk, a mely ugyanis a szétszórva törött ama sugár amplitudójára vonatkozik, a mikor $\varphi_2 = \varphi_{2\text{ tot}}$; azaz mikor $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; ekkor ugyanis a (44) vagy az (53) szerint pontosan volna:

$$\frac{1}{r_1} D_2 = \frac{n_2 \cos \varphi_{2\text{ tot}}}{(n_1 r_2 + n_2 r_1)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(n_2 r_1)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_{2\text{ tot}}} = \frac{\sqrt{n_2}}{(n_1 r_1 r_2 + n_2 r_1^2)^{1/2}},$$

a mely érték az r_1 -nek a zérus felé való konvergálásával a végtelen felé növekszik.

De ezzel szemben áll az a körülmény, hogy a (44), (45), (52), (55) kifejezések szerint az

$$\frac{1}{r_1} F_{1,m} \cdot D_2; \quad \frac{1}{r_1} F_{1,p} \cdot D_2 \cos \varphi_1; \quad \frac{1}{r_1} F_{1,p} \cdot D_2 \sin \varphi_1$$

szorozmányok lépnek fel, a melyek szerkezetében:

$$F_{1,m} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad F_{1,p} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)};$$

úgy, hogy a nevezett $\varphi_2 = \varphi_{2\text{tot}}$ határesetben az $F_{1,m}$ és $F_{1,p}$, valamint a felsorolt szorzományok is zérus felé konvergálnak.

Ezek szerint a $\varphi_2 = \varphi_{2\text{tot}}$ és az $r_1 = 0$ két feltételnek egyszerre való fellépésénél mind a három szorzomány a $\frac{0}{0}$ bizonytalan értéket veszi fel, a mely algebrailag nem határozható meg, minthogy φ_1 és r_1 egymástól mindenképen függetlenek s e függetlenség e változóknak a zérus felé való közeledésére nézve változatlanul fennáll.

Ezért ennek a kettős határesetnek ily módon való elméleti vizsgálatát így nem folytatjuk, mert e bizonytalan, meg nem határozható elméleti eredményt kísérletileg amúgy sem hasonlíthatjuk össze az ebben a határesetben előálló bizonytalan polárosságú jelenséggel, a melynek jelenlétét a megelőző 8. § végén részletesen ismertettük.

b) Végezzük e szerint azt az egyszerűsítést, a mely adódik, ha az r_1 -et az r_2 -vel szemben elhanyagolható kicsinynek tekintetjük, de a φ_1 egyelőre tetszésszerűnti, azonban $< \frac{\pi}{2}$ -nél legyen.

Ekkor a (44)-ből vagy az (53)-ból

$$\frac{1}{r_1} D_2 = \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_1 r_2} \cdot \sqrt{n_1 r_2}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_1} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}. \quad (56)$$

Ezen az alapon a fent felsorolt szorzományok ezentúl írhatók:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 &= \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}; \\ \frac{1}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \cos \varphi_1 &= \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}; \\ \frac{1}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \sin \varphi_1 &= \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned} \quad (57)$$

Ameddig a teljes visszaverődés határszögén belül haladó sugarakról van szó, a (40) kifejezések mind reálisak maradnak s jelenleg átmennek a következőkbe:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_{1,m,2} &= \frac{A_{1,m}}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 \cdot \sin \varphi_{1,m} = \\
 &= \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \left\{ a \cos \vartheta \sin \varphi_{1,a} - b \sin \vartheta \sin \varphi_{1,b} \right\} \cdot \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}; \\
 \mathfrak{E}_{1,p,2} &= \frac{A_{1,p}}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \cdot \sin \varphi_{1,p} = \quad (58) \\
 &= \frac{2}{r_1} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \left\{ a \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin \varphi_{1,a} + b \cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \varphi_{1,b} + \right. \\
 &\quad \left. + c \sin \varphi_1 \sin \varphi_{1,c} \right\} \cdot \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}.
 \end{aligned}$$

A továbbiakra nézve a (41), (42), (43); (43_a); (43_b) egyenletek érvényesek; így különösen a (43_a)- és (43_b)-ből nyerjük:

$$\begin{aligned}
 A_{1,m}^2 &= a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta - 2ab \sin \vartheta \cos \vartheta \cos (\delta_{1,b} - \delta_{1,a}); \\
 \operatorname{tg} \delta_{1,m} &= \frac{a \cos \vartheta \sin \delta_{1,a} - b \sin \vartheta \sin \delta_{1,b}}{a \cos \vartheta \cos \delta_{1,a} - b \sin \vartheta \cos \delta_{1,b}}. \quad (59) \\
 A_{1,p}^2 &= (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta) \cos^2 \varphi_1 + c^2 \sin^2 \varphi_1 + \\
 &\quad 2ab \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi_1 \cos (\delta_{1,b} - \delta_{1,a}) + 2(ac \sin \vartheta \cos (\delta_{1,c} - \delta_{1,a}) + \\
 &\quad + bc \cos \vartheta \cos (\delta_{1,c} - \delta_{1,b})) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1; \quad (60) \\
 \operatorname{tg} \delta_{1,p} &= \frac{a \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin \delta_{1,a} + b \cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \delta_{1,b} + c \sin \varphi_1 \sin \delta_{1,c}}{a \sin \vartheta \cos \varphi_1 \cos \delta_{1,a} + b \cos \vartheta \cos \varphi_1 \cos \delta_{1,b} + c \sin \varphi_1 \cos \delta_{1,c}}.
 \end{aligned}$$

E meghatározó mennyiségek és az $n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$ felhasználásával a fent (58) alatt írt egyenletek a (41) és (42) jelölésekkel:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_{1,m,2} &= \frac{A_{1,m}}{r_2} \cdot \frac{2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} \cdot \sin (\psi_{1,2} + \delta_{1,m}); \\
 \mathfrak{E}_{1,p,2} &= \frac{A_{1,p}}{r_2} \cdot \frac{2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \sin (\psi_{1,2} + \delta_{1,p}). \quad (61)
 \end{aligned}$$

E két vektor egyszerűen harmonikus lineáris váltakozást jelent; mindegyikük, és ellipszisszerű eredőjük is merőleges az r_2 -re; e kifejezések a $\varphi_2 = 0$ és $\varphi_2 = \varphi_{2\text{tot}}$ közötti térben mind reálisak.

10. §. A teljes visszaverődés határszögén kívül haladó, szétszórva törött sugarak vektorainak és összetevőinek közelebbi

megvizsgálása, ha a fénylő pont az elválasztó síkhoz optikailag közel esik.

Az (52) és az (57) egyenletei szerint jelenleg, mikor φ_1 a $\varphi_{2\text{ tot}}$ és a $\frac{\pi}{2}$ között van, az

$$\begin{aligned} (-\sqrt{-1}) \frac{1}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 = \\ = (-\sqrt{-1}) \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{1}{r_2}; \end{aligned} \quad (\alpha)$$

$$\begin{aligned} (-\sqrt{-1}) \frac{1}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \cos \varphi_1 = \\ = (-\sqrt{-1}) \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{1}{r_2}; \end{aligned} \quad (\beta)$$

$$\begin{aligned} (-\sqrt{-1}) \frac{1}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \sin \varphi_1 = \\ = (-\sqrt{-1}) \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{1}{r_2} \end{aligned} \quad (\gamma)$$

menntiségek jelentik, hogy ezeket most, a $\varphi_{2\text{ tot}} \equiv \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$ közre nézve, mikor

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2; \quad \cos \varphi_1 = + \frac{\sqrt{-1}}{n_1} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2},$$

komplex alakban kell előállítani, hogy így az (52) reális részeit lehessen képezni, melyek egyenlők a keresett $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ reális vektorok kifejezéseivel.

I. A beesés síkjára merőleges vektor kialakítása.

Itt mindenekelőtt képezendő az e § elején irt (a) kifejezés:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} &= \frac{2n_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{n_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \sqrt{-1} \cdot \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} = \\ &= \frac{2n_1}{n_2^2 - n_1^2} \cos \varphi_2 \{ n_2 \cos \varphi_2 - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \}. \end{aligned}$$

Ezzel rendre az (52)-ből:

$$\begin{aligned} & \text{az } (-\sqrt{-1}) \left(\frac{1}{r_1} F_{1,m} \cdot D_2 e^{\psi_{1,a}} \sqrt{-1} \right) \text{ reális része} = \\ & = \left\{ -\frac{2n_1}{n_2^2 - n_1^2} \cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \cdot \cos \psi_{1,a} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2n_1}{n_2^2 - n_1^2} \cdot \cos \varphi_2 n_2 \cos \varphi_2 \sin \psi_{1,a} \right\} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{1}{r_2}; \\ & \text{az } (-\sqrt{-1}) \left(\frac{1}{r_1} F_{1,m} \cdot D_2 \cdot e^{\psi_{1,b}} \sqrt{-1} \right) \text{ reális része} = \\ & = \left\{ -\frac{2n_1}{n_2^2 - n_1^2} \cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \cdot \cos \psi_{1,b} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2n_1}{n_2^2 - n_1^2} \cos \varphi_2 n_2 \cos \varphi_2 \sin \psi_{1,b} \right\} \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{1}{r_2}. \end{aligned}$$

Ezekkel az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ -nek az (52)-ben jelzett alakja némileg összevonható

$$\begin{aligned} & \mathfrak{E}_{1,m,2} = \\ & + \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{n_2^2 - n_1^2} \left\{ -(a \cos \vartheta \cos \psi_{1,a} - b \sin \vartheta \cos \psi_{1,b}) \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} + \right. \\ & \left. + (a \cos \vartheta \sin \psi_{1,a} - b \sin \vartheta \sin \psi_{1,b}) n_2 \cos \varphi_2 \right\} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}. \end{aligned}$$

Megjegyezve, hogy (52_a) és (52_b) szerint:

$$\begin{aligned} \psi_{1,a} &= \psi + \delta_{1,a}; \\ \psi_{1,b} &= \psi + \delta_{1,b}; \\ \psi &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1 \sin \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right); \end{aligned} \quad (62a)$$

és írva rövidség kedvéért:

$$\begin{aligned} C_m &= a \cos \vartheta \cos \delta_{1,a} - b \sin \vartheta \cos \delta_{1,b}; \\ S_m &= a \cos \vartheta \sin \delta_{1,a} - b \sin \vartheta \sin \delta_{1,b}; \end{aligned} \quad (62)$$

az eredő vektor kifejezése összefoglalható, a (43) és (43_a) tekintetbevételével:

$$\mathfrak{E}_{1,m,2} = T_{1,m,2} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin(\psi + \delta_{1,m,2}). \quad (63)$$

Itt rendre :

$$\begin{aligned}
 T_{1, m, 2} &= \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \{a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta - \\
 &\quad - 2ab \sin \vartheta \cos \vartheta \cos(\delta_{1, b} - \delta_{1, a})\}^{1/2}; \\
 \operatorname{tg} \delta_{1, m, 2} &= \frac{-C_m \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} + S_m n_2 \cos \varphi_2}{+ C_m n_2 \cos \varphi_2 + S_m \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} = \operatorname{tg}(\delta_{1, m} + \Delta_{1, m, 2}); \quad (64) \\
 \operatorname{tg} \delta_{1, m} &= \frac{S_m}{C_m} = \frac{a \cos \vartheta \sin \delta_{1, a} - b \sin \vartheta \sin \delta_{1, b}}{a \cos \vartheta \cos \delta_{1, a} - b \sin \vartheta \cos \delta_{1, b}}; \\
 \operatorname{tg} \Delta_{1, m, 2} &= \frac{-\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{+ n_2 \cos \varphi_2}.
 \end{aligned}$$

II. A beesés síkjával párhuzamos vektor kialakítása.

A jelen § elején felírt (β) kifejezésből nyerjük

$$\begin{aligned}
 &\frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_2} = \\
 &= \frac{2n_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1}{n_2 \cos \varphi_1 + n_1 \cos \varphi_2} = \frac{2n_1 \cos \varphi_2 \{n_2 \cos^2 \varphi_1 - n_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2\}}{n_2^2 \cos^2 \varphi_1 - n_1^2 \cos^2 \varphi_2} \quad (65) \\
 &= \frac{2n_1^2 \cos \varphi_2}{(n_2^2 - n_1^2) \{(n_1^2 + n_2^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2\}} \left\{ \frac{n_2}{n_1} (n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{-1} \cdot n_1 \cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

E szerint az (52)-nek idetartozó együtthatói:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ (-\sqrt{-1}) \frac{1}{r_1} F_{1, p} \cdot D_2 \cos \varphi_1 \left| \frac{e^{\psi_{1, a} \sqrt{-1}}}{e^{\psi_{1, b} \sqrt{-1}}} \right| \right\} = \\
 &= \left\{ (-\sqrt{-1}) \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \left| \frac{e^{\psi_{1, a} \sqrt{-1}}}{e^{\psi_{1, b} \sqrt{-1}}} \right| \right\}.
 \end{aligned}$$

E kifejezések valós részei rendre szorzandók $a \sin \vartheta$ -val és $b \cos \vartheta$ -val és azután összegezendők; így nyerjük ez összeg számára:

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_1^2 \cos \varphi_2}{(n_2^2 - n_1^2) \{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2\}} \cdot \\
 &\left\{ -n_2 \cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} (a \sin \vartheta \cos \psi_{1, a} + b \cos \vartheta \cos \psi_{1, b}) + \right. \quad (66) \\
 &\quad \left. + \frac{n_2^2}{n_1^2} (n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2) (a \sin \vartheta \sin \psi_{1, a} + b \cos \vartheta \sin \psi_{1, b}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Éppen így nyerjük a jelen § elején felírt (γ) kifejezésből:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_2} = \\ & = \frac{2n_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{n_2 \cos \varphi_1 + n_1 \cos \varphi_2} = \frac{2n_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{n_2^2 \cos^2 \varphi_1 - n_1^2 \cos^2 \varphi_2} (n_2 \cos \varphi_1 - n_1 \cos \varphi_2) \\ & = \frac{2n_2 n_1^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{(n_2^2 - n_1^2) \{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2\}} \left\{ n_1 \cos \varphi_2 - \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{-1} \cdot \frac{n_2}{n_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \right\}. \end{aligned}$$

E szerint az (52)-nek idetartozó együtthatója az:

$$\begin{aligned} & \left\{ (-\sqrt{-1}) \left(\frac{1}{r_1} F_{1,p} \cdot D_2 \cdot c \sin \varphi_1 e^{v_{1,c} \sqrt{-1}} \right) \right\} = \\ & = \left\{ (-\sqrt{-1}) \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} c e^{v_{1,c} \sqrt{-1}} \right\}. \end{aligned}$$

kifejezés *reális része*; ez következőleg adódik:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{r_2} \cdot \frac{c \cdot n_1^2 \cos \varphi_2 \cdot n_2 \sin \varphi_2}{(n_2^2 - n_1^2) \{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2\}} \cdot \left\{ -\frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \cdot \cos \psi_{1,c} + \right. \\ & \quad \left. + n_2 \cos \varphi_2 \sin \psi_{1,c} \right\}. \quad (67) \end{aligned}$$

Az (52)-ben fellépő $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ a (66) és (67) reális kifejezések összegével így állítható elő:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,p,2} &= \frac{2}{r_2} \frac{n_1^2 \cos \varphi_2}{(n_2^2 - n_1^2) \{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2\}} \cdot \\ & \cdot \left\{ \left[+n_2 \cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} (a \sin \vartheta \cos \psi_{1,a} + b \cos \vartheta \cos \psi_{1,b}) + \right. \right. \\ & \quad \left. - n_2 \frac{n_2^2}{n_1^2} \sin \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \cdot c \cos \psi_{1,c} \right] + \\ & \quad \left. + \left[\frac{n_2^2}{n_1^2} (n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2) (a \sin \vartheta \sin \psi_{1,a} + b \cos \vartheta \sin \psi_{1,b} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + n_2 \sin \varphi_2 n_2 \cos \varphi_2 c \sin \psi_{1,c}) \right] \right\} e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}. \quad (68) \end{aligned}$$

Tekintettel arra, hogy itt is érvényesek az (52_a) és az (52_b) jelzések:

$$\begin{aligned} \psi_{1,a} &= \psi + \delta_{1,a}; \quad \psi_{1,b} = \psi + \delta_{1,b}; \quad \psi_{1,c} = \psi + \delta_{1,c}; \\ \psi &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1 \sin \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right); \quad (69) \end{aligned}$$

nagyon könnyű itt is az $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ vektort a szokásos módon egyszerű harmonikus vektorrá alakítani; ugyanis itt is a $\cos \psi$ és a $\sin \psi$ szerinti rendezést végezzük és rövidítés kedvéért írunk

$$\begin{aligned} C_p &= a \sin \vartheta \cos \delta_{1,a} + b \cos \vartheta \cos \delta_{1,b}; \\ S_p &= a \sin \vartheta \sin \delta_{1,a} + b \cos \vartheta \sin \delta_{1,b}. \end{aligned} \quad (70)$$

Ekkor maga a vektor írható

$$\mathfrak{E}_{1,p,2} = T_{1,p,2} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin(\psi + \delta_{1,p,2}) \quad (71)$$

alakban, hol, miként kissé hosszadalmas számítás után meggyőződhetünk, áll:

$$\begin{aligned} T_{1,p,2} = & \frac{2}{r_2} \frac{n_2 \cos \varphi_2}{(n_2^2 - n_1^2)^{1/2} \cdot \{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2\}^{1/2}} \left\{ n_2^2 \sin^2 \varphi_2 \cdot c^2 + \right. \\ & + (n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2) \{ a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta + 2ab \sin \vartheta \cos \vartheta \cos(\delta_{1,b} - \delta_{1,a}) \} + \\ & + 2n_2 \sin \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \{ ac \sin \vartheta \sin(\delta_{1,c} - \delta_{1,a}) + \\ & \quad \left. + bc \cos \vartheta \sin(\delta_{1,c} - \delta_{1,b}) \} \right\}^{1/2}; \\ & + n_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \left[C_p \cos \varphi_2 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \sin \varphi_2 \cdot c \cdot \cos \delta_{1,c} \right] + \\ & - n_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \left[S_p \cos \varphi_2 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \sin \varphi_2 \cdot c \cdot \sin \delta_{1,c} \right] + \\ \lg \delta_{1,p,2} = & + S_p \frac{n_2^2}{n_1^2} (n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2) + n_2^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cdot c \cdot \sin \delta_{1,c} \\ & + C_p \frac{n_2^2}{n_1^2} (n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2) + n_2^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cdot c \cdot \cos \delta_{1,c} \end{aligned} \quad (72)$$

III. Az ilymódon az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és az $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ számára nyert (62), (63), (64); (70), (71), (72) kifejezések szerint e vektorok valóban egyszerűen harmonikus oly vektorok, a melyek mindegyike lineáris ugyan, de a melyek amplitúdói a z_1 -gyel, azaz a ritkább közegben való távolságával a fénylő pontnak az elválasztó felülettől, igen gyorsan fogynak; legnagyobb értéküket elérik, ha e fénylő pont a válaszfelületen van, azaz $z_1 = 0$ érték mellett.

De mindenesetre e két vektor mindegyike külön-külön merőleges az r_2 -re s így az általánosságban ellipszisszerű eredő-

vektor szintén csak merőleges lehet az r_2 szétszórt sugár irányára.

11. §. *Speciális esetek:* Az a , b , c amplitudójú gerjesztő összetevők közül mindig csak egy-egy legyen a zérustól különböző. Az elválasztó síkkal párhuzamos, vagy reá merőleges, lineáris, gerjesztő vektor.

A czímben foglalt esetek a legegyszerűbbek ugyan, de éppen azért, mert belőlük az előbbi §-ban részletesen kifejtett legáltalánosabb eset összetehető, a legfontosabbak is.

a) Legyen $a = a$; $b = 0$; $c = 0$.

A beesés síkjára merőleges vektor-összetevőre nézve az (59), (62), (63), (64) idetartozó formuláiból rendre lesz:

$$\begin{aligned} C_m &= a \cos \vartheta \cos \delta_{1,a}; \\ S_m &= a \cos \vartheta \sin \delta_{1,a}; \\ \operatorname{tg} \delta_{1,m} &= \operatorname{tg} \delta_{1,a} = \frac{S_m}{C_m}; \end{aligned}$$

ezenkívül legyen az idézett formulában előforduló $A_{1,m,2}$ és a $\delta_{1,m,2}$ phasisok jele itt $A_{1,m,2}^{(a)}$ és $\delta_{1,m,2}^{(a)}$; ekként adódik:

$$\begin{aligned} T_{1,m,2}^{(a)} &= \frac{2a}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \cos \vartheta; \\ \operatorname{tg} A_{1,m,2}^{(a)} &= - \frac{\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{n_2 \cos \varphi_2}; \\ \delta_{1,m,2}^{(a)} &= \delta_{1,a} + A_{1,m,2}^{(a)}. \end{aligned} \quad (73)$$

A beesés síkjában levő összetevőre nézve a (60), (70), (71), (72) idetartozó formuláiból rendre lesz:

$$\begin{aligned} C_p &= a \sin \vartheta \cos \delta_{1,a}; \\ S_p &= a \sin \vartheta \sin \delta_{1,a}; \\ \operatorname{tg} \delta_{1,p} &= \operatorname{tg} \delta_{1,a} = \frac{S_p}{C_p}; \end{aligned}$$

ezenkívül jelöljük az idézett formulában előforduló $A_{1,p,2}$ és a $\delta_{1,p,2}$ phasisokat $A_{1,p,2}^{(a)}$ -vel és $\delta_{1,p,2}^{(a)}$ -vel; a (72)-ből

$$\begin{aligned}
 T_{1,p,2}^{(a)} &= \frac{2a}{r_2} \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \cdot \frac{\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{\sqrt{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \sin \vartheta; \\
 \operatorname{tg} \mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)} &= \frac{+n_1^2 \cos \varphi_2}{+n_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}; \\
 \delta_{1,p,2}^{(a)} &= \delta_{1,a} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)}.
 \end{aligned} \tag{74}$$

A két fényvektor e szerint *a)* esetünkben írható:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{1,m,2}^{(a)} &= T_{1,m,2}^{(a)} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin(\psi + \delta_{1,a} + \mathcal{A}_{1,m,2}^{(a)}); \\
 \mathcal{E}_{1,p,2}^{(a)} &= T_{1,p,2}^{(a)} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin(\psi + \delta_{1,a} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)}).
 \end{aligned} \tag{75}$$

Az eredő vektor itt is ellipszisszerű, daczára annak, hogy a jelen esetben a gerjesztő vektor a (6) ábra és a (26) formula szerint az X_1 tengelymenti, az elválasztó síkkal párhuzamos,

$$a \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \delta_{1,a} \right]$$

szerkezetű, egyszerűen harmonikus, lineáris fényvektor.

b) Legyen $a=0$; $b=b$; $c=0$.

A beesés síkjára merőleges vektor-összetevőre nézve az (59), (62), (63), (64) idetartozó formuláiból rendre lesz:

$$\begin{aligned}
 C_m &= -b \sin \vartheta \cos \delta_{1,b}; \\
 S_m &= -b \sin \vartheta \sin \delta_{1,b}; \\
 \operatorname{tg} \delta_{1,m} &= \operatorname{tg} \delta_{1,b} = \frac{S_m}{C_m};
 \end{aligned}$$

ezenkívül itt is az idetartozó $\mathcal{A}_{1,m,2}$ és $\delta_{1,m,2}$ phasisokhoz a ^(b) megkülönböztető jelet iktatva, nyerjük

$$\begin{aligned}
 T_{1,m,2}^{(b)} &= \frac{2b}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \cdot \sin \vartheta; \\
 \operatorname{tg} \mathcal{A}_{1,m,2}^{(b)} &= \frac{-\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{+n_2 \cos \varphi_2}; \\
 \delta_{1,m,2}^{(b)} &= \delta_{1,b} + \mathcal{A}_{1,m,2}^{(b)}.
 \end{aligned} \tag{76}$$

A beesés síkjában lévő vektor-összetevőre nézve a (60), (70), (71), (72) idetartozó formuláiból rendre lesz:

$$\begin{aligned}C_p &= b \cos \vartheta \cos \delta_{1, b}; \\S_p &= b \cos \vartheta \sin \delta_{1, b}; \\ \operatorname{tg} \delta_{1, p} &= \operatorname{tg} \delta_{1, b} = \frac{S_p}{C_p};\end{aligned}$$

ezenkívül itt is az idetartozó $A_{1, p, 2}$ és $\delta_{1, p, 2}$ phasisokhoz a ^(b) megkülönböztető jelet iktatva, nyerjük

$$\begin{aligned}T_{1, p, 2}^{(b)} &= \frac{2b}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \cdot \frac{\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{\sqrt{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cos \vartheta; \\ \operatorname{tg} A_{1, p, 2}^{(b)} &= \frac{+n_1^2 \cos \varphi_2}{+n_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}; \\ \delta_{1, p, 2}^{(b)} &= \delta_{1, p} + A_{1, p, 2}^{(b)}.\end{aligned}\quad (77)$$

A két fényvektor e szerint itt írható:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{1, m, 2}^{(b)} &= T_{1, m, 2}^{(b)} \cdot e^{-\frac{2\pi x_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin(\phi + \delta_{1, b} + A_{1, m, 2}^{(b)}), \\ \mathfrak{E}_{1, p, 2}^{(b)} &= T_{1, p, 2}^{(b)} \cdot e^{-\frac{2\pi x_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin(\phi + \delta_{1, b} + A_{1, p, 2}^{(b)}).\end{aligned}\quad (78)$$

Itt is az eredő vektor ellipszisszerű, daczára annak, hogy a jelen esetben a gerjesztő vektor a (26) formula és a 6. ábra szerint az Y_1 tengelymenti, az elválasztó síkkal párhuzamos,

$$b \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \delta_{1, b} \right]$$

szerkezetű, egyszerűen harmonikus, lineáris vektor.

Ebből az eredményből egyszersmind adódik:

$$\begin{aligned}A_{1, m, 2}^{(a)} &= A_{1, m, 2}^{(b)}; \\ A_{1, p, 2}^{(a)} &= A_{1, p, 2}^{(b)}.\end{aligned}\quad (78a)$$

c) Legyen $a=0$, $b=0$, $c=c$.

Ebben az esetben a beesés síkjára merőleges vektor-összetevő nem keletkezhetik; csak a *beesés síkjában lévő összetevő létesülhet*, melyre nézve a (60), a (70), (71), (72) egyenletekből rendre adódik:

$$\operatorname{tg} \delta_{1, p} = \operatorname{tg} \delta_{1, c};$$

továbbá a $A_{1, p, 2}$; $\delta_{1, p, 2}$ phasisokat most a ^(c) jelzővel ellátva

$$\begin{aligned}
 T_{1,p,2}^{(c)} &= \frac{2c}{r_2} \frac{n_2^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2} \sqrt{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}; \\
 \operatorname{tg} \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} &= \frac{-n_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{+n_1^2 \cos \varphi_2}; \\
 \delta_{1,p,2}^{(c)} &= \delta_{1,c} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)}.
 \end{aligned} \tag{79}$$

Ebben az esetben az eredő vektornak egyetlen alkotója:

$$\mathcal{E}_{1,p,2}^{(c)} = T_{1,p,2}^{(c)} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin(\psi + \delta_{1,c} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)}); \tag{80}$$

a mely lineáris vektor a (26) formula és a 6. ábra szerint előállott a Z_1 tengelymenti, az elválasztó felületre merőleges,

$$c \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \delta_{1,c} \right]$$

szerkezetű, szintén lineáris, egyszerűen harmonikus gerjesztő vektorból.

Egyben a (74), (77) és (79)-ből látni, hogy

$$\operatorname{tg} \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} = -\cotg \mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)} = -\cotg \mathcal{A}_{1,p,2}^{(b)}. \tag{80_a}$$

Jegyzet a teljes visszaverődés határszögén túl terjedő törrött sugarak vektorainak fázisváltozásáról.

A (73); (74); (76), (77); (79) formulák egymással való összehasonlítása már fent a (78_a) és (80_a) vonatkozásokhoz vezetett; az előbbiből következik:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{1,m,2}^{(b)} &= \mathcal{A}_{1,m,2}^{(a)} \pm \nu \cdot \pi; \\
 \mathcal{A}_{1,p,2}^{(b)} &= \mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)} \pm \mu \cdot \pi;
 \end{aligned} \tag{81_a}$$

hol μ és ν egész számok; az utóbbiból minthogy $\mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)}$, vagy $\mathcal{A}_{1,p,2}^{(b)}$ az első quadransban van, lévén sinusa és cosinusa pozitív, s minthogy $\mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)}$ a negyedik quadransban van, lévén sinusa negatív, cosinusa pozitív, áll:

$$\mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} - \mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)} = \frac{3}{2} \pi. \tag{81_b}$$

Továbbá a (73)-ból és (74)-ből

$$\operatorname{tg} (\mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)} - \mathcal{A}_{1,m,2}^{(a)}) = + \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + n_1^2} \cdot \frac{n_2 \sin^2 \varphi_2}{\cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}. \tag{81_c}$$

Vége a (81_a) és (81_b) egyenletek még írhatók

$$\Delta_{1,p,2}^{(c)} - \Delta_{1,p,2}^{(a)} = \Delta_{1,p,2}^{(c)} - \Delta_{1,m,2}^{(a)} - \Delta_{1,p,2}^{(a)} + \Delta_{1,m,2}^{(a)} = \frac{3}{2} \pi;$$

azaz nyerjük:

$$\Delta_{1,p,2}^{(c)} - \Delta_{1,m,2}^{(a)} = \Delta_{1,p,2}^{(a)} - \Delta_{1,m,2}^{(a)} + \frac{3}{2} \pi. \quad (S2)$$

12. §. További specziális esetek: Az elválasztó síkkal párhuzamos, ellipszises gerjesztő vektor. Részletezés:

Legyen $a = a$; $b = b$; $c = 0$.

Ekkor a beesés síkjára merőleges összetevőre nézve ugyanazok a kifejezések maradnak meg, mint a 10. §-ban nyert általános esetben, a melyek ugyanis a (62), (63), (64) egyenletekben foglalvák, csakhogy most az egyes mennyiségekhez azokat a jelzőket, a melyek az eredetileg gerjesztő vektor-összetevőket jelzik s ezekre nézve jellemzők, a jelenleg meghatározandó gerjesztett vektorok jellemzőihez iktatjuk.

Ekként nyerjük a (64)-ből

$$T_{1,m,2}^{(a,b)} = \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \{ a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta - 2ab \sin \vartheta \cos \vartheta \cos (\delta_{1,b} - \delta_{1,a}) \}^{1/2};$$

$$\operatorname{tg} \delta_{1,m,2}^{(a,b)} = \frac{-C_m \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} + S_m n_2 \cos \varphi_2}{+C_m n_2 \cos \varphi_2 + S_m \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} = \operatorname{tg} (\delta_{1,m}^{(a,b)} + \Delta_{1,m,2}^{(a,b)}); \quad (83)$$

$$\operatorname{tg} \delta_{1,m}^{(a,b)} = \frac{S_m}{C_m} = \frac{a \cos \vartheta \sin \delta_{1,a} - b \sin \vartheta \sin \delta_{1,b}}{a \cos \vartheta \cos \delta_{1,a} - b \sin \vartheta \cos \delta_{1,b}};$$

$$\operatorname{tg} \Delta_{1,m,2}^{(a,b)} = \frac{-\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{+n_2 \cos \varphi_2} = \operatorname{tg} \Delta_{1,m,2}^{(a)} = \operatorname{tg} \Delta_{1,m,2}^{(b)}.$$

Éppen így a beesés síkjában lévő összetevőre nézve a (72) és (60) egyenletekből, ugyanolyan jelzőket alkalmazva, mint a merőleges összetevő jellemzőinél:

$$T_{1,p,2}^{(a,b)} = \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \cdot \frac{\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{\sqrt{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \{ a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta + 2ab \sin \vartheta \cos \vartheta \cos (\delta_{1,b} - \delta_{1,a}) \}^{1/2};$$

$$\operatorname{tg} \delta_{1,p,2}^{(a,b)} = \frac{+C_p n_1^2 \cos \varphi_2 + S_p n_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{+C_p n_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} - S_p n_1^2 \cos \varphi_2} = \operatorname{tg} (\delta_{1,p}^{(a,b)} + \Delta_{1,p,2}^{(a,b)}); \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta_{1,p}^{(a,b)} &= \frac{S_p}{C_p} = \frac{a \sin \vartheta \sin \vartheta_{1,a} + b \cos \vartheta \sin \vartheta_{1,b}}{a \sin \vartheta \cos \vartheta_{1,a} + b \cos \vartheta \cos \vartheta_{1,b}}; \\ \operatorname{tg} \Delta_{1,p,2}^{(a,b)} &= \frac{+n_1^2 \cos \varphi_2}{+n_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} = \operatorname{tg} \Delta_{1,p,2}^{(a)} = \operatorname{tg} \Delta_{1,p,2}^{(b)}. \end{aligned}$$

Ezek szerint a két fényvektor-összetevő kifejezése, a (75) és a (78) mintája szerint írható:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,m,2}^{(a,b)} &= T_{1,m,2}^{(a,b)} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin(\psi + \vartheta_{1,m}^{(a,b)} + \Delta_{1,m,2}^{(a,b)}); \\ \mathfrak{E}_{1,p,2}^{(a,b)} &= T_{1,p,2}^{(a,b)} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin(\psi + \vartheta_{1,p}^{(a,b)} + \Delta_{1,p,2}^{(a,b)}); \end{aligned} \quad (85)$$

hol ismét, mint már (52_a); (52_b) és (62_a) szerint,

$$\psi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s_1 \sin \varphi_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right). \quad (86)$$

A (85)-ben előállított két vektor-összetevő keletkezett az eredetileg S_1 -ben (6. ábra) gerjesztő amaz ellipszisszerű vektorból, a mely az elválasztósíkkal párhuzamos, a melynek az idézett ábra szerinti X_1 és Y_1 tengelyek menti összetevői a (26) formula és a 6. ábra értelmében

$$a \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \vartheta_{1,a} \right]; \quad b \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \vartheta_{1,b} \right]$$

szerkezetűek.

Maga az S_2 helyen az $\mathfrak{E}_{1,m,2}^{(a,b)}$ - és $\mathfrak{E}_{1,p,2}^{(a,b)}$ -ből adódó eredő vektor ismét merőleges r_2 -re és ellipszisszerű. —

Kivételes esetek:

A) Ha $\vartheta_{1,a} = \vartheta_1 = \vartheta_{1,b}$, akkor a gerjesztő vektor lineáris lesz; egyenese még mindig párhuzamos az elválasztó-síkkal, de az X_1 tengellyel

$$\varepsilon = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b}{a} \right)$$

szöget képez; írva

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= g^2, \\ a &= g \cos \varepsilon; \quad b = g \sin \varepsilon; \end{aligned} \quad (87)$$

lesz:

$$a \cos \vartheta - b \sin \vartheta = g \cos(\vartheta + \varepsilon); \quad a \sin \vartheta + b \cos \vartheta = g \sin(\vartheta + \varepsilon).$$

E szerint ez az eset teljesen egyenlő természetű a megelőző § *a)* és *b)* pontjaiban taglalt esetekkel.

B) Ha $\delta_{1,b} - \delta_{1,a} = \frac{\pi}{2}$, akkor a gerjesztő vektor még mindig párhuzamos az elválasztó sikkal és ellipsziszerű, de fő-tengelyei az X_1 és Y_1 tengelyekkel esnek egybe.

Ha még ezenkívül $a=b$, akkor e gerjesztő vektor *jobbra körben poláros*; ekkor (83)-ból és (84)-ből nyerjük

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_{1,m}^{(a,a)} &= \operatorname{tg} (\delta_{1,a} - \vartheta) = -\operatorname{cotg} \delta_{1,p}^{(a,a)}; \\ \delta_{1,p}^{(a,a)} &= \delta_{1,m}^{(a,a)} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (88)$$

Ha pedig $\delta_{1,b} - \delta_{1,a} = \frac{3\pi}{2}$ és még mindig $a=b$, akkor a gerjesztő vektor *balra, ellentétesen körben poláros*; de ekkor

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_{1,m}^{(a,a)} &= \operatorname{tg} (\delta_{1,a} + \vartheta) = -\operatorname{cotg} \delta_{1,p}^{(a,a)}; \\ \delta_{1,p}^{(a,a)} &= \delta_{1,m}^{(a,a)} + \frac{3\pi}{2}. \end{aligned} \quad (89)$$

Ezek szerint ebben a *B)* alatt tárgyalt két esetben a merőleges és a párhuzamos vektor-összetevő phasiskülönbségei (78_a), (83), (84) szerint

$$\{\delta_{1,p}^{(a,a)} + A_{1,p,2}^{(a,a)}\} - \{\delta_{1,m}^{(a,a)} + A_{1,m,2}^{(a,a)}\} = A_{1,p,2}^{(a)} - A_{1,m,2}^{(a)} + \left\{ \frac{\pi}{2}; 90 \right\}$$

hol az első esetben $\frac{\pi}{2}$, a másodikban $\frac{3\pi}{2}$ az utolsó tag.

13. §. További specziális esetek. Az elválasztó síkra merőleges, ellipszises gerjesztő vektor.

Legyen $a=0$; $b=b$; $c=c$.

Ekkor a *beesés síkjára merőleges vektor-összetevőre* nézve az 10. §. I. pontja, különösen pedig (62), (63), (64) kifejezései szerint a c amplitudójú gerjesztő vektorösszetevő semmiféle befolyással nincsen; úgy, hogy e kifejezésekbe a $a=0$ -t téve, ugyanazokat a mennyiségeket nyerjük, mint a 11. §. *b)* pontjában ez összetevő számára.

Az idetartozó jelzésekkel lesz:

$$\begin{aligned}
 T_{1,m,2}^{(b,c)} &= \frac{2b}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \cdot \sin \vartheta = T_{1,m,2}^{(b)}; \\
 \operatorname{tg} \mathcal{A}_{1,m,2}^{(b,c)} &= \frac{-\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{+ n_2 \cos \varphi_2} = \operatorname{tg} \mathcal{A}_{1,m,2}^{(b)}; \\
 \delta_{1,m,2}^{(b,c)} &= \delta_{1,b} + \mathcal{A}_{1,m,2}^{(b,c)} = \delta_{1,m,2}^{(b)}.
 \end{aligned} \tag{91}$$

Másrészt a beesés síkjában lévő vektor-összetevőre nézve ugyane 11. §. II. pontja kifejezéseibe, különösen (72) egyenleteibe $a=0$ teendő; némi számítás után adódik:

$$\begin{aligned}
 T_{1,p,2}^{(b,c)} &= \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2} \sqrt{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \\
 &\quad \cdot \{ b^2 \cos^2 \vartheta (n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2) + c^2 n_2^2 \sin^2 \varphi_2 + \\
 &\quad + 2bc \cos \vartheta n_2 \sin \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \cdot \sin (\delta_{1,c} - \delta_{1,b})^{1/4} \}; \\
 \operatorname{tg} \delta_{1,p,2}^{(b,c)} &= \frac{+ b \cos \vartheta \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \cdot \cos (\delta_{1,b} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)}) + \\
 &\quad + c n_2 \sin \varphi_2 \sin (\delta_{1,c} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)})}{- b \cos \vartheta \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} \cdot \sin (\delta_{1,b} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)}) + \\
 &\quad + c n_2 \sin \varphi_2 \cos (\delta_{1,c} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)})};
 \end{aligned} \tag{92}$$

hol a második formulában a (79) rendszer szerint és folytatólag:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} &= \frac{-n_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{n_1^2 \cos \varphi_2}; \\
 \cos \left\{ \delta_{1,b} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} \right\} &= \cos \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} \left[\cos \left(\delta_{1,b} \right) - \operatorname{tg} \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} \cdot \sin \left(\delta_{1,c} \right) \right]; \\
 \sin \left\{ \delta_{1,b} + \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} \right\} &= \cos \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} \left[\sin \left(\delta_{1,b} \right) + \operatorname{tg} \mathcal{A}_{1,p,2}^{(c)} \cdot \cos \left(\delta_{1,c} \right) \right];
 \end{aligned} \tag{92a}$$

miáltal a (92) második formulájának a (72) rendszer második egyenletéből és a (70)-ből való előállításuk könnyen követhető és igazolható.

Ezek szerint a jelen esetben előálló két eredő összetevő írható:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_{1,m,2}^{(b,c)} &= T_{1,m,2}^{(b,c)} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin (\psi + \delta_{1,b} + \mathcal{A}_{1,m,2}^{(b,c)}); \\
 \mathfrak{E}_{1,p,2}^{(b,c)} &= T_{1,p,2}^{(b,c)} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin (\psi + \delta_{1,p,2}^{(b,c)}).
 \end{aligned} \tag{93}$$

Itt a gerjesztő váltakozás oly ellipszisszerű vektor, melynek

a 6. ábra és a (26) formula szerint az Y_1 és a Z_1 tengelymenti összetevője

$$b \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \delta_{1,b} \right]; \quad c \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \delta_{1,c} \right]$$

szerkezetű; az utóbbi az elválasztó síkra merőlegesen, az előbbi vele párhuzamosan váltakozik.

Kivételes esetek:

A) Legyen itt: $\delta_{1,b} = \delta_{1,c}$; akkor az eredeti gerjesztő vektor *lineáris*; *hajlásszöge* az elválasztó sík normálisához képest:

$$\arctg \left(\frac{b}{c} \right).$$

Ekkor a (91) és (92) kifejezések átmennek a következőkbe:

$$T_{1,m,2}^{(b,c)} = \frac{2b}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \sin \vartheta = T_{1,m,2}^{(b)}; \quad (94)$$

$$\delta_{1,m,2}^{(b,c)} = \delta_{1,b} + \Delta_{1,m,2}^{(b,c)} = \delta_{1,b} + \Delta_{1,m,2}^{(b)}.$$

$$T_{1,p,2}^{(b,c)} = \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \cdot \frac{\{b^2 \cos^2 \vartheta (n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2) + c^2 n_2^2 \sin^2 \varphi_2\}^{1/2}}{\sqrt{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}; \quad (95)$$

$$\operatorname{tg} \delta_{1,p,2}^{(b,c)} = \operatorname{tg} (\delta_{1,b} + \Delta_{1,p,2}^{(c)} + \nu); \quad \operatorname{tg} \nu = \frac{b \cos \vartheta}{c} \cdot \frac{\sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}{n_2 \sin \varphi_2}.$$

E szerint ennek a két összetevőnek phasiskülönbsége

$$\delta_{1,p,2}^{(b,c)} - \delta_{1,m,2}^{(b,c)} = \Delta_{1,p,2}^{(c)} - \nu - \Delta_{1,m,2}^{(b)} = \Delta_{1,p,2}^{(c)} - \Delta_{1,m,2}^{(b)} - \nu,$$

azaz, a (78_a), (80_a)–(82) vonatkozások tekintetbe vételével a phasiskülönbség

$$= \Delta_{1,p,2}^{(a)} - \Delta_{1,m,2}^{(a)} - \nu + \frac{3}{2} \pi, \quad (96)$$

hol a (81_c) szerint

$$\operatorname{tg} (\Delta_{1,p,2}^{(a)} - \Delta_{1,m,2}^{(a)}) = + \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + n_1^2} \cdot \frac{n_2 \sin^2 \varphi_2}{\cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}.$$

B) Legyen itt:

$$\delta_{1,b} = \delta_{1,c} - \frac{\pi}{2};$$

azaz :

$$\delta_{1,c} - \delta_{1,b} = \frac{\pi}{2};$$

ekkor az eredeti, gerjesztő vektornak a 6. ábra és a (26) formula szerint Y_1 és Z_1 tengelymenti összetevője :

$$b \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \delta_{1,b} \right]; \quad c \cos \left[2\pi \frac{t}{T} + \delta_{1,b} \right];$$

azaz, e gerjesztő vektor oly ellipszisszerű váltakozás, a melynek az elválasztó sikkal párhuzamos és reá merőleges irányban vannak b és c főtengelyei; maga a gerjesztő ellipszis síkja merőleges az elválasztó síkra.

Ekkor a beesés síkjára merőleges összetevő mindenképen változatlan marad és lesz, mint a (94)-ben :

$$\begin{aligned} T_{1,m,2}^{(b,c)} &= \frac{2b}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \sin \vartheta = T_{1,m,2}^{(b)}; \\ \delta_{1,m,2}^{(b,c)} &= \delta_{1,b} + A_{1,m,2}^{(b,c)} = \delta_{1,b} + A_{1,m,2}^{(b)}. \end{aligned} \quad (97)$$

Ellenben a (92) rendszer itt egyszerűsödik; egyszerű számítások a következő eredményt szolgáltatják :

$$\begin{aligned} T_{1,p,2}^{(b,c)} &= \frac{2}{r_2} \cdot \frac{n_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \cdot \frac{\{ +b \cos \vartheta \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2} + cn_2 \sin \varphi_2 \}}{\sqrt{(n_2^2 + n_1^2) \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}; \\ \text{tg } \delta_{1,p,2}^{(b,c)} &= -\cotg (\delta_{1,b} + A_{1,p,2}^{(c)}); \quad \delta_{1,p,2}^{(b,c)} = \delta_{1,b} + A_{1,p,2}^{(c)} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (98)$$

Ezek szerint ebben az esetben az eredő két vektor-összetevő :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,m,2}^{(b,c)} &= T_{1,m,2}^{(b,c)} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot \sin (\psi + \delta_{1,b} + A_{1,m,2}^{(b)}); \\ \mathfrak{E}_{1,p,2}^{(b,c)} &= T_{1,p,2}^{(b,c)} \cdot e^{-\frac{2\pi z_1}{n_1 \lambda_1} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}} \cdot (\sin \psi + \delta_{1,b} + A_{1,p,2}^{(c)} + \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \quad (99)$$

A két összetevő phasiskülönbsége itt :

$$\delta_{1,p,2}^{(b,c)} - \delta_{1,m,2}^{(b,c)} = A_{1,p,2}^{(c)} - A_{1,m,2}^{(b)} + \frac{\pi}{2},$$

avagy a (78_a), a (81_b), (81_c) és (82) tekintetbe vételével

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,p,2}^{(e)} - \mathcal{A}_{1,m,2}^{(b)} + \frac{\pi}{2} &= \mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)} - \mathcal{A}_{1,m,2}^{(a)} \pm 2\pi; \\ \operatorname{tg}(\mathcal{A}_{1,p,2}^{(a)} - \mathcal{A}_{1,m,2}^{(a)}) &= + \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + n_1^2} \cdot \frac{n_2 \sin^2 \varphi_2}{\cos \varphi_2 \sqrt{n_2^2 \sin^2 \varphi_2 - n_1^2}}. \end{aligned} \quad (100)$$

A megelőző §-okban részletezett speciális esetek mind olyanok, a melyek aránylag igen könnyen megvalósíthatók, melyeknek néhány fajára nézve az első §. elején idézett dolgozatok már nagyszámú megfigyeléseket tartalmaznak s melyeknek ott feldolgozott s az elmélettel összehasonlított eredményei aránylag igen jól egyeznek ez elmélettel.

Nagyszámú oly megfigyelés, mely a speciális esetek többi csoportjára nézve az utolsó két év alatt történt, jelenleg feldolgozás alatt van; a mint eredményei az elméleti várakozásokkal összehasonlítottak: szerencsém leend ezeket a Tekintetes Akadémia elé terjeszteni.

AZ ARANY ELŐFORDULÁSI VISZONYAIRÓL AZ ERDÉLYRÉSZI ÉRCZHEGYSÉGBEN ÉS NAGYBÁNYA KÖRNYÉKÉN.

PÁLFY MÓRICZ I. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Az 1903—1908. évben az erdélyrészi Érczhegység geológiai felvételével kapcsolatban végeztem az ottani aranybányák felvételét is. A bányavidékeken tett megfigyeléseim eredményét 1911-ben közöltem a m. kir. földtani intézet XVIII. évkönyvében.¹ Munkám folytatása gyanánt 1913-ban a nagybányakörnyéki aranybányaterület tanulmányozását kezdettem meg. Vizsgálataimmal mindkét területen azt a főcélzt tűztem magam elé, hogy az aranyat tartalmazó teléreknek s azokban az arany eloszlásának viszonyát a vulkánológiai viszonyokkal igyekezzem kapcsolatba hozni, minthogy — mint már régóta ismeretes — az arany előfordulása szorosan hozzá van kötve a harmadkori eruptiós kőzetek zöldkőves módosulatához. Hazánknak e két legnagyobb aranybánya-területén szerzett megfigyeléseim eredményét lesz szerencsém az alábbiakban összefoglalni.

Az e területeken levő aranyelőfordulások kivétel nélkül mind az úgynevezett fiatalabb arany-ezüstércztelepekhez tartoznak és — mint azt már régen felismerék — mind a harmadkori eruptiós kőzetek elváltozott fajtáihoz vannak kötve. Ilyen kőzetekként a bányaterületeken a pyroxénés, amphibolos andesitek, a dacitok és a rhyolithok szerepelnek. Az elváltozás pedig, a mit szenvedtek, részint zöldkővesedésben, részint kaolinosodásban nyilvánul meg.

¹ Az erdélyrészi Érczhegység bányáinak földtani viszonyai és ércztelérei.

Zöldkövesedés és kaolinosodás.

A kőzeteknek ez az elváltozása a geológusok és petrographusok körében már régóta igen nagy érdeklődés tárgya volt és még a legutóbbi időkben is élénk eszmecserékre adott okot. A zöldkövesedés különösen annyira átalakítja a kőzeteket, hogy br. RICHTHOFEN¹ önálló kőzeteknek tekintette azokat és propylit néven írta le. SZABÓ JÓZSEF² volt az első, a ki kimutatta, hogy a propylit nem önálló kőzetfaj és hogy a zöldkövek nem egyebek, mint a normális kőzeteknek a kénes és vízpárás exhalatiók által okozott elváltozásai. SZABÓ magyarázatát azután lassanként általánosan elfogadták s az újabb időben a legtöbb vizsgáló (ROSENBUSCH,³ WEINSCHENK,⁴ BÖCKH HUGÓ,⁵ stb.) mind a telérhasadékokon felszálló exhalatióknak tulajdonítják és a zöldkövesedés legvégső stádiumának a kaolinosodást tartják. INKEY⁶ és

¹ RICHTHOFEN F., FR. v.: Studien aus den ungarisch-siebenbürgischen Erzgebirgen. (Jahrb. d. k. k. Geol. Reichsanst. 1861, Bd. XI. p. 228.)

— Die natürliche Gliederung und der innere Zusammenhang der vulkanischen Gesteine. (Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellschaft. 1868, Bd. 20. p. 685.)

² SZABÓ JÓZSEF: Trachitok, beosztva a természetes rendszer szerint. p. 4. (Bemutatva az 1873. évi bécsi világkiállításon.)

— Petrográfiai és geológiai tanulmányok Selmecz környékéről. (Földtani Közlöny 1878, VIII. k. 1—6. füzet.)

— Selmecz környékének geológiai leírása, 1891. (A magy. tud. Akadémia III. osztályának különkiadása.)

³ ROSENBUSCH, H.: Mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine 1877, p. 299, 300; 4-te Auflage 1908, II. 2. p. 1102.

⁴ WEINSCHENK, E.: Grundzüge der Gesteinskunde, 1905 és 1906.

⁵ BÖCKH HUGÓ: Előzetes jelentés a Selmeczbánya vidékén előforduló eruptív kőzetek korviszonyairól. (Földtani Közlöny 1901, XXXI. k. p. 289.)

⁶ INKEY BÉLA: Nagyág földtani viszonyai. (A kir. magy. term. tud. társulat kiadása 1885.)

— De la relation entre l'état propylitique des roches andésitiques et leurs filons minéraux. (C. R. Congr. Intern. Géol. Mexico 1906.)

— Megjegyzések Dr. Pálffy Mór: Az erdélyrészi Érczhegység bányáinak földtani viszonyai és ércztelérei című munkájához. (Földtani Közlöny XLII. 1912, p. 737.)

LAZAREVIĆ¹ a zöldkövesedést szintén postvulkános hatásnak tulajdonítják, de a zöldkövesedési folyamattól különválasztják a kaolinosodást és a telérhasadékok mentén csakis kaolinosodást tételeznek fel.

A szakemberek között azonban még az újabb időkben is akadtak olyanok, a kik a zöldkövesedés lefolyását a felszínen történő postvulkános hatásokkal nem tudták elfogadhatólag megmagyarázni. Így például a kiváló petrographus ZIRKEL még 1894-ben megjelent tankönyvében is védi a RICHTHOFEN értelmében vett propylitnek mint önálló kőzetfajnak létjogosultságát. SCHUMACHER² pedig a brádkörnyéki aranybányászatról 1912-ben megjelent munkájában a zöldkövesedést dynamometamorph hatásokra igyekszik visszavezetni. SCHUMACHER felfogásával különösen LAZAREVIĆ foglalkozott részletesen és kimutatta, hogy a zöldkövesedésnek dynamometamorph úton való magyarázatát semmiféle megfigyelés sem támogatja. BERGEAT³ pedig inkább a félig megszilárdult magmának vulkáni gázokkal való átjárására (Durchgasung) gondol. Körülbelül ehhez a nézethez csatlakoztam magam is, a mikor az erdélyrészi Érczhegységről szóló munkámban minden közelebbi indokolás nélkül azt irtam: «A zöldkövesedés lefolyását... nem kizárólag a felületen végbementnek tartom, hanem valószínűbbnek vélem azt, hogy a zöldkövesedés folyamata — legalább részben — már a kráterben vagy még mélyebben bekövetkezett (p. 243)». Ekkor tehát a mélyben végbement pneumatolytikus folyamatokra gondoltam. Ezt a felfogásomat az újabban végzett vizsgálataim csak megerősítették. Erre vonatkozó vizsgálataimból e helyütt éppen csak azt említem fel, hogy Nagybányán a Kereszthegyi bánya altárnájában a zöldköves és bontott andesites dacit lávájában teljesen normális állapotban megmaradt fekete pyroxénandesitzárványt találtam, a mi normális

¹ LAZAREVIĆ, M.: Die Propylitisierung, Kaolinisierung und Verrieselung. (Zeitschr. f. prakt. Geologie. XXI. Jahrg. 1913, p. 345.)

² SCHUMACHER, F.: Die Golderzlagertstätten und Braunkohlenvorkommen der Rudaer Zwölf-Apostel-Gewerkschaft zu Brád. (Zeitschr. f. prakt. Geologie. Jg. 1912, p. 1—86.)

³ STELZNER-BERGEAT: Die Erzlagertstätten, II. 2. p. 1237, 1906.

állapotban aligha maradhatott volna meg, ha a bezáró kőzet zöldkővesedése a felszínen a kifolyt láva megszilárdulása után történt volna.

Felfogásom szerint a kőzetek átalakítása a felszín alatt nem nagy mélységben a vulkáni szünet alatt, vagy egy peripherikus magmamedenczében, vagy egy batholith felnyuló csücskében a magmától absorbeált nagy mennyiségű vizgőztől és kénes gázoktól hydato-pneumatolitikus úton ment végbe akkor, a mikor egyes alkatrészek, nevezetesen a pyroxéncsoport ásványai, már ki voltak válva, míg a földpátok még oldatban voltak. Ez lehet az oka annak, hogy a zöldkőves kőzetekben még a teljesen átalakított pyroxének mellett is aránylag üde földpátokat találunk.

A kaolinosodás lefolyását szétválasztom a zöldkővesedés processusától, éppen úgy, mint INKEY, LAZAREVIĆ és SCHUMACHER is tette. és azt a felszínen végbementnek tartom a hydrotermalis hatások következtében.

A zöldkőves kőzetek petrographiai kifejlődése.

A zöldkőves kőzetek petrographiai kifejlődése — mint említettem — nagyon eltér a normális állapotban megmaradt kőzetekétől. Mindenekelőtt makroszkoposan feltűnik, hogy a zöldkőves kőzetek üde állapotban sokkal tömörebbek és szívósabbak, mint a normálisak. Sötétzöld, majdnem fekete alapanyagukból apró fénylő földpátlapocskák, fekete augitok és hypersthenek látszanak az andesitekben kiválva. Az amphibol a pyroxénandesitekben is ritkán hiányzó elegyrész és a többi pyroxénnel szemben mindig nagyobb kristályban van kiválva. A zöldkőves pyroxénandesitek szomszédságában levő normális kőzetekben azonban az amphibol sokkal ritkábban fordul elő, mint a zöldkővesben. Hasonlót lehet mondani a pyroxénandesitek kvarczáról is, a mely a zöldkővesekben alig hiányzó elegyrész, míg a normálisokban ritkaságszámba megy. Az erdőlyrészi Érczhegység zöldkőves andesitjeiben igen gyakori a biotit is, míg a normálisokban ez az elegyrész is hiányzik.

Mikroszkop alatt a zöldkőves kőzetek alapanyaga allotriomorph szemcsésnek látszik, ellentétben a normális kőzetek hyalopilites

szövetével. A kivált elegyrészek közül a földpátokon kívül az augitok és biotitok vannak legüdébben megtartva, azután azokban a kőzetekben, melyekben az amphibol nincsen nagyon absorbeálva, az amphibolok következnek és az elbontásnak legkevésbé állott ellen a hypersthen. A nagyon bontott kőzetekben a kristályok körvonalai rendszerint elmosódnak s ebben az esetben csak azt tudjuk megállapítani, hogy a kőzetben pyroxének és amphibolok voltak; az utóbbiak helyét rendszeren magnetit felhalmozódása jelöli. A pyroxénes andesitek a pyroxének közül rendszerint hypersthenet tartalmaznak túlsúlyban, míg az augit, főleg az erdélyrészi Érczhegységben, alárendelt. A zöldkövesedés az amphibolokon, úgy látszik, mindenkor chlorit képződésében nyilvánul meg; hasonlóan chlorittá alakul át az augit is, míg a hypersthen némely esetben bastittá is átalakul, de a leggyakrabban azon is chloritosodást észlelünk. A bastitosodás mindig a kristályok repedésein és a hasadások mentén indul meg és hálózatosan átjárja az egész kristályt (Maschenstruktur). Azok a hypersthenek, melyek chloritosodnak, úgy látszik már a chloritosodás előtt is zöldszínűek voltak. Az ilyenek pleochroismusa az intensív zöld és a sárgás-zöld között változik, ellentétben az üde hypersthennek inkább barnásba hajló pleochroismusával. A zöld hypersthenekben a chloritosodás megindulását inkább csak a hasadékok mentén fellépőnek figyeltem meg, míg a hálózatos átalakulás — ha egyáltalán ilyen is előfordul — nem tűnik annyira szembe. A chloritosodás a legtöbb kristályon kiterjed az egész kristályra s ilyenkor egy chloritból álló pseudomorphosa áll előttünk. Az ilyen pseudomorphosa közönséges fényben egészen egyszínű világos-zöldnek látszik. Pleochroismusa mindig feltűnő s polározott fényben gyengén kettősen törő chloritpamatokká bomlik fel. Hogy a hypersthennek ez a kétféle átalakulása: a bastitosodás és a chloritosodás minő körülményekhez van kötve, arra ezideig semmiféle szabályt sem tudtam találni.

Legfeltűnőbb a zöldkövesedett kőzetekben az, hogy földpátjuk még akkor is elég üde állapotban van megtartva, a mikor az összes színes elegyrészek már el vannak bontva. Különösen gyakori a zöldköves kőzetek földpátjain a zónás szerkezet, a mi

nemcsak a bázisosabb és savanyúbb zónák megismétlődésein nyilvánul meg, hanem gyakran szabályosan beleágyazott alapanyag előfordulásában is. A kőzetekben levő kvarczkristályok minden esetben erősen korrodálva vannak. A magnetit a zöldkőves kőzetekben, úgy látszik, mintha inkább csak a felszínen működő postvulkános hatások alatt alakult volna át pyritté, mert az üde zöldkőves kőzetekben a pyrit igen gyakran teljesen hiányzik, sőt olykor még igen gazdag telérek mentén a telér falát alkotó kőzetben is sok magnetitet találunk.

A zöldkőves kőzetekben előforduló járulékos elegyrészek közül a chloritot, epidotot és a klinozoitot a zöldkővesedéssel egykorúnak, tehát a mélyben képződöttnek tartom, míg a sericitet, zeolitokat és a calcitnak is nagy részét a felszínen a hydrotermális behatásokra létrejöttek vélem.

A zöldkőves és normális kőzetek chemiai összetételében, a mint arra már SCHUMACHER is felhívta a figyelmet, lényeges különbséget nem találunk; az ásványos összetételben azonban, mint azt fennebb is kiemeltem, némi eltérés megfigyelhető.

A zöldkőves kőzetek eddigi megfigyeléseim szerint az utólagos hydrotermális hatásoknak kevésbé állottak ellen, mint a már zöldkővesen meg nem bontottak. A zöldkőves kőzeteken a hydrotermális hatások gyengébb vagy erősebb mértéke szerint a kaolinosodás is többé-kevésbé haladt előre s ennek megfelelően az üde zöldkőves kőzettől a kaolinosig mindenféle átmenetet megtalálunk.

A bányaterületeken fellépő rhyolithokon magát a zöldkővesedést csak ritka esetben láthatjuk, mert a rhyolithok legnagyobb részét, eltekintve attól, hogy zöldkővesedésre alkalmas színes elegyrész ezekben a kőzetekben csak kevés van, a hydrotermális hatások nagyon megbontották, úgy hogy e kőzetek jelenleg erősen kifehéredve, elkaolinosodva, kilúgozva, igen gyakran tufaszerű külsővel találhatók.

A telérek előfordulási viszonyai.

Az erdélyrészi Érczhegységről szóló részletes leírásomban reáutaltam arra a módszerre, a melynek alapján az andesit- és

dacit-vulkánokon a régibb kitörési produktumok közepette a fiatalabb eruptiók kürtőit, a legtöbbször helyesebben boccait, külön ki tudtam jelölni. Ezt a kijelölési módot a nagybánya-környéki területeken is sikerrel tudtam alkalmazni. Ugyane munkámban alkalmam volt kimutatni, hogy ott az aranyat tartalmazó és minden esetben tektonikai származású telérek a vulkáni kürtőkhöz szorosan hozzá vannak kötve és csak alig pár telért találtam, a mely a kürtőtől távolabb, de mindig igen erős tektonikai vonal mentén lép fel. A Nagybánya környékén levő aranybányákban szintén hasonló viszonyokat észleltem.

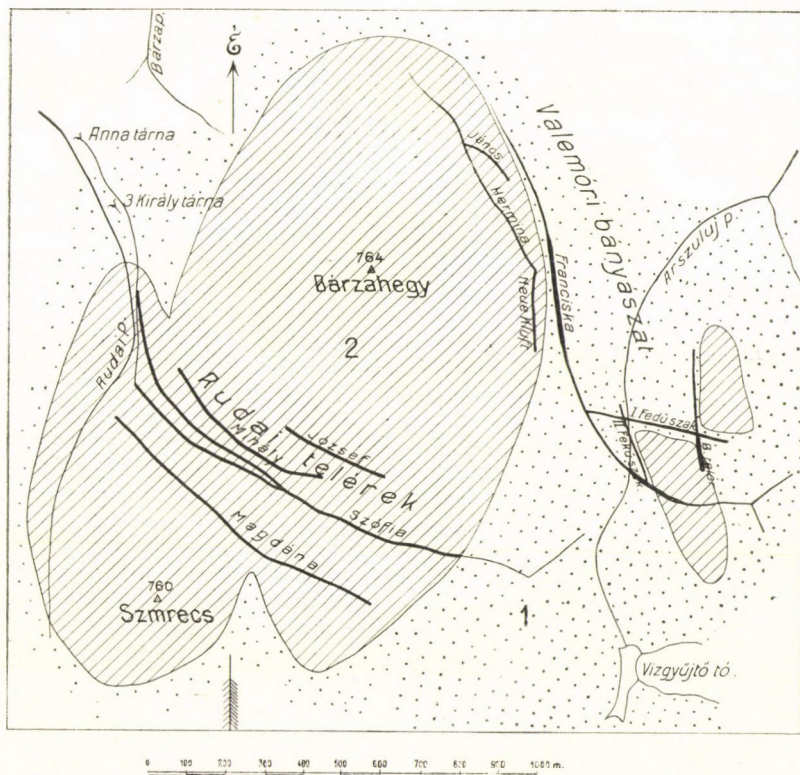
A következőkben a megvizsgált aranybányák közül igen röviden ismertetni fogom a fontosabbakat és feltüntetem azokban a főbb teléreknek viszonyát a geológiai kifejlődéshez. Minthogy lényegesen más viszonyokat találunk az andesitek és dacitok mellett levő teléreken, mint a rhyolithokkal kapcsolatosan előfordulókon, azokat külön is fogom tárgyalni.

Bár az erdélyrészi Érczhegységről írott munkámban az ottani bányák teléreit a vulkáni viszonyokkal részletesen egybevetettem, hogy az eddig végzett munkámról összefoglaló képet nyújthassak, az egyes típusosabb viszonyokat e helyütt is fel kell sorolnom.

Az andesitek és dacitok mellett levő telérek.

Brád környéke: Bárzahegy. Brád mellett a Fehér-Körös völgyének baloldalán emelkedik a Bárzahegy 764 m magas kúpja, a melyben jelenleg a legnagyobb hazai bányászat folyik s a melynek nagykiterjedésű bányafeltárásai a Bárzahegy kürtőjét, mondhatni, köröskörül feltárták s így alkalmat nyújtottak arra, hogy a vulkáni kürtőnek az aranytartalmú telérekhez való viszonyát tanulmányozni lehessen. Az 1. ábrán levő alaprajz tünteti föl a Bárzahegy kürtőjét és a mellette levő főbb teléreket. Látjuk ebből a térképvázlatból, hogy a kúp ÉK-i oldalán, a valemori bányaosztályban, két egymással párhuzamos telér halad ÉNyÉ—DDK-i irányban: a Herminatelér, mely a vulkáni esatorna szélén megy át, és a Franciskatelér, mely a kürtő szélén van, de magát a vulkáni kürtőt nem is érinti,

hanem a magasabb szinteken a kürtő mellett levő kaolinos tufában, breccsiában és lágában, a mélyebb szinteken mediterrán agyagpalában halad. A Herminatelér azon a szakaszon volt gazdag, a míg a kürtőben volt; kilépve a kürtőből rohamosan



1. ábra. A rudai és velemőri bányászat geológiai térképvázlata.

1=kaolinos tufa és láva, alatta mélyebb bányafeltárásokban felsőmediterrán-korú agyagpala és homokkő, 2=zöldkőves pyroxénés andesitből álló kürtő-kitöltések. — szegényebb telérrészek, — igen gazdag telérrészek.

elszegényedett. A Franciskatelér gazdag pontjai arra a szakaszra estek, a hol a telér a kürtő közvetlen közelében volt. A telért DDK-i irányban tovább hajtották ugyan, de a belőle termelt érc még zúzásra sem volt érdemes s csak ott lett ismét gazdag,

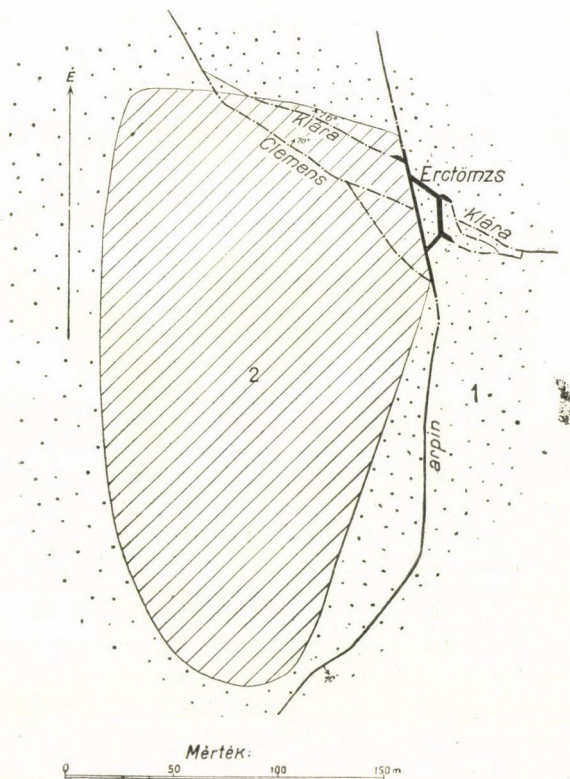
a hol annak az andesiterupciónak közelébe ért, mely az Árszuluj-patak jobboldalán bújik ki a felszínre. Ez eruptiónál a felszínen is ki lehetett mutatni, hogy vetődés érte, mert a telérszerű eruptio északi és déli vége egymástól el van tolódva. Ezen a területen találták a valemori telérek másik igen gazdag csoportját: az I. és II. feküszakadékot és a *B* telért, melyek részint az andesit mellett, részint a vetődés mentén fejlődtek ki, de ezek mindenike szintén csak az andesit szomszédságában tartalmazott aranyat és a mint attól eltávolodtak, a telérekben az aranytartalom elfogyott.

A térképvázlaton látni lehet, hogy a Bárzahegy kürtője a felszínen össze van olvadva a délnyugati oldalon a 760 m magas Szmrecs kúpjával. Hogy itt két külön eruptióval van dolgunk, a melyek csak a felsőbb szinten olvadtak össze, azt a Viktor-altárna alatt hajtott 120 m-es mélységet beigazolta, a mennyiben ezen a szinten a két eruptio már szétvált és közöttük a mediterrán agyagpalát tárták fel a bányaművelések.

A Bárza és Szmrecs kürtője között egymással párhuzamosan ÉNy—DK-i irányban haladnak a rudai telérek, melyeknek egy részét már a rómaiak lefejtették. Az összes rudai teléreken meglepő szabályossággal lehet kimutatni, hogy bennük a gazdag aranytartalom csakis azon a szakaszon volt, a míg a telérek benne voltak az összeolvadt kürtőben. A mint a telérek akár északnyugaton, akár délkeleten kijutottak a kürtőből és tufába, breccsiába vagy tufás mediterrán konglomeratumba hatoltak, az aranytartalom rohamosan elapadt belőlük.

Muszáribánya. Brád mellett a Muszáribánya telérei egy kisebb pyroxénandesiteruptio mellett fordulnak elő, a mely a gyűjtőnév alatt összefoglalható augitporphyriteken és azok tufáin tört át s így a telérek mellékkőzetét is részben ezek alkotják. A Muszáribányának két főtelére van: a Kárpintelér, mely az eruptio keleti oldalán halad végig az augitporphyrittufában egy törési vonal mentén és a Kláratelér, mely az eruptio északi végét metszi. A telérek gazdag pontjai itt is mindenütt arra a szakaszra esnek, a hol a telérek az andesit közelében voltak, vagy pedig az andesitet metszették. A híres muszári aranytörmzs, melyet a 90-es évek első részében fejtettek le és

a mely mintegy 1100 kg aranyat eredményezett, a két főtélér keresztezési pontján augitporphyrittufában volt, de a mint a 2. ábrán levő térképvázlatról látni lehet, az andesit közvetlen közelében.



2. ábra. A muszári bányászat geológiai térképvázlata.

1 = augitporphyrittufa és breccia, 2 = zöldköves piroxénos andesit.
 — szegényebb telérrészek, — — — gazdag telérrészek, ——— igen gazdag telérrészek.

E két főtéléren kívül van még Muszárin több kisebb telér is, a melyek kisebb-nagyobb törési vonalak mentén vannak, de az eruptiótól nem nagy távolságra. Az újabb időben még egy másik gazdag telért is találtak SCHUMACHER közlése szerint, a Heléna-telért, mely csupán a telér 16 m hosszú előhajtásában 82 kg

aranyat szolgáltatott. SCHUMACHER leírása, valamint szóbeli közlések alapján is megállapíthattam, hogy ez az új telér is teljesen azonos viszonyok között fordul elő, mint a többi. A muszári völgy keleti oldalán emelkedik ugyanis a Hrinkuhegy kúpja, melynek csatornáját a bárzai bányaterület felé hajtott harántvágatban keresztezték is. Az új telér előfordulási helye úgy SCHUMACHER adatai, mint a szóbeli közlések alapján közvetlenül a Hrinkuhegy kürtője mellett van s így érczesedése is annak eruptiójával függ össze.

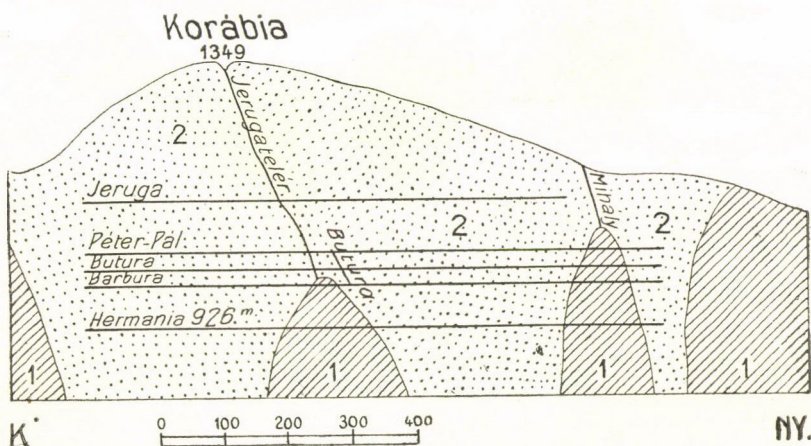
Felsőkajanel. A felsőkajaneli bánya teléreinek előfordulása zöldköves amphibolandesithez van kötve. A felszínen két eruptiót sikerült körülhatárolnom, melyek a Kajánpatak mentén elég nagy területen vannak összeolvadva, de a Georgina-altárnában már csak egészen kis területen érintkeznek egymással. A közel észak-déli irányú telérek egymással párhuzamosan a két eruptio összeolvadási helyén futnak le. Az altárna alatti mélyszinteket már nem tudtam bejárni, de kétségtelennek tartom, hogy az altárna alatt nem nagy mélységben a két eruptio egészen szét is válik egymástól. Ha a telérekben az aranytartalom eloszlását tekintjük, akkor itt is azt látjuk, hogy a míg azok benne voltak az összeolvadt eruptiók kürtőben, gazdag aranytartalmuk volt. A mint azonban kijutottak az eruptio mellékközetét alkotó tufába és lávába, a telérek aranytartalma rohamosan elfogyott.

Troiczai bánya. A troiczai bányában már csak a Grimm-altárna egy részét tudtam bejárni és e bejárt részben úgy találtam, hogy a tresztyai telérek az augitporphyrittufának és a zöldköves amphibolandesitnek kontaktusán vannak. A bányaműveletek azt bizonyítják, hogy a mint a telérek az andesit-eruptio végén túlhaladtak, hamarosan el is szegényedtek.

Porkurai bánya. Porkurán a jelenlegi bányászat a zöldköves pyroxénandesitből álló Magura déli lábánál folyik egy kisebb andesites dacitból álló telérszerű eruptióban, a mi az alapközetet alkotó augitporphyriten tört keresztül. Az eruptio anyaga a felsőbb szinteken breccsiává van szétzúzva s az egyes darabok kaolinosan is meg vannak bontva és kovandos érczezel össze vannak ragasztva. Az aranytartalom részint a breccsiát összeragasztó kovandhoz, részint pedig az eruptitót átmetsző

telérhasadékokhoz van kötve. A telérhasadékok csak az eruptiók közöttben tartalmaznak aranyat és az eruptiótól alig pár méterre elmeddülnek.

Vulkój-Korábia. A Korábiahegy andesittömege a felszínen futólagos megtekintésre egységes eruptiónak látszik. Ha azonban a déli oldalon kárpáti homokkővel, az északi oldalon tufával és lávával érintkező andesitet figyelmesen körülhatároljuk, akkor azt látjuk, hogy a kárpáti homokkő több helyen bekanyarodik az andesitbe oly módon, mint azt a felszínen összeolvadt



3. ábra. A Vulkój-Korábia szelvénye.

1=kárpáti homokkő, 2=zöldköves pyroxénos-amfibolos andesit.

kürtőkön szoktuk találni. A hegy belsejében levő bányafeltárások megmutatták, hogy a hegy tömegét legalább is három eruptio alkotja, melyek a bányafeltárásokkal elért mélységben már külön is váltak. (L. 3. ábra.) A Jeruga nevű főtélér kibúvását a hegy csúcsán hatalmas külszíni művelések jelzik. A mélyebb szintekre lefelé követve a telért, úgy találjuk, hogy az már a Hermania-altárna felett belejut teljes hosszúságában a kárpáti homokkőbe. Itt tehát a telér mentén összeolvadt két eruptio már teljesen szétvált.

Hasonlóan a felszín felé egyesült eruptiók határán van a Jerugától nyugatra az Alsó- és Felső-Mihálybányák telére is,

a melynek mentén szintén hosszú darabon fel van tárva a kárpáti homokkő, de az eruptiók középső része a jelenlegi mélységben még össze van olvadva.

Mindezekben a telérekben az aranytartalom horizontális eloszlását szintén úgy találjuk, mint a fennebb ismertetett bányákban, hogy ugyanis ezekben is csak azon a szakaszon volt aranytartalom, a melyen benne volt az eruptiós kürtőben.

Facebánya. A facebányai telérekről csakis a külszíni kifejlődés után mondhatok valamit, mert a bányafeltárásokból semmit sem járhattam be. Az itteni telérek részint a telérszerű pyroxénandesiteruptiók mellett vannak, részint pedig az egyes telérszerű eruptiók összekötő vonalába esnek.

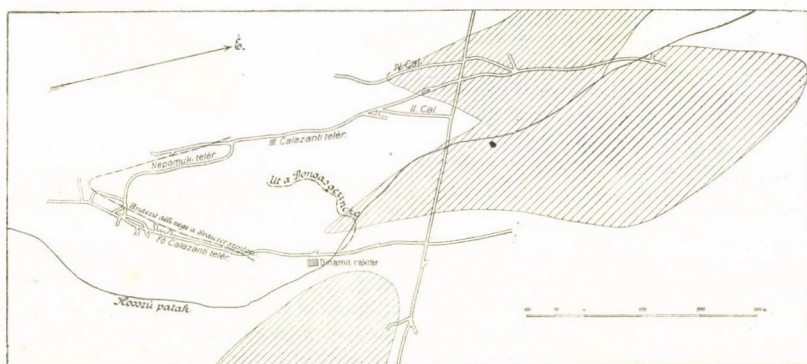
Nagybánya, veresvizi terület. Nagybányán a veresvizi bányaterület alapját a pontusi agyag alkotja, a melyen az andesites dacitnak nevezhető kőzet láváját, tufáját és breccsiáját találjuk. Ezek a képződmények zöldkövesedve vannak, de a mellett még kaolinosan is meg vannak bontva. Ezeket a képződményeket hosszúra nyúló telérszerű eruptiókban zöldköves, a legtöbbszor üde pyroxénandesit töri át, a mely üdesége miatt különösen a felszínen élesen elkülönül az áttört kőzettől. A magasabb heggyerinczeket a bányaterület felett elbontott és kilügzött riolitláva fedi, a mely helyenként beborítja még az említett fiatalabb pyroxénandesiteruptiót is.

A veresvizi telérek ezekhez a fiatalabb pyroxénandesiteruptiókhoz vannak kötve. Kétségtelenül kitűnik ez abból, hogy a telérhasadékok ezeket a fiatalabb erupeiákat is metszik, sőt a telérek gazdag aranytartalma szorosán hozzájuk van kötve, a mennyiben minden teléren ki lehet mutatni, hogy leggazdagabb részei vagy magában a fiatalabb eruptiók kőzetben vannak, vagy pedig — ha a telérek az eruptiókat nem metszik — azok közelében.

Így például a Lőrincz és a folytatásába eső fő Calazanci-telér két hosszúra elnyúló eruptio között van, a melyek a felületen még elég távol vannak egymástól, de a Svaiczeraltárna szintjén egy darabon már — úgy látszik — érintkeznek egymással. A nyugaton levő eruptiónak másik — nyugati — szélén halad végig a veresvizi bányászatnak egyik leggazdagabb

telére, a III. Calazancitelér és az eruptio déli végét metszi annak egy haránttelére, a Nepomuktelér. (L. 4. ábra.)

Egy másik igen gazdag telére volt a veresvizi területnek a Mártontelér, melynek folytatása a felsőbb szinteken a Lóbányaitelér. Ez a telér is egy fiatalabb andesiteruptióval van kapcsolatban. A hosszúra elnyúló telér déli részében, a hol az andesites dacit tufájában és lávájában halad, csak többé-kevésbé jó zúzóérczet szolgáltatott, míg ellenben ott, a hol belement a fiatalabb andesiteruptióba, egy körülbelül 40 m

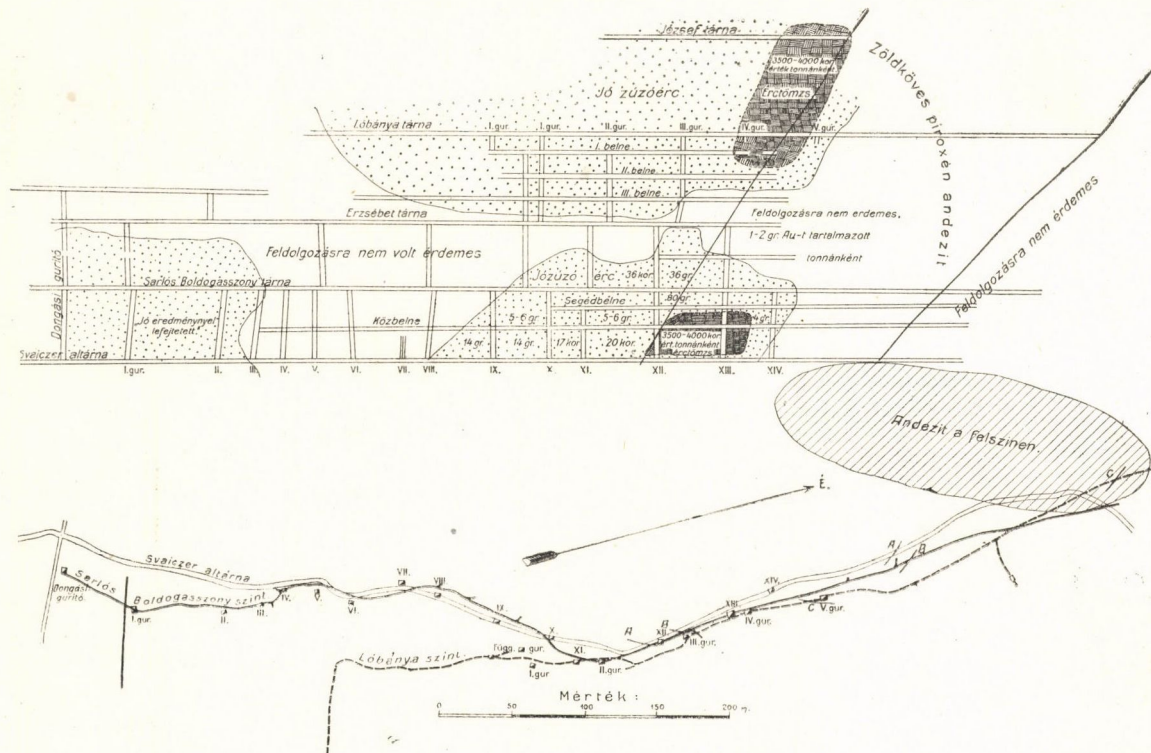


4. ábra. A veresvizi Calazanci telérek geológiai térképvázlata.

A vonalozott terület a zöldkőves pyroxénandesit elterjedése a felszínen, a fehérén hagyott rész bontott zöldkőves andesites dacittufa és láva.

hosszú gazdag ércoszlop fejlődött ki. Ettől az ércoszloptól északfelé úgy az andesitbe, mint tovább a tufába és lávába eső telérrészben a telér teljesen elszegényedett, úgy hogy érc-tartalma hirtelen 1—2 gr-ra szállott le tonnánként. (5. ábra.) Azután pedig teljesen el is meddült.

A Mártontelértől tovább nyugatfelé, szintén közel É—D-i csapással, az István- és Evangelistatelérek következnek, a melyeknek az andesithez való viszonyát ma már világosan nem lehet látni, mert a legtöbb bányafeltárás bejárhatatlan; az andesit felszíni kibúvását pedig, a mi esetleg útba igazíthatna, riolitláva fedi el. Azt azonban ezekről a telérekről is meg lehet állapítani, hogy szoros kapcsolatban vannak a



5. ábra. A Márton-Lóhányai telér alaprajza és szelvénye.

A—A = zöldkőves pyroxénandezit a telér mentén a Sveiczert-szinten, B—B a Sarlós-Boldogasszony-szinten
C—C a Lóhányai tárna szintjén.

tiatalabb andesiteruptióval, még pedig valószínűleg annak egy összetörött telérével.

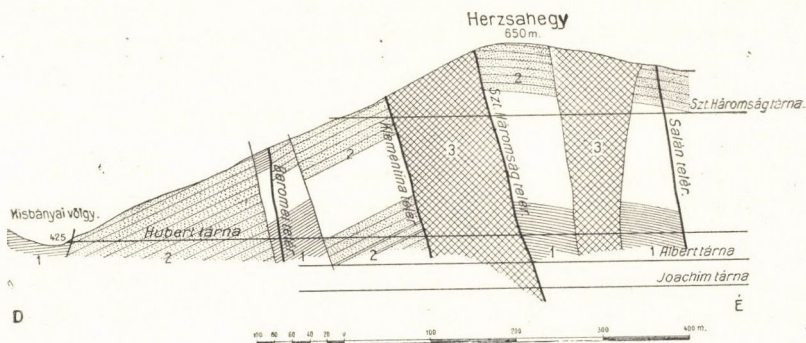
A veresvizi telérszerű eruptiókra jellemző, hogy azoknak déli végződése nem vertikális, hanem délfelé dül, úgy hogy a bányafeltárásokban az andesitek déli végződését a mélyebb szinteken sokkal délebbre találjuk, mint a felsőbb szinteken és a napszíni kibúváson. A milyen mértékben dül az andesit déli végződése, olyan mértékben dül az andesit széle mentén a telérekben a gazdag rész is. Feltűnő és talán az andeziteknek a mélység felé déli irányban való lehúzóódásával magyarázható az körülmény, hogy a telérek kibúvása az andesittől csak délfelé ismeretes hosszú vonalon, a hol az andesittől még messzire is jó zúzóérczet szolgáltatott, míg az andesittől északra a telérek hirtelen meddültek el. Ezt a körülményt talán úgy lehet megmagyarázni, hogy az érczetet hordó ágensek a mélyben az andesiteruptio mentén szálltak fel a telérhasadékba. Mint-hogy pedig az eruptio helye a mélyben délebbre volt, mint az andesitek felszíni kitörése, az érczhordó ágensek részint vertikálisan, részint pedig az andesiteruptio déli végződését követve ferde úton hatoltak be a telérhasadékba. Ily viszonyok mellett természetesnek látszik az is, hogy azok a telérhasadék déli részén rakták le az érczetet; az eruptio északi részén és különösen attól északra pedig nem. E viszonyokat vázlatosan az 5. ábrán feltüntetett szelvény magyarázza meg, mely a Márton-Lóbányai telér csapásának mentén van átfektetve.

Nagyág. A nagyági telérek zöldköves daciteruptióval kapcsolatban fordulnak elő, de úgy a telérek fellépése, mint maga az eruptio, a melyhez hozzá vannak kötve, eltér az összes megvizsgált bányák teléreinek és eruptióinak fellépési módjától, bár a mélységben végeredményben azok is hasonló szabályosságot mutatnak, mint a többi eruptiónál láttuk.

Az eddigi bányafeltárások után joggal lehet azt következtetni, hogy a jelenlegi legmélyebb szint alatt nem messzire egy kis kiterjedésű földacitkürtöt fognak találni, két szélén a nagyági két főtélérrel: a valódi Longinnal és a Nepomukkal. Felfelé a dacitkürtő többszörösen elágazik, úgy hogy annak ágai a felszínen már nagy területen terjedtek el s az egyes ágak között

a felszínen is, de különösen a bánya felsőbb szintjein, sok helyen megtaláljuk az áttört mediterrán alaphegység foszlányait. A kürtő elágazásától függetlenül felfelé legyezőszerűleg sokszorososan elágazik a két főtélérhasadék is, különösen a valódi Longin, úgy hogy a felsőbb szinteken már igen bonyolult telérhálózat jött létre.

Kisbánya. A Felsőbánya közelében levő és régebben Kisbánya néven ismert bánya — legalább a jelenben — arany-ezüstbányászat szempontjából alig jöhet számításba, a mennyiben a jelenlegi mélyebb feltárásokban majdnem kizárólag csak ólom-,



6. ábra. A kisbányai Herzsabánya szelvénye.

1=kontaktos pontusi palás agyag, 2=zöldköves pyroxénandesitufa és láva,
3= zöldköves pyroxénandesit kürtőkitöltése.

ezink- és antimonérczeket fejtenek. A magasabb szintek állítólag nagyobb mennyiségű ezüstöt tartalmaztak, a jelenlegi szinteken azonban a galenitek ezüsttartalma már oly csekély, hogy a legtöbbször teljesen figyelmen kívül hagyják. Van ugyan egy telére, a Salán telér, mely majdnem kizárólag ezüstérczeket, még pedig Semseyitet és Fizélyitet tartalmaz, de maga a telér oly csekély vastagságú, alig pár mm, hogy feltésre nem érdemes.

Kisbányát e helyütt főleg csak azért említem, mert a megvizsgált területek között az egyedüli, a hol az áttört mellékközetben, a pontusi agyagon, nagyobb kiterjedésű hydato-pneumatolytikus hatást lehet észlelni. A bányaterület alapját a

pontusi agyagpala alkotja, a melyen keresztül tört a zöldkőves pyroxénandesit. A jelenleg feltárt teléreknek az eruptiókhoz való viszonyát a 6. ábra szelvénye tünteti fel. Ezen a szelvényen láthatjuk egyúttal azt is, hogy a pontusi agyagpala mily nagy területen van kontaktosodva, különösen kovasavval erősen átjárva. Ezt az átalakító hatást a telérek mentén felszálló exhalatiókkal alig tudnám megmagyarázni. Hasonló kontaktosodást például a Biharhegységben mindenütt oly helyeken találunk, a melyek alatt nagyobb kiterjedésű lakkolithot vagy batholithot kell feltételeznünk. Kisbányán is inkább arra lehet gondolni, hogy nem is nagy mélységben az andesitnek egy lakkolithja lehet jelen, a melynek csak apophysisei azok a kisebb andesit-eruptiók, melyeket a bányaterületen találunk.

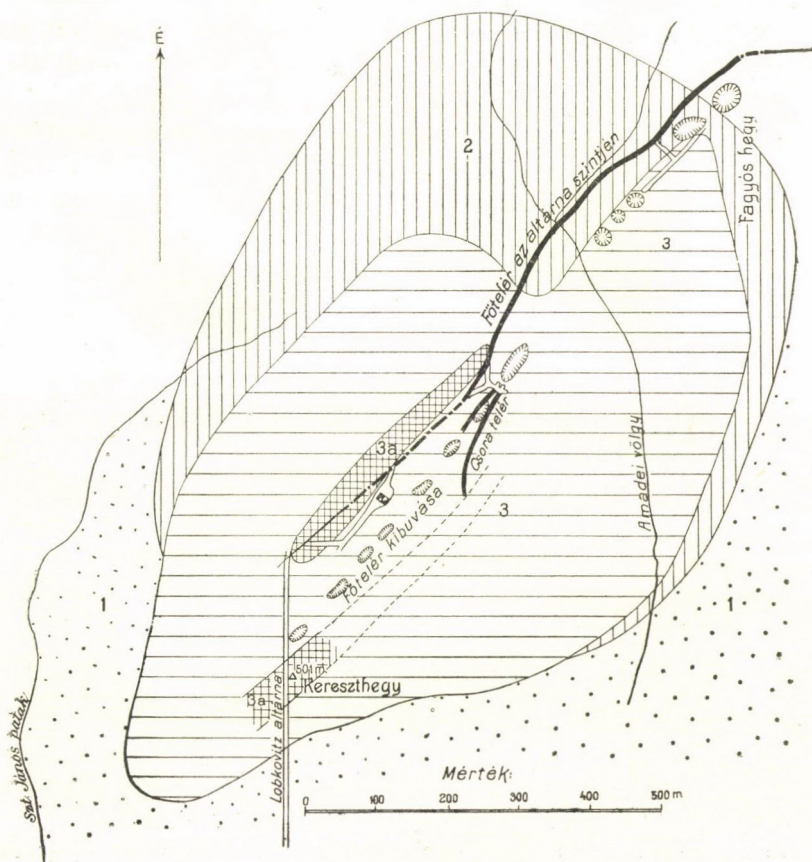
A rhyolithokkal kapcsolatos telérek.

A rhyolithok mellett fellépő telérek közül csupán a verespatakiak mutatnak rokonságot az andesitekkel, a dacitokkal kapcsolatos telérekhez, míg a többi megvizsgált előfordulás, nevezetesen a boiczai, Nagybányán a kereszthegyi, a borpataki és a felsőbányai, teljesen más typust képvisel. A mint mást typust képviselnek e telérek, éppenúgy más typust látunk az eruptiós közetek kitörésében is.

Verespatak. A verespataki rhyolithterület pontos körülhatárolása, illetve a rhyolithnak a tufától és brecciatól való pontos elhatárolása már a felszínen sejteni engedi, hogy a Csetátye és Kirnik hegytömegében több eruptiós központot lehet találni. Az altáró feltárásai is már megmutatták, hogy a felszínen összeolvadt rhyolithtömeg alatt több köralakú vagy hosszúra nyúlt ovális vulkáni kürtő van, a melyeket a rhyolithnak tufa- és breccia-képződményei választanak el egymástól. A mélyszintek most folyó feltárásai ezeket a vulkáni kürtőket bizonyára még élesebben fogják elkülöníteni.

A verespataki előfordulásra jellemző telérek, a teléreken kifejlődő székek (a meredeken álló teléreket keresztező lapos telérek) és a tömzsök, a mely utóbbiak tulajdonképpen nem egyebek, mint a teléreket rövid vertikális távolságban sűrűn

főtelérhasadékkal; az érczköz, mely a felsőbb szinteken meghaladta a 800 m-t is, az altáró alatt 210 m mélységben végleg ki is szorult.

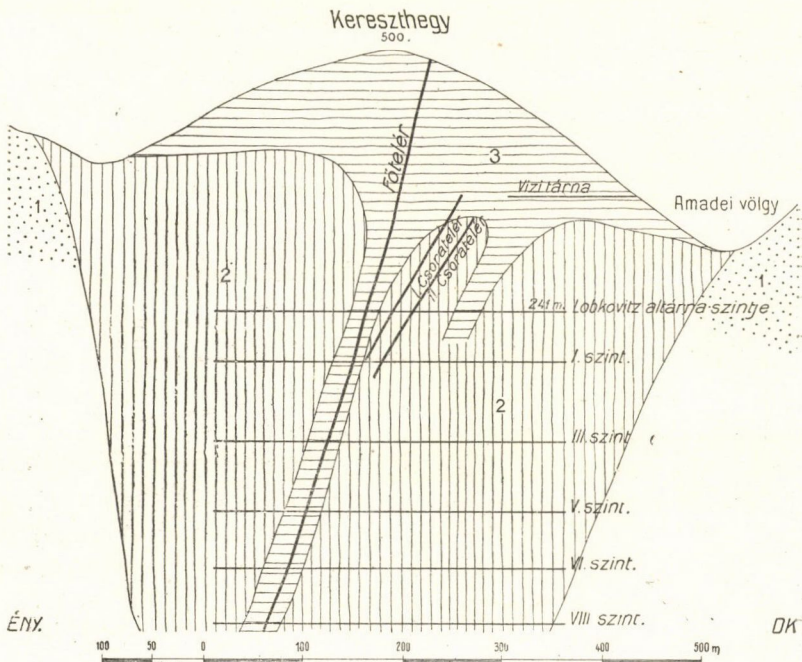


8. ábra. A kereszthegyi bánya geológiai térkép vázlata.

1=bontott zöldkőves andesites dacittufa és láva, 2=zöldkőves pyroxén-andesit kűrtökitöltése, 3=rhyolith (a felszínen), 3a=rhyolith a Lobkowitz-altárna szintjén. ———= meddő telérrész, - - - = jó zúzóércz
———— = gazdag telér.

Nagybánya, Kereszthegy. A nagybányai Kereszthegy kúpját szintén megbontott, egészen tufaszerűvé átalakult rhyolith alkotja. A zöldkőves pyroxenandesiten emelkedő kúp hosszkitér-

jedése ÉK—DNY- irányban mintegy 1200 m, míg a szélessége több mint 600 m. A kereszthegyi főtélér körülbelül az eruptiós kúp közepén halad végig ÉK, majd ÉKK-i irányban. A bányafeltárások — jelenleg csak az altáró alatti bejárható mélyszintek — azt mutatják, hogy a rhyolith a mélyben csak két keskeny kis telérszerű előfordulásra szorítkozik. Az északi eruptio az



9. ábra. A kereszthegyi bányászat szelvénye.

1 = bontott zöldköves andezites dacittufa és láva, 2 = zöldköves pyroxén-andesit, kürtő kitöltés, 3 = rhyolith.

olykor 15 m-re is kiszélesedő főtélér déli végén van, míg a főtélér mentén északkelet felé a rhyolith hiányzik. A kereszthegyi viszonyokat tehát úgy foghatjuk fel (l. a 8—9. ábrát), hogy a rhyolith csak két keskeny hasadékon tört a felületre és e hasadékok némely részéből a rhyolithanyag legnagyobb részét az eruptio a felszínre egészen kilökte, a hol az a hegykúpot alkotva szétterült. Így pél-

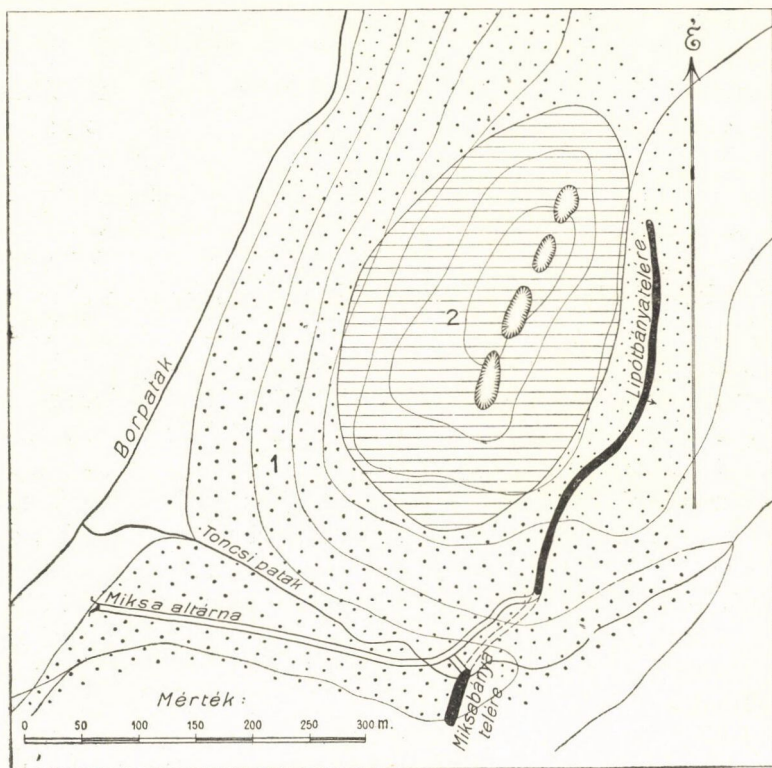
dául a főtélér mentén csak a hasadék déli végén szorult be elenyésző kis rész a vulkáni hasadékba. A mint a mélyebb szintekre lefelé haladunk, azt látjuk, hogy a rhyolith mind hosszabb darabon van meg a főtélér hasadékában: a rhyolith északkeleti végét mind északkeletrebbre találjuk.

A kereszthegyi bányában az ércz horizontális kiterjedésénél feltűnő, hogy a főtélér déli része, a hol az a rhyolithban van, igen gyenge, a mélység felé teljesen el is meddül, ellenében a vulkáni hasadéknak azzal a részével, melyből a rhyolith kiszorult. Minthogy a mélység felé a rhyolith mind hosszabb darabon van meg a vulkáni hasadékban, az érczköz is annak arányában szorul mind rövidebb darabra. Az érczköz északkeleti végződése azonban elég meredeken esik a mélység felé.

Borpataki bányák. A borpataki Pokol-féle Lipótbánya és a déli oldalon mellette levő Miksabánya genesisét a nagybányai kereszthegyi bánya ismerete nélkül alig érthetnők meg. A Lipótbánya a borpataki völgy baloldali két mellékvölgye, a Toncsipatak és a Jósikapatak között levő gerincz alatt van. A völgyekben köröskörül mindenütt a zöldköves pyroxénés andesit erősen bontott tufáját és láváját találjuk s ugyanez van meg a bányában is mindenütt a telérek mellékközeteként. A bányaterület felett azonban a gerincz kiemelkedő kúpját, a hol a Lipótbánya telére is a felszínre ér, kvarczosodott rhyolith alkotja, a melynek a bányafeltárásokban még nyomát sem találjuk. A Kereszthegyen észlelt viszonyok után a telér genesisét itt is ahhoz hasonló módon képzelhetjük el, hogy tudniillik a rhyolith kitörése alkalmával az eruptio a keskeny vulkáni hasadékból itt az összes rhyolithanyagot kiszorította, az a felszínen ömlött ki és az üresen maradt, olykor 10 m-re is kiszélesedő hasadékban az eruptiót követő exhalatiók rakták le a telér kitöltését (10—11. ábra). A telér ez idő szerint mintegy 50 m mélységig van feltárva a borpataki völgy talpa alatt.

Miksbánya. A Lipótbánya déli részén mintegy 70—80 m meddő köz következik, a mely elválasztja a Miksabányától. A Miksbánya telére mindössze alig 80 m hosszú és 4—10 m vastag. Feltűnő, hogy ily csekély horizontális kiterjedés mellett a telér változatlan tartalommal ez idő szerint már körülbelül

100 m mélységig van feltárva a borpataki völgy talpa alatt. A Miksabányában úgy a bányafeltárásokban, mint felette a Toncsipatak völgyében mindenütt csak a zöldkőves pyroxénos andesit bontott tufáját és láváját találjuk s rhyolithnak még a felszínen sincsen semmi nyoma. Mégis a Kereszthegyen és a

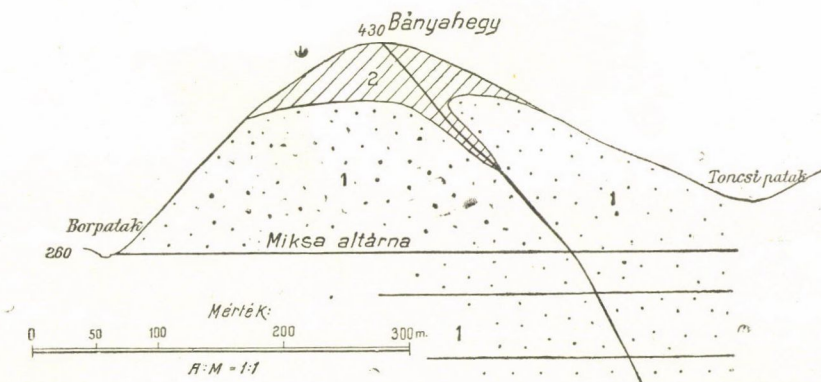


10. ábra. A borpataki Lipót- és Miksabánya geológiai térképvázlata.
1 = bontott zöldkőves andesittufa és láva. 2 = rhyolith.

Lipótbányában észlelt viszonyok után valószínűnek kell tartanunk, hogy a Miksabányában is hasonló volt az eset, mint a Lipótbányában. A mélyre lenyúló gazdag telérrész egy rhyolithvulkán hasadékát képviselheti itt is, a melyből a rhyolitheruptio teljesen kiszorult s a felszínen ömlött ki. A rhyolith kiömlése helyén, a

Miksabánya telére felett képződött ki azután a Toncsipatak völgye s ez alkalommal a kiömlött rhyolith erodálódott, úgy hogy most már nyomát sem találjuk meg.

A borpataki völgyben több jelenleg is művelt és felhagyott bányával találkozunk, a melyek a pyroxénandesit bontott tufájában és lávájában vannak, látszólag távol mindenféle eruptió központtól. Ezek közül a bányák közül talán egyik-másikat úgy foghatjuk fel, mint a Lipót- és Miksabányát s feltételezhetjük, hogy a jelenlegi telér az üresen maradt vulkáni hasadék-



11. ábra. A Lipótbánya szelvénye.

1 = bontott zöldkőves andesittufa és láva, 2 = rhyolith.

ban képződött, míg a hasadékból kiszorult és a felszínen kiömlött rhyolithot az erosio eltávolította.

Felsőbánya. Felsőbányán a bányahegy rhyolithkúpjának felépítési módja emlékeztet a nagybányai Kereszthegyre. A közel K—Ny-i irányban elnyúló, majdnem 2 km hosszú és 700 m széles eruptio köröskörül pyroxénés andesit elbontott zöldkőves tufájával és lávájával érintkezik. Az É felé dülő főtélér, melyből kisebb ágak ki is ágaznak, körülbelül a kúp középrészén csap K—Ny-i irányba. A bányafeltárásokban — a bejárható mélyebb szinteken — a főtélér mindenütt a rhyolith északi szélén jelenik meg, a hol fedőjét csak kis területen alkotja a rhyolith, míg a legtöbb helyen vagy a zöldkőves pyroxénandesittufával,

vagy a pontusi palás agyaggal érintkezik. A telér fekvőjében a rhyolith vastagságát magam nem állapíthattam meg, mert a mind-össze is csekélyszámú harántvágat közül egy sem volt bejárható állapotban. Joós LAJOS bányamérnöknek a 90-es évekből származó feljegyzéseiből azonban kitűnt, hogy körülbelül a kúp közepe táján az altárna szintjéről dél felé hajtott úgynevezett Éli reményvágatban a főtélértől mintegy 100 m-ig haladtak csak a rhyolithban. Azután körülbelül 20 m széles palás agyagsávot kereszteztek, a min túl zöldkőves andesitbrecciaiba jutottak. Az altárna szintjén tehát a rhyolitheruptio vastagságát alig lehet 100 m-nél többre becsülni.

A rhyolitheruptio hosszkiterjedése úgy látszik a mélység felé összeszűkül s vele együtt rövidül meg a telér horizontális kiterjedése is. Ez főleg a telér és az eruptio nyugati végződésére nézve áll, míg kelet felé a mélyszinteken a rhyolith és a telér is annyira kelet felé nyúlt, hogy elért az alá a terület alá, a hol a felszínen a rhyolith keleti vége végződött s a Combhegy lejtőit a pyroxénandesit zöldkőves tufája és lávája alkotja. Ennek megfelelően például a X. szinten a telér is jóval tovább nyúlik K felé, mint a felsőbb szinteken. A felsőbányai bányászat jelenleg a borpataki altárna s egyszersmind a felsőbányai fővölgy alá több mint 180 m mélységig, tehát a tengerszintje fölé körülbelül 170 m-ig nyúlik le.

A felsőbányai bányákat kizárólag aranytermelésre talán csak a történelemelőtti korban, a legfelső szinteken űzhették. A későbbi időben a felsőbb szintekről a kovandos érczekből: a vas, ólom és zink kénegeiből kevés aranyat is tartalmazó ezüstöt termeltek. A mélyebb szintekről azonban, különösen azóta, hogy az ezüst értéke leszállott, főleg ólmot, zinket és antimont bányásztak. Különösen a főtélérből északi irányban kiágazó Ökörbányai, Bornyúbányai telérek és az Ignácztelér tartalmaztak több aranyat az aranyos ezüstben, főleg a galenithez követve. A mélység felé feltűnő mennyiségben kezd felszaporodni a chalkopyrit, a mi a felsőbb szinteken csak alárendelten fordult elő, míg jelenleg a X—XI. szinten a főtélér fekvőjében szép reményekre jogosító impregnatio alakjában található a rhyolithban.

Az ércztelérek viszonya a vulkáni kürtökhöz és az aranytartalom horizontális elterjedése.

Az *andesit* és *daciteruptiók*, melyekhez a telérek fellépése hozzá van kötve, mint az előbbi példákból kitűnik, részint messzibbre nyúló többé-kevésbé széles teléralakú, részint ovális vagy köralakú eruptiókban jelennek meg a vulkánok idősebb terményei közepette. Kevés esetet észleltem, a hol az ércztelérek a keskeny andesittelérek összekötő vonalán vannak (Facebánya). Gyakoribb eset, hogy a telérek az eruptiók szélén vonulnak végig. Nem ritka az az eset sem, hogy két egymásmellett levő eruptió vagy a felületen, vagy bizonyos mélységben össze van olvadva egymással, amikor is az ércztelérek a kettő között jelennek meg.

Hogyha a telérek fellépése helyét tekintjük, akkor a fennebbi példákon feltűnik, hogy azok az eruptiók kürtökhöz mily szorosan hozzá vannak kötve, még pedig az, hogy a telérek 1. vagy az eruptiók szélén haladnak végig, esetleg két erupezióznak összeolvadása határán, 2. vagy oly helyeken, a hol magát a vulkáni eruptiót is törés érte és 3. vagy egy oly hasadékon képződtek, a melybe — legalább a felszínen — egymással össze nem függő telérszerű eruptiók szorultak. Ilyen helyeken a telért az egyes kis eruptiók összekötő vonalában találjuk.

Ha a telérekben az aranytartalom horizontális elterjedését vizsgáljuk, akkor azt a szabályosságot látjuk, hogy a telérek csak ott tartalmaznak nagyobb mennyiségű aranyat, a hol vagy belemennek az eruptiók kürtőbe, vagy pedig a kürtő mellett vonulnak el.

Azokon a teléreken is, melyek az eruptiók elvetődésén képződtek, szintén azt találjuk, hogy bennük az aranytartalom az eruptiók közet közelségére szorítkozik. Így látjuk ezt a mu-szári Kárpín és Klárateléreken, melyeknek leggazdagabb pontjai bár a mellékközetbe estek, de e gazdag pontok alig néhány méterre fekszenek az eruptiók közettől. Ugyanezt észlelhetjük a valemori *B* teléren és I. Feküszakadékon is.

A *rhyolitheruptiók*, a verespatakiak kivételével, mind keskeny

hasadékon nyomultak a felületre, a hol szétterülve, a vulkáni hasadék felett kimagasló kúpokat alkottak. Egyik-másik hasadék-ból a vulkáni eruptio a rhyolithanyagot részben vagy egészen ki is szorította. A kőzet megszilárdulása után bekövetkezett tektonikai mozgások a vulkáni hasadékot újra felszakították s a rhyolith szélén létrehozták a telérhasadékot. Ott, hol a vulkáni hasadék részben vagy egészen üresen maradt, újabb felszakadás alkalmával az üresen maradt részen nem képződött új telérhasadék, csupán a rhyolithtal kitöltött szakaszon és a kiömlött kúpban. Ennek a képződési módnak megfelelően a rhyolithhoz kötött telérek kibúvásai rendszerint a vulkáni kúpok közepén vannak.

Az aranytartalom horizontális elterjedése a rhyolithokon a vulkáni hasadékok hosszával van kapcsolatban. Minthogy pedig az csapásirányban a mélység felé, ha lassan is, mégis rendszerint rövidül, annak arányában rövidül a telérekben az érczes köz hossza is.

A telérek kitöltése.

A telértöltelék meddő anyaga részint a mellékkőzetből, részint a mélyből származik. Ott, hol a telér valamely eruptiós kőzet kürtőjében van, a telértöltelék az eruptiós kőzet kaolinoosan elbontott kvarczos vagy mészpátos törmelékéből áll. A telérekben a kvarcznak és mészpátnak jelenlétére semmi szabályosságot sem találtam. Mégis úgy tűnik fel, mintha a mészpátos kitöltés a teléreknek a vulkáni kürtőn kívül eső részében volna gyakoribb, míg a kvarczos kitöltés úgy a kürtőbe, mint az áttört kőzetbe eső részen egyformán előfordulhat. Az áttört kőzetben, ha az eruptiós lepel alatt agyagos képződmények vannak, azok olykor a telérbe is felnyomulhatnak s ilyenkor a telér kitöltését agyagossá teszik. Minthogy az ily telérrészek rendszerint távol esnek a vulkáni kürtőtől, aranytartalom bennük alig van. Ezzel magyarázható meg az a bányásztapasztalat, hogy a hol a telér tölteléke elagyagosodik, a telér el is meddül. Van azonban eset, hogy a telér tiszta mediterrán agyagban is igen gazdag volt, például Nagyágon és Vale mórin, ha a telérrész közel volt a vulkáni kürtőhöz.

Míg a mészpátos kitöltést a legtöbbször inkább a mellék-

kőzetből kioldottnak kell tekinteni, addig a kvarcz legnagyobb része a mélyből származik. Egy része azonban annak is, különösen a rhyolithoknál, származhatik a mellékkőzetből.

A nagybányai Kereszthegyen a mélyszinteken gyakran egyáltalán nem találunk a mellékkőzetből semmit sem a telér kitöltésében, a mennyiben az egész telérkitöltésben tömör kvarcz váltakozik galenittel, sphaleritvel és pyrittel impregnált kvarczszalagokkal.

A mélyből ascensio útján kell származtatni a telérek érczes kitöltését, a mi a különböző bányáknál, sokszor még a közvetlenül egymás mellett levőkben is, igen különböző. Az erdélyrészi Érczhegységben például az arany, a szabadarany-előfordulásokon kívül, majdnem kizárólag a pyrithez van kötve, eltekintve a tellurtól. A foncsorítható szabadarany azonban túlnyomó a pyrithez kötött kohóarannyal szemben. A galenitnek és sphaleritnek csakis ásványtani fontossága van. Borpatakon szintén szabadaranyat és pyrithez kötött aranyat találunk, azonban itt már a pyrithez kötött arany az uralkodó. Galenit és sphalerit itt is csak alárendelt szerepet játszik. Nagybányán a veresvízi bányaterületen részben a foncsorítható arany, részben a pyrithez kötött fordul elő, de egyes telérekben már jelentős szerepet játszanak az ólomnak és cinknek kénegei is. A Kereszthegyen talán csak az altáró felett régen leművelt részben fordult elő szabadarany, míg a mélyszinteken főleg aranytartalmú ezüst van, a mi szorosán hozzá van kötve a vas, ólom és cink kénegeihez. Felsőbányán, valamint Kisbányán is, csak a felsőbb szintek tartalmaztak az ólom, cink és vas kénegeihez kötve aranyos ezüstöt, a melyben azonban az aranytartalom alárendelt volt, míg a mélyszinteket csakis az ólom-, cink- és antimontartalom miatt érdemes művelni.

Az érczek függélyes elterjedése.

Az érczeknek a horizontális elterjedésével az előbbiben már foglalkoztunk. Még fontosabb talán annál az érczeknek vertikális elterjedése. Régen ismeretes, hogy a mélység felé a telérekben az aranytartalom csökken és bizonyos mély-

ségben ha nem is szűnik meg teljesen, de a telér annyira elszegényedik, hogy leművelésre nem lesz érdemes. Ezt a mélységet a régi bányásmegfigyelések körülbelül a fővölgyek szintjére teszik. Általában ezt a szintet nagyjában el is lehet fogadni, különösen az andesitekhez és dacitokhoz kötött teléreknél, de kivételek ez alól a szabály alól azok a telérek, a melyek rhyolithok mellett jönnek elő és különösen az olyan rhyolitheruptiókkal kapcsolatosak, a melyek keskeny hasadékok mentén törtek felszínre és a rhyolithok anyaga többé-kevésbé kiszorult a vulkáni hasadékból, úgy hogy a telér magában a vulkáni hasadékban képződött ki.

A telérek kibúvásai, a hol a kőzetek már ki vannak lúgozva, szintén szegényebbek szoktak lenni, mint a felszín alatt bizonyos mélységben, úgy hogy a felszín alatt többé-kevésbé vastag gazdag zónát találunk. A felszín alatt levő gazdag zónának jelenléte régi bányáztapasztalat, melynek tudományos magyarázatát KRUSCH berlini tanár adta meg.¹ KRUSCH magyarázata szerint eredetileg csak egy aranyban szegényebb, úgynevezett primaer zóna volt. A felszínre kinyúló telérrész a felszíni behatások következtében oxydálódott, a mikor az aranytartalom oldatba ment, a mi a teléren a mélybe szivárgott s ott a sulfidok az oldatból redukálták az aranyat. Minthogy az idők folyamán ilyenformán több száz méter telérmagasság oxydálódott, az oxydálódott részt pedig az erosio nagy részben eltávolította, az oxydált telérrész aranytartalma a mélybe süllyedt le és ott gyülemlt fel. KRUSCH az előbbi oxydatiós zónával szemben az ily módon meggazdagodott mélyebb zónát cementatiós zónának nevezi, melynek alsó határát az állandó talajvíz szintájában szabja meg, a melyen alól már a primaer zóna következik.

KRUSCH a tellur-aranyérczeknél azonban csak két zónát vesz fel: a felső oxydatiós zónát, a hol az oxydatio következtében a szabadarany kiválik, míg a tellurt az erosio eltávolítja, és a primaer zónát, a mely a felsőbb szinteken gazdag szokott lenni, míg a mélység felé lassan elszegényedik.

¹ KRUSCH P.: Die Einteilung der Erze. Zeitschr. f. prakt. Geologie 15. Jahrg. 1907, p. 129.

Bár KRUSCH fejtegetéseinek jogosultságára a bányaterületeken lépten-nyomon találunk igazoló adatokat, mégis a gazdag zóna kiképződését kizárólag a cementatióval a megvizsgált területeken bajosan tudom megmagyarázni.

A nagyági tellur-aranyteléreken a leggazdagabb rész a felszín alatt szintén bizonyos mélységre volt. A felette levő részben azonban, a mi már a KRUSCH oxydatiós zónájának felelne meg, szintén csak tellurérczek voltak és szabadarany előfordulás itt csak a legnagyobb ásványtani ritkaság számba ment. Fel kell tehát tételeznünk itt, hogy a telluraranynek ilyen módon való eloszlása a telérekben primaer eredetű.

A telluraranyéhoz hasonlóknak gondolom én a kovandos és szabadaranyat tartalmazó telérekben is a primaer aranytartalom eloszlását, tudniillik, hogy az a felsőbb szinteken eredetileg is gazdagabb volt, a mélység felé pedig elszegényedett. Annak igazolására, hogy területünkön a gazdag zóna képződését kizárólag cementelődés útján elképzelhetőnek nem tartom, a következőkben csak néhány megfigyelést hozok fel.

A míg az andesitekhez kötött telérek aranytartalma körülbelül azon a szinten apad el, a melyet KRUSCH értelmében a cementatiós zóna alsó határának vehetünk, addig a keskeny hasadékon feltört rhyolithhoz kötött telérek aranytartalma a cementatiós zóna alsó határa alá még igen mélyre lehúzódik, és ha lefelé az érczek gazdagságában némi csökkenés be is áll, az nem hirtelen következik be — a mint azt a cementatiós és primaer zóna határán várni lehetne —, hanem a mélységgel együtt lassan, egyenletesen. Borpatakon a Lipótbányában ez ideig körülbelül 50 m-re, a Miksabányában mintegy 100 m-re haladtak le a borpataki völgy talpa alá a nélkül, hogy az ércztartalomban hirtelen csökkenés állott volna be. A kereszthegyi bányában a völgy talpa alatt 320 m-ig van feltárva a telér változatlan aranytartalommal. Az arany előfordulásában a magasabb és a mélyebb szintek között a különbség az, hogy mélyebben általában több az ólom, ezért az alsóbb szinteken nagyobb is a maratartalom, egész 10—12 %-ig emelkedik, a felsőbb szinteken a maratartalom kisebb, körülbelül 6—7%. A telérek aranytartalma azért ugyanaz marad a felsőbb és alsóbb szinten

ken is, csakhogy a felsőbb szinteken több a zúzóarany, a mit az alsóbb szinteken a nagyobb maratartalom pótol. Megjegyzendő azonban, hogy a mélyszinteken, le egészen a 300 m mélyen levő VIII. szintig, mindenütt el vannak terjedve azok az ásványok, melyeket KRUSCH a cementatiós zónára jellemzőnek mond, mint például a *Stephanit* és *Pyrrargyrit*. E szerint fel kellene tételezni, hogy valamikor ez az egész 320 m mély telérmagasság a nagybányai völgy felett volt, a mikor a cementatio végbement és azután süllyedt le az egész erre a mélységre, hol az erosiótól megóvatott. Úgy a nagybányai Kereszthegyen, mint Felsőbányán a Bányahegyen a riolit feltörése mentén vetődést ki is lehet mutatni, amennyiben mindenütt a rhyolith mellett s különösen attól északra az áttört pyroxénés andesit-tufa mélyre le van vetődve. Ez a vetődés azonban a rhyolithok feltörése előtt képződött; a rhyolithok feltörése után nagyobbszerű mozgásoknak nyomát sem találtam e területeken.

Nagybányán a veresvizi Mártonteléren levő érczoszlop (5. ábra) a Svaiczter szinten, a mely körülbelül a cementatiós zóna alsó határára esik, elszegényedik, úgy hogy alatta már fejtésre sem érdemes. Valamivel magasabb szinten, például az altárna felett 25 m-rel magasabban levő közbelne szinten, a veresvizi bányahivatal adatai szerint az érczoszlop tonnánként, 600—700 gr aranyos ezüstöt is tartalmazott, míg az érczoszloptól pár m-re észak felé tonnánként már csak 1—2 gr-ot adott, azután pedig éppen csak nyomokban volt kimutatható. Fel kell tehát tennünk, hogy ezen a területen legfeljebb ilyen 1—2 gr aranyos ezüstöt tartalmazó lehetett a primaerércz. Minthogy az érczoszlop magassága több mint 200 m volt, melynek középső része ismét elgyengült, de a felsőbb szinteken viszont tonnánként talán még nagyobb volt az aranytartalma, mint az alsóbb szinteken, az érczoszlop átlagos tartalmát legalább 50 gr-ra becsülhetjük tonnánként. E szerint tehát az érczoszlop 200 m magasságának legalább huszonötszörösére kellene tenni 2 gr-os primaerércz mellett azt a magasságot, a melynek aranytartalma az érczoszlopban cementelődött. Sőt ha átlagosan csak 20 gr-ra becsüljük az átlagos aranytartalmat, akkor is mintegy 1000 m telérmagasságnak kellett volna az érczoszlopban cemente-

lődni. A nagybánya-környéki vulkánokon azonban ezeknek a magasságoknak alig elenyésző hányadára becsülhetjük az eleródált részt, mert az itteni vulkánok sokkal fiatalabbak, semhogy sok száz méteres erosióra gondolhatnánk. VOLFF¹ közli a különböző vulkáni területeken a különböző vizsgálóktól megállapított erosiót. E szerint például a Siebengebirge és a Limagne miocénkorú vulkánain, melyek megtartási állapota körülbelül ugyanolyan, mint az erdélyi Érc-hegységé (külső felépítés elpusztult, a lávafalak részben megmaradtak), az eleródált részt 100—200 m-re becsülik. A Katzenbuckel miocén vulkánainak eleródált részét sem becsülik többre 550 m-nél, pedig ott a külső felépítés teljesen elpusztult, a kürtő az alapkőzetben már a felszínen van és az alapkőzetben látni lehet az intrusiókat. Hogy Nagybánya és Felsőbánya környékén a pontusi korú pyroxénandesitvulkánokon még annyira sem lehet becsülni az erosiót, mint az erdélyi Érc-hegység miocén vulkánain, az kitűnik abból is, hogy Felsőbánya környékén még megtaláltam egy pyroxénandesit vulkán kráterének a falát körülbelül harmadkör alakjában, alatta az ovális boccával. A kráter falának legmagasabb pontja még mintegy 50 m magas a bocca felett.

A Márton-Lőbányai telér ércoszlopán különösen feltűnő az, hogy bár az ércoszlop délfele dől, az ércoszloptól északra csak igen szegény érczetek találunk, holott az ércoszlop felső oxydált részéből a mélybe süllyedő oldatoknak éppen ott kellett volna gazdagabb cementatiót előidézni, mert fel kell tennünk, hogy a telérnek legalább az andesitbe eső jól kiképződött hasadékan az oldatok függélyes irányban is lehatoltak volna.

Mindent egybevetve, azt hiszem, hogy a kovandos arany-ezüstteléreken is, éppen úgy, mint a tellur-aranyteléreken, az ascensio a felszínhez közelebb egy bizonyos zónában rakta le nagyobb mennyiségben az érczetek. Ez a zóna az andesiteknél és dacitoknál kisebb mélységre terjedt, míg a rhyolithokhoz kötött teléreken nagyobb mélységre nyúlt le.

A gazdag zónának dúsításához azután hozzájárult a telérek kibúvásán végbement oxydatio, illetve az oxydatio alkalmával

¹ WOLFF: Der Vulkanismus I. p. 333. (Stuttgart (1914).

képződött fémes oldatoknak a telérek mélyebb részeiben való leszivárgása és reductiója által keletkezett cementatio, de ennek nem tulajdoníthatok oly nagy fontosságot, hogy kizárólag csak ennek a révén keletkezett volna a szegény primaer érczekből a felszínhez közelebb észlelhető nagy aranygazdagság.

*

Úgy az erdélyi Érczhegységben, mint Nagybánya környékén is a legutóbbi időkhöz mind oly telérekben dolgoztak, a melyeket gazdag felszíni kibúvásuk után fedeztek fel. A legutolsó években azonban a Brád környékén levő aranybányákban a vulkáni kürtők szélein a bányafeltárások több igen gazdag telért tártak fel, a melyek a felszínhez közel vagy annyira szegények voltak, hogy lefejtésük a költségeket nem fedezte, vagy a felszínhez közel el is vesztek. Ezeknek a teléreknek mélyebb részei szolgáltatják annak a havi 180—200 kgr aranytermelésnek nagyobb részét, a melyet a brádi 12 Apostol-bányatársulat évek óta rendszeresen kimutat.

Érczhegységeinkben az évezredes kutatások után alig lehet reményünk arra, hogy új érczes területeket a telérek gazdag kibúvásai után még fel lehessen fedezni. Reményem van azonban arra, hogy a céltudatos kutatás a vulkáni eruptiók szélein még sok olyan gazdag telért fog felkutathatni, a melyeket ezideig a felszínen szegénységük miatt feltárni nem tudtak.

Az utóbbi időkben a brádi aranybányákban a telérek felkutatása céltudatosan a tőlem végzett geológiai felvétel alapján az eruptió csatornáknak a mélységben való megközelítésével történik s ezzel *máris több gazdag telért fedeztek fel.* Jelenleg is nagyobb arányú munkálatok vannak folyamatban, melyek célja a felszínek kijelölt eruptió csatornák mellett a teléreknek a mélyebb szinteken való felkutatása.

A MARCGRAVIACEAE NÉHÁNY ÚJ ALAKJÁRÓL, A SZÁRMAZÁS- ÉS AZ ÖSSZEHASONLÍTÓ ALKATTAN ALAPJÁN.

I—XIV. táblával.

I.

Norantea Eötvösum AL. Richt., vonatkozással Gilg Norantea macroscypha-jára.

I—V. táblával.

RICHTER ALADÁR I. tagtól.

A) *Bevezetés*: Áttekintés a Ternstroemiaceae és az ebből rendszertanilag kiváló Marcgraviaceae biológiai, valamint alkattani ismeretéről. — A vonatkozó irodalom adatairól. — A jelen cikksorozatban szereplő újdonságok elnevezésének indokolása. — A követett származástani vizsgálati módszer kifejtése. — B) A vonatkozó irodalom összefoglalása.

I. *Norantea Eötvösum* AL. RICHTER. — I. B) A vizsgálat tárgyáttevő példák tüzetes sorozata. I. C) Ábramagyarázat.

A növények világában a Ternstroemiaceae helyzete a rendszertanban a sok különböző felfogás miatt nagyon változó (33. 106; etc.),¹ melynek keretéből, a BENTHAM-HOOKER Genera Plantarum (3. I. 181)-jában megnyilatkozó angol felfogás ellenére, mindenkép önálló, tehát természetesen körvonalozott családként válik ki a Marcgraviaceae JUSSIEU-

¹ A vonatkozó irodalom összefoglalását adja a bevezetés utáni B) fejezet. A kövérebben szedett sorszámok megfelelnek a szöveg zárójelben foglalt számainak, az utánuk következő szám jelzi a lap (pagina) számát. A szükségtelen újból nyomtatást elkerülendő, a következő Marcgraviacea-tanulmányokban is röviden ezekre a számokra hivatkozom.

től felállított nemzetsége (9. 18).¹ Hangya-, illetőleg bogár- és madárkedvelő (mirmeco-, entomo-, ornithophilus) tagjainak mindannyia biológiai érdekesség (4. 5. 10. 18. 161) és kivétel nélkül Amerika ama földségén otthonosak, melynek észak-déli határául röviden a két Térítőt jelölhetjük meg.

Sajátszerűen kialakuló s a bractea-val egyértékű nectariumaik (9. Tab. 40–51; 17. 160, fig. 83; Tab. I. fig. 3 *nc*), nemkülönbben fonákbeli glanduláik révén (amiket GILG az ő leírásaiban alighanem tévesen «hydatus (sic!) hypophyllus»-nak nevez: 21. 31–32; Tab. I. fig. 1a, 1b, 7 *gl—gb*),² valamint sajátos szöveti kiválásuknál (Gewebe-Differenzierung) fogva mihamar magukra vonták a természetbúvárok figyelmét; de mind máig anélkül, hogy a vizsgálatoknak e család körén belül fölöttébb háládatos terét akár a laboratóriumban avagy a Marcgraviaceák őstthonában is kiaknázták volna (9. 11–14).

Egyik-másik Marcgraviacea levél hegyén (melyről GILG a *N. macroscypha* leírásában azt írja, hogy «foliis... apice ipso ut videtur semper manifeste emarginatis ibidemque verosimiliter secernentibus» 21. 31) sajátos életműszer keletkezik (Tab. I. fig. 7 *hy—hy₂*), melynek «hydathodus»-voltát feltételezhetjük, de amelynek physiologiai-anatomiai ismerete csakis a Marcgraviaceák eredeti hazájában, az élő növény megfelelő vizsgálatával volna megállapítható. Valószínű, hogy ezek szerepe időleges, működésük megszűntével, szövetük csekélyebb tömörségé-

¹ *Marcgravia* PLUMIER Nov. Pl. Amer. Gen. 7. t. 29. Linné Gen. VI. ed. 640 et Spec. Plant. II. 562. etc. — «In honorem cl. GEORGII MARCGRAV de Liebstadt prope Pirnam, * 20. IX. 1610, † 1644. Cfr. GUIL. PISONIS et G. MARCGRAV Hist. natur. Brasiliæ, Amstelod. 1684.

GEORGIUS MARCGRAV életének és tudományos működésének igen érdekes rajzát olv. 30. 53–56.

² Ezeket azonfelül gyakran, miként már SOLEREDER is hangoztatja (22. 151), a Marcgraviacea-leveleken észlelhető paratúltengésekkel is összetévesztik. Mindezekről külön tanulmányban számoltam be a M. T. Akad. III. oszt. 1916. jan. 17.-i ülésén. «Összehasonlító alkat- és fejlődéstani vizsgálatok a Margraviaceae levélbeli paratúltengéseiről» czímen; e dolgozat I–XII kettős táblával a Math. és Természettud. Értesítő XXXV. (1917.) kötetében fog megjelenni.

nél fogva, könnyen leválnak a \pm bőrnemű levelekről; a levél ennek folytán utóbb «kicsipett hegyű» (folium emarginatum) lesz (Tab. I. fig. 7 *hy*₂).

A levelek szöveti kiválásának érdekességét fokozza a *Marcgravia*-nemzetség tagjait jellemző ortho- és plagiotropia a termő és meddő hajtások részéről (24. 28), vagyis az ennek megfelelő levélbeli kétalakúság (dimorphismus: Tab. IV. fig. 21 *a—b*) egyszersmind alkat- és élettani felemáslevelűséget¹ jelent (anatomiai és physiologiai heterophyllia),² szemben a Marcgraviaceae többi nemzetségével (*Norantea*, *Souroubea* és *Ruyschia*), amelyek levélbeli egyalakúsága (isomorphismus) általában a *Marcgravia*-nemzetség orthotropiájával egyértékű a szó élettani értelmében (Tab. I. 1 *a—b*).

Mindamellet, például a mechanikai szerepükben is fölötte érdekes sklereideket illetőleg, BUCH (6), a hollandus WIJNAENDTS-FRANCKEN (16. 40) és PEKELHARING (33) specialis sklereïdbeli értekezései is csupán általánosságokat érintenek, úgy, hogy ezek bizonyos csoportosításában SOLEREDER inkább BLENK (12) adattaira volt utalva (22. 147).

A M. Tud. Akadémia elé terjesztett jelen tanulmányaimból, teljes egészében pedig később (esetleg a külföldön) megjelenendő nagyobb munkámból fog kitűnni, hogy csupán az isomorph

¹ Magyar mesterszók dalgában olv. Math. és Természettud. Ért. XXXIII. (1915) köt. 364. l-on sub 1).

² Szorosabban az élettani felemáslevelűség kérdéseivel foglalkozom a M. Tud. Akad. III. oszt. 1915. jan. 18-i ülésén bemutatott (l. Math. és Természettud. Ért. XXXIII. 1915. köt. 248—49) és a Magy. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Közlem. XXXIII kötetében, valamint a Math. u. Naturwiss. Berichte XXXIV. kötetében I—XII táblával megjelenendő leideni munkálatomban. Félreértések, illetőleg könnyen megeshető téves értelmezés elkerülése okából hangoztatni kívánom, hogy ezúttal a szorosan értelmezett élettani felemáslevelűség fogalmában kizártnak tartom az «alaktani felemáslevelűséget», mely utóbbira közönséges például szokták idézni a «*Ranunculus aquatilis*» species collectiva-ját. Idézett munkálatomban alaktanilag átlag megegyező, de physiologiai-anatomiailag különbözőképpen viselkedő életműszerekről (levelekről) van szó.

Marcgraviaceák e tekintetben való viselkedése mennyivel változatosabb képet mutat mindazokhoz képest, amiket eddigelé s hozzá még nem is megfelelőkép, sőt a legtöbbször merőben helytelenül orientált mikroszkopiumi metszetek vizsgálataiból ismerünk.

Szorosabban a Marcgraviaceae szövettanát (histologia-ját ¹) illetőleg a közelmúlt időkben SZYSZYLOVICZ, e család monographusaként, kizárólagosan JUEL egyetlen s csupán három *Marcgravián* és egy *Noranteán* alapuló értekezésére volt utalva (14. 18. 158—59), miért is elmondhatom, hogy ezelőtt 18 évvel a M. T. Akadémia III. osztályának 1897. decz. 13.-i ülésén bemutatott Marcgraviacea-dolgozattal hízagot pótló munkát végeztem (24). Idézett Marcgraviacea-értekezésem azonban késedelmesen jelenhetvén meg: SOLEREDER 1899.-ben kiadott alapművéből kimaradt (22. 154).

A tétel ugyanabban az időben GOEBELT is foglalkoztatta, az ugyancsak minden növényteni intézmény részéről nélkülözhetetlen «Organographia»-jában (20. 137, fig. 93; 24. 31—32, sub Obs.***) s hogy fölösleges dolgot nem műveltem, SOLEREDER főművének (22) 11 évvel utóbb megjelent pótló-kötete igazolja, ahol anatómiai vizsgálati eredményeim a rendszertani alkat-

¹ Tudósaink java, *histologia*-t használ, mert egy csomó kézikönyv címlapján is valóban az olvasható, — a helyesebb «Histologia» helyett. *Ιστός*, *ὁ* (*ιστημι*) eredetileg *árboczfát* (Mastbaum, Schiffsmast) jelent s csak másodsorban *szövőszéket* (der Webebaum, der Webstuhl der Alten). Ellenben *ιστίον*, *τὸ* = szövet (*jedes Gewebe*, Tuch, Decke, Gewand), mely kifejezés HOMEROSTÓL fogva általában a vitorlát (das Segel) illetve (*ιστία μὲν στείλαντο* (begöngyölték a vitorlát), *θέσαν δ' ἐν νηὶ μελαίνῃ, ἰστὸν δ' ἰστοδόκῃ πέλασαν* (az árboczt az árboczvillába bocsátották) *προτόνοισιν ὑφέντες*. II. I (433—434). *ἰστιοφόρος* az, ami a vitorlát viseli (Segel tragend), ellenben *ιστοδόκῃ* = árbocztartó (Mastbehälter), — következésképp Histologia — és csak a szó átvitt értelmében «Histologia».

HOMEROS *Ilias*ának idézett soraira i. t. barátom, CSENGERI JÁNOS professzor figyelmeztetett engem; a vele folytatott class.-philologiai viták tanulságaira e helyt is hálásan emlékezem meg. A homerosi sorok újból való kikeresését TÓTH FERENC pozsonyi kir. főgimn. r. tanár úrnak köszönöm.

tan szempontjából is még mindig felhasználhatók voltak (23. 42—45).¹

Szorosabban az általam akkortájt megvizsgált *Marcgraviák*-kal utóbb a dánus V. A. POULSEN (25. 244—46), majd az olasz PAOLI GUIDO (28. 210—16.) is élénken foglalkozott és amíg POULSEN figyelmét nem kerülték ki vonatkozó vizsgálataim (25. 244): a francia PITARD (26. 27), valamint PAOLI (28) a firenzei növényanatomiai és -physiologiai laboratóriumban végzett vizsgálatai közben és kezdetleges rajzaival, viszont JUEL-t (14) is hallgatással mellőzi, ami rávall az olasz-francia pongyolaságra mindenkor, amikor főleg a német nyelvű tudományos irodalom tekintetbevételéről van szó.

A svéd JUEL annyival lelkiismeretesebben járt el, amikor figyelmére méltatta MÜLLER KONRÁD nagy általánosságok között mozgó vizsgálatait (11). Ezek kapcsán meg kell említenem BLENK (12) és HITZEMANN (13) dolgozatait is, jelölül annak, hogy a Marcgraviaceák egyik-másik tagjának alkattani vizsgálatával, az enyémtől eltérő célzattal, különböző időkben, különböző nemzetiségek botanikusai foglalkoztak.

BENTHAM-HOOKER-ék *Marcgraviaceae* csoportjának szerintük megkülönböztetett három nemzetsége, és pedig 1. *Marcgravia*, 2. *Norantea* és 3. *Ruyschia* (cum *Souroubea*) átlagosan 8—8 fajjal szerepel (3. I. 181). A fajok száma, főleg a berlini ENGLER-iskola nagyarányú növény-földrajzi és -rendszertani tevékenysége folytán (21. 29. 31—32), G. DON (1), TRIANA-PLANCHON (2), H. BAILLON (7) és JOHN DONNEL SMITH (19) korábbi adataival együtt a *Marcgraviák* címén 39-re, a *Norantea*-én 30—31-re és *Ruyschia-Souroubea*-én² 16-ra emelkedett.

¹ A *Marcgraviaceae* leveleiben, miként folytatólagos vizsgálataim alkalmával tapasztaltam, nem is oly ritkán fellépő mycelium-fonalak kérdését SOLEREDER id. h., PAOLI (28)-ra való hivatkozással, fölveti. Közel jövőben kiadandó nagyobb *Marcgraviaceae*-munkálatomban erre a kérdésre is kiterjeszkedem.

² A fajokban gazdagabb *Souroubea*-nemzetség a mindössze 3 fajjal szereplő *Ruyschia* (*R. clusiaefolia* JACQ., *R. sphaeradenia* DELF., *R. platyadenia* GILG)-tól különválasztandó, mert, szemben az angol felfogással (3. I. 181 és Kew. Index), ez a helyesebb (9. 18 stb).

Bécs K. K. Naturhistorisches Hofmuseumának növénytani osztályában, részint a bécsi tud.-egyetem növénytani intézetében hajtottam végre az isomorph Marcgraviaceák majd minden¹ fájára kiterjedő összehasonlító alkattani és származástani vizsgálataimat 1915. március—július folyamán, a Magyar Nemzeti Múzeum, a Berlin-dahlemi botanikus muzeum, BARBEY «BOISSIER-herbariumának» (Chambésy) és az utrechti tud.-egyetem vonatkozó anyagának teljes felhasználásával.

Hofrat Prof. dr. v. WETTSTEIN a tud.-egyetem, Hofrat u. Intendant dr. v. STEINDACHNER valamint dr. ZAHLBRUCKNER SÁNDOR növényt. oszt.-fő és t. barátom a Naturhistor. Hofmuseum részéről nagy hálára köteleztek az által, hogy engem tudományos segédeszközökkel ellátni méltóztattak Bécsben. Meg kell emlékezni a jenai ZEISS-cég bécsi képviselőjének nagy előzetekénységéről is, amidőn módját ejtette annak, hogy elsőrendű mikroszkopiumával állandóan rendelkezhessem.

Prof. dr. ENGLER ADOLF titkos fő-kormánytanácsos s Prof. dr. DIELS LUDWIG Berlin-dahlemi botanikus múzeumi igazgatóknak, BEAUVERD GUSTAVE, a BOISSIER-BARBEY-herbarium (Genève-Chambésy) conservatorának, Prof. dr. PULLE (Utrecht), Prof. dr. WENT (Utrecht), Prof. dr. MOLL (Groningen) és dr. FILARSZKY NÁNDOR udv. tan., m. n. muz. oszt. igazgató uraknak a tőlük elkért vizsgálati anyag, illetőleg irodalmi művek liberális megküldéseért tartozom őszinte köszönettel.

Berlin, Budapest és Chambésy gyűjteményeinek Marcgraviaceái között bukkantam néhány, származástaniilag rendkívül érdekes újdonságra.

Ezekről, valamint a Marcgraviaceae egyéb sajátosságairól való részlet-tanulmányaimat, a «Math. és Természettud. Értesítő» adott korlátjai szerint, megkivánt rövid szövegezéssel, sorozatosan mutatom be a Tek. Akadémiának.

Jelen közleményeim, Hollandiában tavaly (1914) eltöltött

¹ Egy-két (unicum-szerű) fajnak a megvizsgálásáról, London, Kew és Páris gyűjteményeinek ma teljes hozzáférhetetlensége miatt, ez idő szerint le kell mondanom. Hollandus és svájci tudós barátaim úgynevezett «semleges» közvetítése ezúttal csaknem sikertelen volt.

békés munkaidőm elmúltával, Budapest, Bécs és Berlin szoros összeköttetésének az útját jelzik és a lelket-testet pusztító világ-háború jegyében állanak.

Naponként elpanaszoljuk, számos külföldi útjaimon tapasztalom, hogy mennyire nem ismerik a magyarság szép földjét s rajta, a nyugat-európaihoz képest sokkal nehezebb viszonyok közt megnyilatkozó közművelődési törekvések valódi képét, aminek kizárólagos s talán soha le sem küzdhető akadály a turáni magyar nyelv teljes elszigeteltsége az indogermán nagy közművelődési mozgalmak piacán.

A magyar tudományos növénytan voltaképeni megalapozói közül DORNER és a ma is közöttünk élő SCHUCH JÓZSEF neve, akinek classicitását JULIUS VON SACHS világhíres növénytani könyve mindenha megőrzendi¹ és aki után nem kisebb férfiú, mint maga HUGO DE VRIES ismételtén a legmelegebben érdeklődött, amidőn én őt Amsterdamban meglátogattam (1897, VII. 13; 1914. VII. 27), a feledés homályában őrlődik.

Főleg a magyarság minden téren nagy küzdelmének kívánok emléket állítani jelen közleményeimmal s a Magyar Tud. Akadémia útján a messze földeken, amidőn a törülmetszett magyarság természettudományiakban is fényes elméinek a nevét viselendi Amerika egy-egy örökkön zöldelő *Norantea*-ja.

Az egyiket Berlin, a másikat Budapest világhíres növénygyűjteménye szolgáltatja. A berliniből és a Chambésy-ben őrzött «BOISSIER-BARBEY-féle herbariumból azokon felül kikerült egy-egy novitas elnevezésével pedig Berlin és Bécs iránt tartozó hálámat fejezem ki, hol a természettudományiakban felhalmozott nagy kincsek bűvárlatát évtizedek óta zavartalanul végezhe-

¹ J. v. SACHS: *Lehrbuch der Botanik*. Aufl. IV. 1874. p. 361. Főleg a magyar tudományosság örök vesztesége, hogy SCHUCH úttörő munkája, a mely a magyar bryologiai tudományosság terén (amit megkülönböztetni kívánok a nálunk újabban fellendülő bryographiai irodalomtól) mindmáig első s utolsó, meg sem jelenhetett. Azóta sincs bryologusunk; ehhez fűzött reményeim, GOEBEL organographiájának a Mohákról való kötete szellemében, úgy látom, hogy nálunk ezentúl sem válnak valóra.

tem s ahol természettudományi törekvéseim mindig jóindulatú megértésre találtak.

Ezekre vonatkozó vizsgálati eredményeim összefoglalásában lehetőleg új csapáson haladok, amely, főleg az adatok csoportosításában, a maradi sablontól eltérő.¹

Korszerű rendszertani buvárlatokban ugyanis származástani kapcsolatokat keresünk, a külalaktani (morphologia s. str.) hasonlóság és különbözőségein kívül főleg a belső szerkezetben, vagyis az egyes physiologiai-anatomiai rendszerek részéről megnyilatkozó jellegek lehető pontos mérlegelésével, — tehát oly vizsgálati módszerek alkalmazásával, amelyek önként értetődőleg meghaladják a

¹ E tekintetben utalok egyik francia barátom, PAUL PARMENTIER «L'espèce végétale en Classification Naturelle» (Extrait du Monde des Plantes, 1898) czímen megjelent cikkére.

PARMENTIER talán az egyetlen botanikus a francziák között, aki a legalaposabban megértette VESQUE classicitását és én sohasem felejtettem el azokat a könnyeket, amiket Besançonban ejtett akkor, amikor személyben a magyar földről toppant eléje az a botanikus, aki — in illo tempore — Münchenből csak azért ment Párisba (1892), hogy első sorban JULIEN VESQUE oldala mellett búvárkodhassék. — PARMENTIER idézett cikkének mélyen járó gondolatait az azóta leperdült 18 év csak megérlelé s ma alig akadhat korszerűen gondolkodó botanikus, aki lényegében ne helyeselné az idézett cikk következő conclusióját:

1. *Espèces primaires ou réelles.*

(Déterminées à l'aide des caractères morphologiques et anatomiques).

- | | |
|---------------------------------|--|
| 2. Espèces morphologiques. | 2. La plupart des espèces des floristes. |
| 3. Sous-espèces morphologiques. | 3. Sous-espèces proprement dites. |
| 4. Races. | 4. Races. |
| 5. Variétés. | 5. Variétés. |
| 6. Variations. | 6. Variations. |

A jelen cikksorozaton át szem előtt tartani kívántam az *Espèces primaires* (ou réelles) adott követelmeit, bár mindmáig fennáll PARMENTIER kezdő mondatának következő igazsága: Les botanistes sont très loin d'être d'accord sur la définition de l'espèce.

pusztá növényleírásokban (diagnosis) ismeretes eljárás linnæusi primitivumát.

Különösebben szem előtt tartottam CASIMIR de CANDOLLE a kétszikűek levélanatómiáját nagy vonásokban tárgyaló munkálatának bevezető sorait: «La structure interne de la feuille — úgymond CAS. de CANDOLLE (8. 427) — offre une bien plus grande diversité, que celle de la tige et son étude mériterait certainement de fixer l'attention des anatomistes.»

Elvégre nincs is a növény testén életműszer,¹ avagy szerv (organum), mely szöveti kiválásához fűződő funkciójának nagy változatossága mellett oly annyira ki volna téve a létért való küzdelem ezer eshetőségének, mint a levél (folia plantarum), jóval fokozottabb mértékben az állandóan zöldelő (úgynevezett örökzöld) növényvilág részéről a Tértítők között (plantæ semper-virentes).

Ehhez mérten nyilatkozik meg a levelek alkattani tekintetben való legnagyobb változatossága is, — a szárhoz képest hasonlíthatatlanul nagyobb mértékben, amire tárgyunk körébe vágólag nyomban egy igen jellemző példára hivatkozhatom.

A Rhizophoraceae rendszertanilag távol esik a Marcgraviaceae-től; az isomorph Marcgraviaceák között nincs egyetlen példa sem olyan, amelynek mesophyllumbeli sklereidjei a *Rhizophora conjugata* SOLEREDER (22. fig. 74 A) adta képével formailag vonatkozásba lennének hozhatók, hacsak mechanikai jelentőségük szerint nem. Ellenben a *Rhizophora Mangle* szárbeli kérgének WARMINGTÓL lerajzolt sklereidjeiben (22. fig. 74. B) lehetetlen fel nem ismernünk a *Norantea Eötvösorum* hasonló példájának csaknem «szószerinti» megismétlődését (Tab. IV. fig. 17). Viszont a levél-, illetőleg a szárbeli sklereidek közötti eltérés is szembeötlő, a *Rhizophora* esetében éppen úgy, miként a *Norantea*-ében. A «mechanikai hivatás» formája bizonyára egyszerűbb a szárban és a sklereidek kisebb-nagyobb mértékű «conformitása»

¹ Tudásom szerint ezzel a jó mesterszóval JÓKAI élt először «Egy magyar nábob»-jában, mely megérdemeli a tudományban való általános használatát a rosszabb «szerv» (organum) helyett.

is ehhez mérten alkalmazkodik. A *Rhizophora Mangle*, Dél-Amerika tropusainak jellemző Mangrove-fája, a *Noranteák*kal egy-azon klíma-övben él, a belső szervezetben kialakuló s a létért való küzdelemben jelentős sklereidjeinek szerepe hasonló s a szárban megnyilatkozó bizonyos mértékű alaki megegyezés meg éppen az azonos mechanikai hivatás kiváló bizonyítéka.

A DE CANDOLLE mondásában rejtőző igazság engem nevezetes származástani kapcsolatoknak, mondhatnám, hogy megdönthetetlen megállapítására vezetett az isomorph Marcgraviaceák vizsgálata közepette és én tapasztalatokat, főleg a sklereidék köré csoportosítottan, teljes mértékben fel is használok Marcgraviaceabeli novításaim jellemzésében.

Alig megingatható meggyőződése, hogy mikroskopium nélkül nyert úgynevezett származástani kapcsolatok kimutatása, pusztán floristikai-organographiai alapon: kártyavár, mely az első mikroskopiumi készítmény alkattani analysisével rögtönösen össze is omolhatik.

Annak idején (esetleg idegen) nyelven bemutatandó nagy munkálatom számos eredményével igazolni fogom e tétel helyességét a növényvilág részéről, hogy kimutassam, hogy a sűrűn és a követett (species-systematikai) vizsgálati módszer könnyűségénél fogva gyorsan is készülő «monographiák» csupán a növények meghatározására alkalmas gyakorlati célt szolgálhatják kisebb-nagyobb haszonnal, — ellenben a származástant, elvégre a korszerű rendszertan fundamentalis segédtudományát csakis kétes értékű eredményekkel. Ez utóbbiak útja ugyan rövidebb és testes köteteket eredményezhet. Az előbbi hosszabb, jóval fáradtságosabb, de annival gyökeresebb az általános tudományosság szempontjából, amit — értem ez alatt a növényvilág tagjainak kivétel nélküli mikroskopiumos bűvárátát — származástani kapcsolatok kutatásánál egyáltalában nem is mellőzhetünk, ha csak nem a kizárólagosan alaktani vizsgálatokból vont egyoldalú következtetések kárára.¹

¹ Az edényes kryptogam növények részéről a «Math. és Természettud. Értesítő» XXIX., XXX. és XXXI. köteteiben, valamint a «Mathem. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn» cz. kiadvány XXX. és

Tanulmányaim sorozatát a *Norantea Eötvösorum*-mal kezdem meg és a fent érintett tétel tanulságos igazolásául az alkalmas példát e helyt belőle is meritem, ama vizsgálati eljárásom ismertetésével, amelyről úgy vélekedem, hogy, főleg a sklereides levelek fejlődésmechanikai és összehasonlító alkattani búvárlatánál, másoknak is követni kell; különben hamis képeket kapnak és a belőlük vont következtetések ipso facto helytelenek.

RUIZ e Vitoc-mellőli új *Norantea*-ja, az összehasonlító alkattani vizsgálatokra alkalmas részleteknek a levél-lemezből való kimetszése (Tab. I, fig. 1a, $x-x$, $i-i$) után nyomban elárulja, hogy még alkattanilag sem áll semmiféle közelebbi kapcsolatban a BOISSIER-herb.-beli (PAVON-féle) «*Marcgravia macrocarpa*»-val, tehát a *Norantea macrocypha*-val (Tab. I, fig. 8, $x-x$, $i-i$).

A Marcgraviaceák lehetően valamennyi isomorph tagjára kiterjedő s igen beható alkattani vizsgálataim alkalmával jöttem arra a tapasztalatra, hogy a \pm sklereidekkel terhelt levelek szerkezeti képeről, főleg a sklereidek esetleges mechanikai szerepét

XXXI. köteteiben megjelent phylogeniai *Schizaea*-közleményeimben igyekeztem az arra való példát megadni, — a most folyamatos cikk-sorozatban pedig az edényes virágos növények részéről.

A jól-rosszul úgynevezett sejtes kryptogam növények vizsgálatában ugyanis a mikroskopium használata «subintelligitur,» — és ma igen jól megérthetjük, hogy LINNÉ, miként BECKMANN írja az ő *Schwedische Reiseberichte*-ben, «miért is nem igen szeretett a kryptogam növényekről beszélni.» A világ kereke azóta nagyot fordult és a korszerű systematikus a magasabbrendű növények vizsgálatában ma nem zárkozhatik el a mikroskopium elől, valamint a növényföldrajziakban sem, amire classikus például nem győzöm elégszer SCHIMPER *Pflanzengeographie auf physiologischer Grundlage* cz. nagy művét idézni.

E nélkül minden munkálkodásunk csupán katalogizáló, ama bizonyos «első lépés» a tudományos búvárkodásban, melynek hasznát legkevésbé sem tagadom, mert dőre dolog is volna lekicsinyelni — bár sokan megteszik — a «téglavető» munkáját. Csupán sürgetem, hogy a haladás további lépéseitől se húzódozzanak a jobbra hivatottak, a tehetségesebbek. Így lesz a «sok téglából» esetleg «építészeti műredek», — a rengeteg (és sok rossz *Hieracium-Rubus*-szal telített) «enumeratio» helyett biológiai növényföldrajz Magyarország földjéről.

illetően, csakis úgy nyerhetünk helyes fogalmat, ha a mikroszkopiumi vizsgálatra szánt metszeteket két irányban ejtjük meg.¹ A metszés egyik iránya keresztezi és pedig 90° alatt az elsődleges ért úgy, amint azt a Tab. I, fig. 1a $x-x$ -szel jelzem. A metszés másik iránya éppen az ellenkező, ugyanis az elsődleges érrel parallel, amit viszont $i-i$ -vel jelzek a Tab. I, fig. 1a képen; például librosklereidek esetében csakis az ez irányú metszetek (Tab. I. fig. 8 $i-i$) nyújtanak egyetemleges képet a sklereidek összegeről. Ellenben a más fajtájú sklereidek tekintetében lehet közömbös a két metszési ($i-i$, $x-x$) irány, amikor is arról győződhetünk meg, hogy a levél a maga szerkezetében (struktúrájában) minden irányban \pm egyöntetű (homogen). Világos azonban, hogy a levélszövet egyöntetűségének a megállapítása okából is követnünk kell a két metszési irányt.

Ebben a tekintetben nyert tapasztalataim további megerősítésére szolgálhat a levélperem (szegély)-ből vett oly metszet, melynek metszési síkja viszont a levél oldalélét mindig 90° alatt érje (Tab. I, fig. 1a, $a-b$). Szorosabban a levélperem szöveti szerkezetét csakis a jelzett irányú metszetek tüntetik fel helyesen, amire anyival inkább ügyelnünk kell, mert egyébként aligha kerülhetjük ki a sejtek, sőt a sklereidek úgynevezett deformációs képeit.

Éppen azért, mert a biológiailag is fölötte érdekes Marcgraviaceae sklereidjeinek oly részletes tanulmányát hajtottam végre, amelynek megközelítő példája az egész világirodalomban legfeljebb BRISI *Eucalyptus*-tanulmánya (17); alighanem igen hatá-

¹ Minthogy vizsgálataim céljaira csupán az a csekély, de annyival becsesebb s alkoholban őrzött anyag állott rendelkezésemre, amit a Berlin-dahlemeri botanikus múzeum igazgatósága küldött meg nekem Bécsbe; túlnyomó részben Budapest (M. N. Múz.), Bécs (Hofmus.), Berlin (Kgl. Botan. Mus.), Chambésy (BOISSIER-Barbey) és Utrecht (Universiteit) herbariumi anyagára valék utalva.

Úgy tapasztaltam, hogy a sokszor 100 éven felüli száraz levél megfelelő darabkáit a víz és glicerin 4 : 1 arányú elegyében körülbelül 10–15 percre felforralva, szövettani vizsgálatra igen jól használható metszeteket nyerhetünk. Mikrotomikus metszetek céljaira ellenben célravezetőbbnek látszik a vizsgálati anyagnak a c t o p h e n o l l al való előzetes kezelése, amire NEUMAYER HANS botanikus bűvartársam szíves előzékenysége tanított meg engem Prof. WEITSTEIN laboratóriumában.

rozottan fejezhetem ki azt a véleményemet, hogy amit például a levélbeli sklereidekről tudunk, a legnagyobb mértékben fogyatékos, valósággal elemi ismeret s a kritika nélkül követett vizsgálati eljárás miatt fölöttébb ingatag.

Az irodalomban egyetlen példát sem találok a levélbeli sklereid pontos képeré, kevésbbé tüzetes magyarázatára. A vizsgálatok e czímen kínálkozó tere, mondhatnám, hogy beláthatatlanul nagy. A \pm liánszerű Marcgraviaceae szárbeli sklereidjeit illetőleg csupán néhány főbb adat közlésére szorítkozhatom, részint azért, mert e tekintetben bőséges vizsgálati anyagra volna szükségem, szemben a herbariumok nyújtotta s nagy kiméletet igénylő csekély anyaggal. Búváraink azonban, főleg egy dél-amerikai biológiai állomás (Blumenau!) hiányában, emberileg belátható időn belül jobbadán az utóbbira vannak és lesznek utalva; a vizsgálati anyag köteles kimélete vezetett rá egy oly vizsgálati módra, amit, J. W. MOLL, a groningeni nagy mester intelmét¹ megfogadva, jónak látok röviden érinteni.

Előrebocsájtom, hogy a sklereideknek a liánszerű (hol kúszó, hol kapaszkodó: 9. 215—16: *Frutices radicante-repentes, scandentes vel epiphyticae*) szárban való vizsgálatát nem annyira a szokásos (kereszt-, érintői s sugár-) irányokban való metszetek, mint inkább a SCHULZE-féle keverék egy bizonyos módjának óvatos alkalmazásával hajthatjuk végre célirányosan.

A WITTMACK adta leírások során ugyanis figyelmemet megragadta az «epidermide ramorum... sæpius subsoluta» (9. 215—16) kifejezés s én, ennek a nyomán, a szárnak sokszor minimalisan kicsi (átlag 3 mm h.) darabkáját tettem körülbelül 0.5 cm³ salétromsavba s hozzá 3—4 szemernyi chlorsavas kaliumot. Mindez a kémlőcsőben igen óvatosan forralandó fel, mert könnyen megesik, hogy a vizsgálandó anyag a szabad szemre nyomtalanul el is tűnhetik. Gyakorlat dolga ama pillanat ellesése,

¹ «A szerzők közül sokan, úgymond MOLL «Die Fortschritte der mikroskopischen Technik seit 1870» című összefoglaló művében (Progressus rei Botanicae Bd. II, Heft 2, p. 290), elhanyagolják a követett vizsgálati módszer közlését; avagy, ha megesik, teszik ezt oly fogyatékosan, hogy eredményeik közelebbi megvizsgálása saját módszerük szerint lehetetlen, vagy igen nehéz.»

amidőn — például a *Nor. macroscypha* esetében — a hengerded szár darabkáiról külön-külön köpenyként válik le a *N. macroscypha*-ra alkattanilag is igen jellemző 1. epidermis, melynek alatta a sklereideknek csupán «lenyomatai» észlelhetők, — 2. a kéregrészlet a fatesttől, sklereidjei topographiai képének változatlanságával. Érdekes, hogy a *N. Eötvösorum* részéről a jelzett két réteg együtt marad, anélkül, hogy ezáltal a sklereidek elhelyezkedésében a mikroszkopium alatt feltáruló kép megzavartatnék, ami a két faj epidermisének fajlagosan különböző alkattani szerkezetében leli magyarázatát.

Már e két *Norantea* szárbeli sklereidjeinek topographiája arról győzött meg engemet, hogy a húzási, valamint a hajlékonysági szilárdság (SCHWENDENER-féle) elvei szempontjából kísérletileg is mélyreható s megfelelő eredményekre vezethetne azok tüzetes tanulmánya. Viszont tapasztaltam, hogy a levél és a szár sklereidjei között bizonyos viszonyosság (correlatio) áll fenn, amit a jelzett *Noranteák* tárgyalása során fogok kifejteni.

Csupán e téren nagy távlat nyílik meg a physiologus, anatomicus és a fejlődés-mechanikai törvényeket szemmel tartó systematikus előtt, melynek szolgálatába szegődhetnek — hisz új gondolat kiépítéséről van szó! — egy «tudományos iskola».

A M. Tud. Akadémia tagjaként kötelességszerűleg jelzem az eszmét.

Tekintve azt, hogy JUEL (14) alapvető értekezésében az isomorph Marcgraviaceák egyetlen képviselője a *Norantea brasiliensis* és hogy úgy az ő, valamint az én korábbi Marcgraviaceadolgozatom (24) voltaképeni alkattani anyaga a dimorph Marcgraviaceák köré csoportosul: ezúttal közzéteendő cikksorozatom egyszersmind isomorph Marcgraviaceák összehasonlító alkattani ismeretének jelentékeny gyarapodását jelenti.

B) A vonatkozó irodalom összefoglalása.

1. DON, G., A General System of Gardening and Botany. London, 1831. Vol. I.

2. TRIANA et PLANCHON, Prodromus Florae Novo-Granatensis, ou Énumération des Plantes de la Nouvelle-Grenade. — Ann. Sc. Natur. Sér. IV. Tome XVII, 1862. p. 319.

3. BENTHAM et HOOKER, Genera Plantarum. Vol. I—III. Lond. 1862—83.
4. DELPINO, F., Rivista monografica della famiglia delle marcgraviacee precipuamente sotto l'aspetto della biologia ossia delle relazioni di vita esteriori. — Atti della Società Italiana di Scienze Natur. Vol. XII. 1869. Milano. pp. 179—213. (DELPINO dolgozatát WITTMACK Fl. Bras. l. c. Ulter. osservazione etc. czímén idézi, amely lényegében azonos tartalommal a Nuovo Giorn. Botan. Ital. Vol. I. 1869. Firenze. Fasc. IV. 257—290. l.-on is megjelent.
5. DELPINO, F., Funzione mirmecofila nel Regno Vegetale. — Prodrómo d'una Monografia delle piante formicarie. In Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Ser. IV-a Tom. VII. Bologna, 1886. p. 304. Famiglia delle Marcgraviaceae.
6. BUCH, OTTO, Ueber Sklerenchymzellen. Diss. Breslau, 1870.
7. BAILLON, H., Stirpes exoticae novae. — Adansonia, Tome X. 1871—73. p. 241.
8. DE CANDOLLE, CASIMIR, Anatomie comparée des fevilles chez quelques familles de Dicotyledones. — Mémoires de la Soc. de Physique et d'Hist. Natur. de Genève. Tom. XXVI. Genève. 1878—79.
9. WITTMACK, L., Marcgraviaceae: in Flora Brasil. Vol. XII. 1878. Pars I. Fasc. LXXXI. pp. 213—58, tab. 40 51.
10. WITTMACK, L., Marcgraviaceae, in Verh. Botan. Ver. Prov. Brandenburg, Bd. XXI, 1879, p. 42.
11. MÜLLER, KONRAD, Vergleichende Untersuchung der anatomischen Verhältnisse der Clusiaceen, Hypericaceen, Dipterocarpaceen und Ternstroemiaceen. — ENGLER's, Botan. Jahrb. Bd. II. (1882). pp. 430—64.
12. BLENK, P., Ueber die durchsichtigen Punkte in den Blättern. — Flora. Neue Reihe. XLII. Jahrg, 1884. pp. 49, 97, 136, 204, 223, 275, 291, 339, 355, 371.
13. HITZEMANN, CARL, Beiträge zur vergleichenden . . . der Ternstroemiaceen etc. Diss. Kiel, 1886.
14. JUEL, H. O., Beiträge zur Anatomie der Marcgraviaceen. Mit 3 Tafeln. — Bihang till k. Svenska Vet. - Akad. Handlingar, Bd. XII. Afd. III. No. 5. — Stockholm. 1887.
15. TSCHIRCH, A., Angewandte Pflanzenanatomie, Bd. I. Wien—Leipzig, 1889.
16. WIJNAENDTS-FRANCKEN, CORN. JOH, De Sclereïden. Diss. Utrecht, 1890.
17. BRIOSI, Anatomia dell' foglie *Eucalyptus globulus*. Milano (Ist. Bot.) 1891. 4. 95 p. c. 23. Tav. — Refer. in. Botan. Centralbl. 1892, I. p. 317—19.
18. SZYSZYLOWICZ, IGN., Marcgraviaceae, in ENGLER-PRANTL: Natürl. Pflanzenfamilien, III. Teil, Abt. 6 u. 6a. Leipzig, 1895. pp. 157—164, mit 23 Einzelbildern in 5 Figuren.
19. SMITH, JOHN DONNELL, Undescribed Plants from Guatemala and

other Central American Republics XIX. — *Botanical Gazette*, Vol. XXIV. No. 6. 1897.

20. GOEBEL, K., *Organographie der Pflanzen insbesondere der Archegoniaten und Samenpflanzen*. Teil. I. Jena, 1897—98.

21. URBAN, IGN., *Plantae novae americanae imprimis Glaziovianae*. — *Marcgraviaceae*, auctore E. GILG, in *Beiblatt zu d. Botan. Jahrb.* Bd. XXV. (1898), Heft 3. pp. 25—35.

22. SOLEREDER, HANS: *Systematische Anatomie der Dicotyledonen*. — Stuttgart. 1899.

23. SOLEREDER, HANS, *Ergänzungsband*. — Stuttgart, 1908.

24. RICHTER ALADÁR, *Adatok a Marcgraviaceae és az Aroideae physiologiai-anatomiai és systematikai ismeretéhez*. — *Beiträge zur physiologisch-anatomischen Kenntniss der Marcgraviaceen und Aroideen*. — *Természettudományi Füzetek* XXII. (1899) köt. 27—87. I. Tab. II—V. Budapest.

25. POULSEN, V. A., *Nogle Anatomiske Studier*. — *Videnskabelige Meddelelser fra den naturhistoriske Forening i Kjobenhavn for Aaret 1902*. pp. 231—48. Hertil Tavle IX—XII.

26. PITARD, M., *Caractères anatomiques généraux des Ternstroemiacees*. — *Actes de la Soc. Linnéenne de Bordeaux*, Vol. LVII. (1902). Sér. 6. Tom. VII. pp. LXXI—LXXIV.

27. PITARD, M., *De la classification des Marcgraviées*. — *Actes de la Soc. Linnéenne de Bordeaux*. Vol. LVIII. (1903). Sér. 6. Tom. VIII. pp. CCXL—CCXLIII.

28. PAOLI, GUIDO, *Contributo allo studio della eterofilia*. (Con due tavole). — *Nuovo Giornale Botanico Italiano*. Nuov. Ser. Vol. XI. (1904). pp. 186—234.

29. PILGER, R., *Beiträge zur Flora der Hylaea nach den Sammlungen von E. ULE*. Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen herausgegeben von R. PILGER. — *Verhandl. d. Botan. Ver. d. Prov. Brandenburg*. Jahrg. 47, 1905 (1906) p. 155. R. PILGER: *Marcgraviaceae*.

30. URBAN, IGN., *Vitae Itineraque collectorum botanicorum*. *Notae collaboratorum biographicae etc.* — in *Flora Brasil*. Vol. I. Pars I. Fasc. CXXX. (ultimus), Monachii, 1906.

31. URBAN IGN., *Plantae novae andinae imprimis Weberbauerianae* IV. — E. GILG: *Marcgraviaceae Americae tropicae*. — In *Engler's Botan. Jahrb.* Bd. 42 (1909) p. 124.

32. SODIRO, ALOYS S. I., *Plantae Ecuadorenses* III. — *Marcgraviaceae*, auctore E. GILG, in *Beibl. zu d. Botan. Jahrb.* Bd. XXXIV. (1907), Heft 4.

33. PEKELHARING, NIC. RUTG., *System.-Anatom. Onderzoek van den bouw der Bladschijf in de Familie der Theaceae*. — *Diss. Groningen*, 1908.

34. JUNK, W., *Bibliographia Botanica*, in *Dörfler's Botaniker Adressbuch*, Ed. III. 1909. Wien.

I.

Norantea Eötvösorum AL. RICHT.

GILG berlini botanikus az ő *N. macroscypha*-ja (H_1 , H_2)¹ leírásához fűzött megjegyzésében hangoztatja, hogy e *Norantea*, amely a berlini botanikus muzeum herbariumában «*Marcgravia pentapetala* (H_1 , in Peruvia ad Chacahuai: Ruiz l. 1787)» néven szerepel; ugyancsak Peru-ból, de PAVON-tól eredőleg (H_2 : sine loco certiore!) megvan BOISSIER-BARBÉY (Chambésy) herbariumában is, de «*Marcgravia macrocarpa*» név alatt H_2 (21. 32). Mind a kettőt eredetiben vizsgálhattam meg és megállapíthattam, hogy alkattanilag sem különböznek egymástól.

Annnyival inkább meglepett, hogy a második berlini küldemény Marcgraviaceái sorában egy eredeti Ruiz-féle s igen jól megtartott 121 éves példányt találtam, ugyancsak «*Marcgravia macrocarpa*» néven, de Peru más helyéről («in Peruviae ad Vitoc») és 1794-ből keltezetten Nr. 56 alatt (H_3), amely már levelei eltérő szabásánál fogva az első tekintetre elárulja azt (Tab. I, fig. 1, a—b), hogy Ruiz Vitoc-melléki «*Marcgravia macrocarpa*»-ja teljesen elüt a BOISSIER-BARBÉY (Chambésy)-herb. PAVON-féle «*Marcgravia macrocarpa*»-jától (Tab. I, fig. 7b), következésképp az utóbbival teljesen megegyező «*Marcgravia pentapetala* Ruiz» (in Herb. Mus. botan. Berolin = HB)-tól (Tab. I. fig. 7a). Végeredményben tehát nem *N. macroscypha* GILG (21. 31).

Az úgynevezett classikus idők egy régi növény-példányáról van szó, melynek elbírálásánál különösebb súlylyal bírhat G. Don 1831-ben Londonban megjelent «*A General System of Gardening and Botany*» című nagy műve I. köt.-ének (1. 625) következő passusa, mely a «*Norantea macrocarpa*» leírását adja:

¹ A vizsgálat tárgyát tevő herbariumi példákat a szöveg végén I. B) fejj. alatt sorolom fel: H_1 , H_2 ... a szövegben foglalt hasonló jelzéseknek felelnek meg.

11. *N. macrocarpa*; leaves obovate-oblong, mucronate, on short petioles; flowers corymbose, terminal; pedicels long; petals reflexed; fruit large. S. Native of Peru.

Marcgravia macrocarpa Ruiz et Pav. Fl. per. 5. t. 436.

Large-fruited *Norantea*. Shrub.

Tehát újból egy Ruiz-Pavon-féle *Marcgraviacea* bukkan fel «*Norantea (Marcgravia) macrocarpa*» néven, mely nevezetről Gilg úgy vélekedik, hogy az ugyancsak G. Don-tól fogyatékos rövidséggel leírt «*Norantea obovata*» G. Don-val (1. 625) együtt talán a *Norantea macroscypha* Gilg synonymonjánál nem egyébb (21. 32).

E kérdés eldöntésében, tekintve amaz idők diagnosisainak linnæusi rövidségét, perdöntő volna Don, Ruiz-Pavon illustrációs munkálatából való idézete.

Ruiz et Pavon *Flora Peruviana et Chilenses* 4-kötetes, 1798—1802-ben 1—425 fol. táblával megjelent ritka nagy művéről viszont Junk, aki ma a legkiválóbb természet-historiai bibliographus, azt írja, hogy «Un des plus rares livres de la littérature floristique. Surtout le 4. volume qui n'existe qu'en très-peu d'exemplaires est devenu introuvable. PRITZEL: Editio eximii operis post III. tomum interrupta neque iterum suscepta est. In uno (!) DELESSERTIANO exemplo adduntur 100 tabulae tomi IV. ineditae, sign. 326—425; titulus cum indice manu scriptus est» (34. 229).

Bécs császári udv. könyvtárában csak az I—III. kötet van meg és a fenti idézetből kitetszőleg, valamint PRITZEL *Thesaurus Lit. Botan.* szerint, a IV. köt.-tel megszakad a sorozat.

Hogy G. Don mindamellett az V. köt. 436. táblájára hivatkozik, úgy magyarázható, hogy kiadatlanul látta az V. köt. kéziratát és eredeti lapjait, amelyek London-Kew-ban esetleg most is megvannak. Legalább erre vall a JACKSON *Kew-Index*-ének III. fasc. 317. l.-n olvasható «*N. macrocarpa* G. Don,» l. c., amit ő id. h., valamint WITTMACK (9. 221), a *Marcgravia rectiflora* TRIANA et PLANCHON-val, a *Marcgraviák* egyik legjobban ismert fajával egyesít.

JACKSON, mint a Kew-herbarium egyik tudós tisztviselője, engem ismételten megtisztelt személyes barátságával Kew-ban; utóbb Londonban, mint a «*Linnean Society*»

titkára. E tisztségeiben oly bibliographiai forrásokkal rendelkezhetett, mint kivülről senki más a világon. A Kew-Index sok más tévedése mellett is, miután ez esetben másra amúgy sem építhetünk, úgy vélekedem, hogy a G. DON-féle «*Norantea* (*Marcgravia*) *macrocarpa*» egyesítését a *Marcgravia rectiflora*-val, már WITTMACK lelkiismeretes munkálatára való tekintettel is (9. 221), helyes basisul el kell fogadnunk.

Ismeretes azonban, hogy a *Marcgravia* az egyetlen valamennyi Marcgraviaceae-beli nemzetség között, melynek felemáslevelűsége a sarjak ortho- és plagiotropia-jával együtt jár (Tab. IV, fig. 21 a—b).¹ Ellenben a többi Marcgraviaceabeli nemzetség (*Ruyschia*, *Souroubea*, *Norantea*) fajainak levelei mind egy alakúak. A levelek ez isomorphiája jellemzi Ruiz Peru-Vitoc-beli «*Marcgravia macrocarpa*»-ját is, melyről egyébként rögtönösen könnyű megállapítanunk azt, hogy a nemzetségbeli kapcsolaton (affinitas generum) kívül teljesen távol áll a *Marcgravia rectiflora*-tól. A meddő (plagiotropikus) és a termő (orthotropikus) ágak leveleiben megnyilatkozó kétalakúság (Tab. IV, fig. 21 a—b) még a termő (virágzó) ágak részéről (Tab. IV, fig. 21 a) sem ejtethet zavarba; nagyságában és alakilag egyaránt elüt az a mi *Norantea*-inktől (Tab. I, fig. 1 a—b).

További fejtegetéseim körében egyedül a BOISSIER-herbarium «*Marcgravia macrocarpa*»-ja maradhat meg, jelentékeny alak-tani (Tab. I, fig. 7b) eltérése kívül főleg annak a tanulságául, hogy a levéldarabkáknak mikroszkopiumi vizsgálatra alkalmas kimetszése egymagában rögtönösen is útba igazíthat a tekintetben, hogy librosklereides² Marcgraviaceával van-e

¹ «...: folia dimorpha in genere unico (*Marcgravia*).» WITTMACK: 9. 215—16. — RICHTER AL. 24. 28.

² Astrosklereid (15. 302) analogiájára alkotott új mesterszó (liber = háncs, σκληρός = kemény, Sclereid: 15. 300), az astro (ἄστρον = astrum = csillag)-sklereidektől alakilag teljesen elütő oly sklereidek megjelölésére, amelyek háncsrostszerű rendszerint igen hosszú nyulványai, esetleg egy-egy bracheidszerű központi test karjai gyanánt, különlegesebben egy irányban haladnak, voltaképp tehát stereidek is volnának (Tab. II, fig. 9 lsk; Tab. IV, fig. 18, 20 lsk). Az astro-sklereidek (csillagos kemény sejtek) nyulványai átlagosan jóval rövidebbek, következésképp zömökebbek s \pm a test kiterjedésé-

dolgunk, avagy olyannal, amely sklereidekkel (de minden esetre más alkotásuakkal) terhelten, a v a g y anélkül, szerkezetileg minden irányban egyformán viselkedik, azaz «szerkezetileg közömbös».

Legyen Tab. I, fig. 8. ábrában a *co—md* a levélbeli főér (*costa mediana*), melyből 1-gyel jelzetten ered az elsődleges ér (*nervus primarius*), az *i—i—x—x*-szel jelölt szelet fog megfelelni a Tab. I, fig. 1a hasonló jelzésű darabkáinak, illetőleg metszésbeli irányainak. Történjék e levéldarabkáknak a jelzett irányokban való kimetszése valamely oly késsel, vagy ollóval, mely csupán a szó köznapi értelmében élezett, akkor a «librosklereides *Marcgraviaceák*» részéről mindig azt fogjuk tapasztalni, hogy az elsődleges erezetet keresztben érő (fig. cit. *x—x*) metszési sík pillás (*ciliatus*) a levél húsból \pm kinyulakodó sklereidbeli nyulványok következtében (Tab. I, fig. 8. *x—x*), — ellenben sima a sklereidek tekintetében «szerkezetileg közömbös» *Marcgraviaceák* részéről (Tab. I, fig. 1a *x—x*).

A metszésbeli sík (lap) mindig sima a ffig cit. *i—i* irányvonalában, tehát az elsődleges erezettel parallel, még a «librosklereides» esetekben is (Tab. I, fig. 8 *i—i*), annak a jeléül, hogy a rendszerint hosszúra nyúlt sklereidek nyulványakkal az elsődleges erezet irányát követik; ennek, a *Marcgraviaceák* általában «tollas erezetű» leveleiben («*Folia... penninervia...*» WITTM. 9. 215—16), önként értetődőleg meg van a maga nevezetes mechanikai jelentősége.

Vele együtt jár a levél bőrnemű vastagsága (fol. coriacea). Ellenben ha a levél «vékony húsu» (fol. papyracea v. membranacea), legyen a levél lemezében még oly nagy, a librosklereidbeli jelleg hiányát már a kimetszés egymaga elárulja.

nek minden irányában kinyulók (Tab. II, fig. 12 *ask*), rendszerint egy típusos brachysklereid (15. 301)-re visszavezethető központi testtel (Tab. III, fig. 13 *br*). Amennyiben egy ily astro-sklereid minden esetben kinyulakodó karjai háncrestszerűen hosszúak, sőt \pm hajlongók, szorosabban *Ophiurasklereid*-del (csillagosan kigyózdó kemény sejtekkel) van dolgunk és én különbséget teszek a kettő között. Természet-szerűleg mindezek között sok az átmeneti alak; ezek kapcsolatának a kibogozása egyszersmind nevezetes származástani eredményekre vezethet.

Ez utóbbira, a jelen munkát II. részbeli anyagát tevő példák közül jellemző lehet a *Souroubea erauriculata*, az előbbire pedig a *Norantea macroscypha* (Tab. I, fig. 7).

Mindez persze, a szó alkattani értelmében, a jelzett irányú metszetek mikroszkopiumi vizsgálata alkalmával válik még inkább szembetünőbbé.

Minthogy e kérdés részletes kifejtését említettem nagyobb munkálatom számára kell fentartanom, az adott korlátok miatt csupán a két metszetbeli irány sklereidbeli mikroszkopiumi képét állítom szembe egymással, mintegy illusztrálásul ama szaknak, amiket a sklereidbeli vizsgálatok módszerére vonatkozólag a bevezetésben hangoztattam (Tab. I, fig. 1, 7, 8). Minden egyéb alkattani részletezést mellőzök, a styloidoknak fajlagosan jellemző, vagyis domináló fellépésének a jellemzésével együtt, mely egymagában is elegendő volna a szóban forgó két különböző «*Marcgravia macrocarpa*» fajlagos különállásának alkattani igazolására (Tab. II, fig. 9 *sl*; fig. 10 *r*).

A Tab. IV, fig. 19. ábrája a *N. macroscypha* a Tab. I, fig. 8 *x-x* irányban vett k. m. mikroszkopiumi képét tárja elénk, amin nyomban az a feltűnő, hogy egyetlen sklereidről sem nyújt teljes képet.

Már a kevésbbé vastag cuticulával borított s nyálkasejt nélküli felső bőr-sejtek alatt feltűnnek a sorjában egymást követő sklereidbeli k. m.-ek, amelyek *rhizo-sklereidek*¹ epidermist tá-

¹ *ρίζα* = gyökér + sklereid (15. 300) összetételéből főleg a palissaderéteg ama sklereidjeinek a tüzetesebb megjelölésére, amelyek mindig palissade-álló s többnyire egy macrosklereidre (15. 301) visszavezethető központi teste (Tab. II, fig. 12 *msk*; Tab. III, fig. 14. *msk*) mintegy «gyökérnyúlványokat» ereszt \pm mélyen a szivacsparenchymába. Ezek a nyúlványok lehetnek igen rövidek, avagy igen hosszúak. Az előbbi esetben az egyáltalában nem «gyökeredző», vagyis az általam úgynevezett *palosklereidek* (palus = oszlop, cölöp)-nek nevezett, tehát palissade-álló «makrosklereidek» (l. a folyt. közlem. Tab. VII, fig. 44 *psk*; Tab. VIII. fig. 51—52 *psk*) phylogeniailag egy oly jellemző esetével van dolgunk, amit *mikro-rhizo-sklereidek*-nek is nevezhetünk; ilyenek jellemzik például a *Ruyschia clusiaefolia*-t. A rhizosklereidek hánccsrost (stereid) szerűen megnyúlt nyúlványai — *macro-rhizo-sklereidek* — egyszersmind a szivacsparenchyma libro-

masztó nyúlványainak k. m.-ei csupán (Tab. IV, fig. 19 *ek* = fig. 20 *skt*). A palissade-álló sklereidek inkább központi pálcza-testükben láthatók, semmint teljes egészükben; sőt a sklereidek túlnyomó száma csakis k. m.-eikben villognak elő a palissade alatt, az aerenchymatice laza szivacsparenchymában s feltűnőbb számmal ugyanennek fonákfelőli zónájában (Tab. IV, fig. 19 *sp—lsk—lsk*).

Az elsődleges erezzel parallel metszetekben bontakozik ki a sklereidek való képe a mesophyllum valamennyi rétegében (Tab. IV, fig. 20).

A makro-rhizo-sklereidek \pm nyúlt bőrtámasztó talpazatán kívül legfeltűnőbb jelenség az a kábelszerű köteg, amely jobbadán e rhizosklereidek háncrest (stereid)-szerű nyúlványaiból alakul ki a palissade alatt. Viszont tipikus librosklereidekből való az a sklereid-nyaláb, amely ugyancsak kábelszerűleg fut végig a szivacsparenchyma fonákfelőli rétegében (fig. cit. *fk—ak*).

És ha mindehhez hozzászámítjuk a levél tollas erezetének (fol. penninerve) leptoma felőli s erőteljesen kifejtett háncrest-nyalábját (Tab. IV, fig. 19 *bt*); fogalmunk lehet ama mechanikai szerkezetről, amely különösebben az elsődleges erezet irányában megnyilatkozó rugalmasság érdekében jut érvényre a *Norantea macroscypha* tekintélyes nagyságú lemezében (Tab. I. fig. 7).

Megesik, hogy egy-egy rhizosklereidje voltaképen librosklereid (azaz stereid) s mint ilyen fut le a felső bőrtől a fonákig (Tab. IV, fig. 20 *e₁—lsk*). Ez a *Norantea* a tipikusa nlibro-sklereides *Noranteák* (*N. peduncularis*, *N. albido-rosea*, *N. Uleana*) csoportjába tartozik.

Nem úgy a *Norantea Eötvösorum*.

sklereidjeivel ugyanott szivacsparenchymabeli felső kábelnyalábba társulhatnak (Tab. IV, fig. 20 *fk*), amelynek mechanikai jelentősége, a szivacsparenchymabeli librosklereidek úgynevezett alsó kábelnyalábjával (Tab. IV, fig. 20 *ak*) együtt, már az elsődleges erezzel parallel lefutásánál fogva is szembeszökő. Minderre szép példákat nyújtanak a (*Norantea peduncularis*-csoport tagjai (*N. macroscypha*, *N. albido-rosea*, *N. Uleana* és *N. peduncularis*).

Ezzel és az 569. l. sub ² jegyzettel tüzetesen meghatároztam a Margraviacea-beli sklereidek általam használt mesterszói.

RUIZ e Vitoc-mellőli úgynevezett «*Marcgravia macrocarpa*»-ja tudniillik az alkattani vizsgálatra alkalmas darabkáknak (Tab. I, fig. 1a, $x-x$, $i-i$, $a-b$) kimetszése alkalmával nyomban elárulja azt, hogy voltaképp még alkattanilag sem áll semmi közelebbi kapcsolatban a PAVON-féle «*Margravia macrocarpa*»- (resp. *Norantea macroscypha*)-val (Tab. I, fig. 7b).

A kimetszés élei mindenhol, még az $x-x$ -irányban is simák (Tab. I, fig. 1a). Ebből eleve arra következtethetünk, hogy ez a *Norantea* nem is a «librosklereoides csoport»-ból való és ami, szemben a PAVON-féle példával nyomban jellemző, a *N. macroscypha*-ban uralkodó styloid-tömlők (Tab. II, fig. 9 *sd*; Tab. IV. fig. 19 *sd*) helyett a levélszövet minden rétegében (Tab. III, fig. 13, 15 $r-r$), sőt még az epidermalis sejtekben is (Tab. I, fig. 5; Tab. II, fig. 10), mindenhol raphid-tömlőkre bukkanunk. A *Nor. Eötvösorum* mesophyllumában ritka jelenség a styloidok előfordulása, miről alább majd szó esik.

Valóban jellemzően kiemelkedő alkattani bélyeg, hogy az elsődleges erezetet keresztben érő s a vele parallel metszetek mikroskopiumi képei között érdembe vágó különbség nincs (Tab. III, fig. 13; Tab. II, fig. 12). Nyomatékosan kell hangsúlyoztatnom, hogy amíg a *N. macroscypha* elsődleges erezetét keresztben érő metszeteiken sklereideket a maga teljességében nem látunk (Taf. IV, fig. 19), addig az a *N. Eötvösorum* levelének a jelzett irányú metszeteiben gyakori jelenség (Tab. III, fig. 13).

A *N. Eötvösorum* bifacialis mesophyllumát (észleléseim szerint nyálkasejt nélküli) bőrsejtek zárt sora borítja (Tab. I, fig. 4; Tab. II, fig. 12; Tab. III, fig. 13—15; Tab. V, fig. 22—23 e_1-e_1).

A palissade tömött rétegében sűrűn követik egymást a palissade-álló sklereidek, amelyek epidermist-támasztó talpnyúlványai mind a két irányban¹ egyaránt kifejlődve (Tab. II, fig. 12; Tab. III, fig. 13 *skt-skt*). Általában rövidebb «gyökér-nyúlványaik»-kal \pm mélyen a szivacsparenchymába gyö-

¹ Értem ez alatt Tab. I, fig. 1a, $x-x$ és $i-i$ metszésbeli irányait, mit ezentúl röviden a fenti módon, avagy még rövidebben « x -irány» s « i -irány» jelzéssel fogok kifejezni.

kereznek és a palissade-álló sklereidek ama kategóriájába tartoznak, amiket én *rhizosklereidek*-nek nevezek.

Ha tüzetesen vetjük össze, és pedig több száz esetben, a két irányban vett metszeteket, találhatunk oly képet, amely a két irányban való némi differentiálódásra, avagy legalább is annak a tendenciájára enged következtetni.

A rhizosklereidek egyik-másik nyúlványa ugyanis a palissade alá görbülten nyúlik el, itt-ott a szivacsparenchymabeli astrosklereid hasonló irányú nyúlványával kombináltan, mintha a palissade-alatti sklereid-kábel-képzés nyomait mutatná (Tab. V, fig. 22 *fk*). Mindamellett ez még távol van a valódi sklereidbeli kábeltől; szóval való további magyarázgatás helyett elegendő a *N. macroscypha*-ból vett Tab. IV, fig. 20 *fk*-ra vett tekintet s ennek összehasonlítása a *N. Eötvösorum* Tab. V, fig. 22 ugyanama *fk*-beli zónájára.

Miként a «nem librosklereides *Norantea*-csoport» egyik-másik tagjánál (*N. magnifica*, főleg *N. sandiensis*), úgy a *N. Eötvösorum* levelében is gyakran észlelhetjük a palissade-beli rhizosklereidek egynémely nyúlványának íves visszahajlását, amiben viszont megnyilatkozik a palissade-támasztás tendenciája (Tab. II, fig. 12 *skp*). E nyúlványok sokszor a palissade-sejtek közé nyomuló horognyúlványok, amelyek a palissade-beli rhizosklereidek egynémelyikét valósággal horgony (vasmacska)-sklereiddé avatják (Tab. II, fig. 12 *skh*).

A sklereidek tövisnyúlvány-képzésre való hajlandósága megnyilatkozik a palissade-szivacsparenchyma határán fellépő astrosklereidek részéről is. Ilyennek a képét tünteti fel a Tab. I, fig. 4 astrosklereidje, a palissade-sejtek közé nyomuló három tövisnyúlványnyal (fig. cit. $tn_1 - tn_3$), amelyek közül az egyik kifejezetten palissade-támasztó (fig. cit. tn_1).

A *N. Eötvösorum* sklereidjeinek tövisnyúlványképzésre való nagy hajlandóságára vall továbbá az is, hogy a rhizosklereid felső (rendszerint bőrtámasztó) talpi nyúlványa (Tab. II, fig. 12 *skt*), nem ritkán tövisnyúlványként hajlik le a palissade-sejtek közé (Tab. I. fig. 4 tn_4 ; Tab. III, fig. 14 tn_4).

Mind e tövisnyúlványképzés első sorban a palissade-réteg radialis feszességét emeli; tangentialis irányban a palissade alá-

támasztása játszik nagyobb szerepet, melynek szolgálatában a palissade-álló rhizosklereid és a palissade-alatti astrosklereid egy-egy nyúlványa, szorosan a palissade-réteg alatt, szövetkezhetik is egymással (Tab. V, fig. 23 *skp*₁₋₂).

A szivacsparenchymabeli astrosklereidek karjai egyébiránt annyira megnyúlhatnak, és pedig 1. vagy minden irányban \pm egyformán (Tab. II, fig. 12 *ask*; Tab. V, fig. 22 *ask*), avagy 2. tangentialisan lapítottan (Tab. III, fig. 14 *ask*), úgy hogy e sklereidek bizonyos «ophiura»-jellegét tagadni alig lehet. Önként értetődőleg helyi mechanikai jelentőségében tangentialiter, tehát a lemez elsődleges erezte irányában amaz astrosklereidek érvényesülnek, amelyek nyúlványai a jelzett irányban nyújtózkodnak el a levél húsában (Tab. III, fig. 14 *ask*). Mindez azonban a szó mechanikai értelmében meg sem közelíti ama sklereidbeli felső kábelt, amely oly jellemzőleg fut végig a librosklereides *Noranteák* palissade-ja alatt (Tab. IV, fig. 20 *fk*).

A sklereidek típusos alakjain kívül vannak oly szivacsparenchymabeli sejtek, amelyek falazatuk kisebb-nagyobb mértékű és gödörkés megvastagodása következtében élénken ütnek el minden más szivacsparenchymabeli sejttől; ezeket én sklereid-fészekeknek (Sklereid-Nester) nevezem (Tab. II, fig. 12; Tab. III, fig. 13, 14, 15; Tab. V, fig. 22 *skn* – *skn*). E sklereidfészek előfordulása gyakori jelenség a Marcgraviaceae levelében, amelynek inkább a phylogéniai jelentősége nagyobb, semmint a mechanikai, amennyiben sokszor csupán ezek az egyetlen «mechanikai (sklereid-) elemek» a levél egész szövetében.

Ha tehát sklereidfészekeken kívül valódi (astro-, ophiura-, libro-) sklereidek is előfordulnak a szivacsparenchymában; avagy azonfelül palissade-álló (palo-, rhizo-) sklereidek: ez azt jelenti, hogy származástaniilag mindenesetre magas fejlettségű *Noranteá*-val van dolgunk.

Minthogy a levélperemből vett k. m. iránya (T. I, fig. 1a, *a—b*) eo ipso eltér a levélszövet (sklereidjei vizsgálatára alkalmas) másik két metszésbeli iránytól (Tab. I, fig. 1a, *x—x*, *i—i*); a sklereideknek a levélszélekben való fellépése a metszet eltérő irányánál fogva is tanulságos, annyiban, hogy a palissade-álló

rhizosklereidek általános képe mit sem változik, még bőrtámasztó- avagy a palissade közé ékelődő tövisnyúlványai tekintetében sem (Tab. III, fig. 15 *skt*, $tn_1—tn_2$). Megeshetik, hogy ez utóbbi a palissade-rétegen is túlnyúlik, mélyen benyomulván a szivacsparenchymába (fig. cit. tn_1).

A fent elmondottak megismétlődését tapasztaljuk a levélperembeli astrosklereidekre vonatkozólag is.

Mindez amellet szól, hogy a sklereidek átlag egyarányos kiképződésűek a levélszövet minden irányában.

A *N. Eötvösorum* épszelű levelének in sicco sárgás éle, annak mikroszkopiumi vizsgálatával, több oknál fogva jellegzetes. Kitűnik, hogy az erős cuticulával borított bőrszínbeli sejtek, tekintve e sejtek alakját s az azokat ívelten borító cuticula vastagságát, a levél-élen át a levélfonákra is átborulnak körülbelül 8—10 sejt hosszúságában, — hogy azután a levélperembeli fonák egy bizonyos pontjától eredjen meg a fonákbeli bőrsejtek ama sorozata, mely immár a fonákra jellemzőleg vékonyabb cuticulájú s az áthajlási görbület hirtelen megtörése után kisebb sejtekből is alakul ki. A levél kemény élének ez az alkattani alapja.

A levél élénk assimilatiós munkájára vall, hogy a palissade tömött rétege a levélperem szélső pontjáig kitart (Tab. III, fig. 15 $p_1—p$). — ámde már is a levéléltől domináló szivacsparenchymával (fig. cit. $sp_1—sp$), sklereidfészkekkel és olajcsöppeket tartalmazó váladéktartókkal (fig. cit. *skn*, *ol*). A levélszövet valamennyi rétegében észlelhető raphid-tömlők a levélélben is megvannak (fig. cit. *r*). Ezek mellett a styloidok, amelyek a *N. macroscypha*-éihoz képest jóval vékonyabbak, csak szórványosan fordulnak elő és a vizsgáló figyelmét igen könnyen kikerülhetik. Ezek ismeretesen \pm négyzetes k. m.-ei, bár az erősen felfokozott szárazlencsebeli nagyításra (Z. Orth. Oc. 6—Obj. DD) már is éléken villognak elő, körvonalaikban csakis mártogatós (immersiós) lencserendszerek alkalmazásával tanulmányozhatók. Kitűnik, hogy e kristályhasábok k. m.-ükben nem mindig quadratikusak, \pm lapított négyzetek mellett csónkán lecsapott oldalúak is észlelhetők, bár szórványosan. A quadratikusokon feltűnő a feketés kereszttség, amely azt mindig négy

kisebb mezőre osztja; magyarázata kristályoptikai feladat (Tab. II, fig. 11 *sd*).

A fonákbeli bőr felületi áttekintésénél lényegbe vágó orientálódást a légzőnyílások részéről nem tapasztalhatunk. E mellett szól például a Tab. V, fig. 25-ben adott k. m. is, mely a levélperem Tab. I, fig. a, *a*—*b*-ben adott metszési irányából vétetett és amely teljesen megfelel a légzőnyílások ama k. m.-i képeinek, amelyek például a Tab. III, fig. 13 *s*—*s* szerint megfelelő nagytítás mellett ugyanúgy láthatók.

A zárósejtek szerkezete az úgynevezett Margraviacea-typusra vall, szigorúan egy szinten (niveau) a vékony cuticulájú bőrsejtekkel, csupán erős centicularis léczzeivel tűnik ki, amelyek természetszerűleg alkalmasak a transpiratio szükség szerinti szabályozására (Tab. V, fig. 25 *cl*). A fonák felületi képe amellettszól, hogy a légzőnyílások «melléksejtjeinek» száma 4, itt-ott 5, anélkül azonban, hogy alakilag lényegesen eltérnének a többi bőrsejttől (Tab. II, fig. 10). A légzőnyílásbeli életműszer a maga felületi körvonalaiiban élesen határolt — különlegesebb szerkezeti sajátságok nélkül —, vizsgáljuk bár a lehető legfokozottabb száraz nagytítással (Tab. V, fig. 24), képe ugyanaz, amely még Z. Orthosk. Oc. 6 — hom. Imm. $1\frac{1}{7}$ " (=835 n.) — való vizsgálatra sem változik. Ha ezt például a *N. Lóczyi* légzőnyílásának e tanulmány II. részében (Tab. VIII, fig. 56) adott képével hasonlítjuk össze, nyomban meggyőződhetünk arról, hogy mindamellett a *N. Eötvösorum* légzőnyílása egyszerű szerkezetének is megvan a maga jellegzetessége.

A levelek szín- és fonákbeli bőrsejtjeinek felületi képe volta-kép még a sejtek nagysága tekintetében sem különbözik egymástól (Tab. I, fig. 5 és Tab. II, fig. 10); legföljebb a raphidok azok, amelyek talán gyakrabban láthatók a fonákbeli bőrsejtekben. Cuticulájuk erősebb nagytítások alkalmazásával erősen fénytörő pontok rendszerét tünteti föl a felületen, amely a cuticula gödörkés bemélyedéseitől ered (Tab. V, fig. 24). E gödörkés szabálytalan körvonalaak; valamelyes szabályosságát a rendelkezésemre álló legerősebb nagytítással (Z. Orth. Oc. 6. — homog. Im. $1\frac{1}{7}$ ") sem észlelhettem.

Habár, a bevezetésben kifejtett nézet alapján, fejtegetéseim

súlypontja mindig a levélre esik, ugyancsak a bevezetésben foglaltak szerint röviden foglalkoznom kell e liánszerű *Noranteák* sklereidjeinek fölöttébb tanulságos példáival is.

Már a SCHULZE-féle keverék adott módja szerinti vizsgálatra alkalmas darabkák keresztben való lemetszése arra a tapasztalatra vezet, amit a levél x - s i -irányú metszeteinek a szükségességéről fent részletesen leírtam. A *N. macroscypha*-nál ugyanis szabadszemmel láthatólag állanak ki a librossklereidek, nem úgy a *N. Eötvösorum*-nál. Én valószínűnek tartom, hogy például a szár úgynevezett törési kísérleteinél körülbelül hasonló tapasztalásra juthatnánk, amit TSCHIRCH bizonyos drogueokra, például a *Cortex Mezerei*-re vonatkozólag kifejt, amely tudvalevőleg, minthogy hancsrostjai igen hosszúak, keresztben nem törik (15. 296). Legyenek a sklereidek rövidek, avagy hosszúak, mindenesetre a rugalmasságukban rejlik a főszerep; erre vall a lignin-ra alkalmas reagensek (phloroglucin + sósav, anilin-sulfat H_2O —old. + kénsav) iránti teljes «érzékletlenségük» is.

Ezt a rugalmasságot fokozza, főleg a hajlékonyság elvének az érvényesülésében, a *N. macroscypha* fajlagosan jellemző szárbeli epidermise, melynek darabjai a SCHULZE-féle keverékben napokon át egybefüggően megmaradnak, jeléül annak, hogy erősen megvastagodott falazatú sejtjeinek kapcsolata a lehető legszorosabb. A sokszögű sejtek hálózatának a felületi képe annyiban figyelemre méltó, hogy a szár haránt irányában lapított sejtek vonulatai egyszersmind jelzik ama csikoltságot, amely makroskópice is sajátos rajzolatát adja a szárnak s amely egyébként az átlagosan egyalkotású sejtek egyes magasabban s mélyebben álló mezőinek váltakozásából ered (Tab. V, fig. 28 e_1-e_1). Erről a mikroszkopium megfelelő beállítása győzhet meg bennünket. E sejtek falazata úgy a phloroglucin + sósav, valamint anilinsulfat vizoldata + kénsav iránt közömbös; chlórzinkjód pedig az epidermis-darabkáknak inkább makroskópice észlelhető elbarnulását idézi elő.

Jóval tágasabbak, de annyival vékonyabb falazatúak a *N. Eötvösorum* szárbeli bőrsejtjei (Tab. V, fig. 26), a fenti reakciók tekintetében hasonló viselkedéssel s anélkül, hogy egyes sejt-

komplexumok szint (niveau)-beli különbözetei a *N. macroscypa*-éhoz fogható rajzolatokat idéznének elő. Egyéb különbség nincs.

Annnyival nevezetesebb eltérést mutat sklereidek tekintetében való viselkedésük.

Mindenekelőtt a részletes vizsgálat arról győz meg, hogy a *N. Eötvösorum* szárbeli sklereidjei nagyon változatosak (Tab. IV, fig. 17; Tab. I, fig. 6 *a—b—c—d—e*; Tab. V, fig. 27 *a—b—c—d—e*). Ezek között vannak olyanok, amelyekben részben, avagy egészben a szár haránt irányában való érvényesülés tendenciája nyilatkozik meg inkább, például a fig. 6*c* horizontálisan merev *g* karja, a fig. 6*d* esetében pedig valamennyi nyúlvány részéről, — megjegyezvén, hogy O_1 -gyel jelzem a liánszerű szár tető-, O_2 -vel annak alap-pontját, η — η -val pedig az organikus (O_1 — O_2) tengelyirány keresztezését. Vannak közömbös viselkedűek, sőt bizarr alakúak (Tab. V, fig. 27 *a—b*).

A nagy átlagban mindamellett könnyű megállapítanunk azt, hogy a szárbeli sklereidek között általánosan részint a *libro*-sklereid, részint az *astro*sklereid-jelleg jut kifejezésre, sokszor közvetlen egymás szomszédságában (Tab. I, fig. 6 *a—b*; Tab. V, fig. 27 *c—d*). A sklereidek változatosságával együtt jár, hogy vannak úgynevezett közbülső, azaz mintegy az *astro*- s *libro*-sklereid jelleget egyesítő alakok is; egy ilyennek a képét mutatja be a Tab. I, fig. 6 *e*, melynek a szár tetőpontja felé hatoló nyúlványa = *libro*sklereid, a tengely mélyében «gyökeredzők bozontja» pedig *astro*sklereid jellegű (a táblahely kihasználhatása végett az ábra fordított helyzetű). A tengely hosszanti irányában való megerősítés érdekében nyilvánvalólag a részben (Tab. I, fig. 6 *a*), avagy egészben kifejlett H-alakú — ez esetben törpe *libro*-sklereidek érvényesülnek első sorban (Tab. IV, fig. 17); sokkalta hatványozottabban az óriási H-*libro*sklereidek a *N. macroscypa* tengelyében, amelyek itt kizárólagosan uralkodó elemek s amelyek egyik példáját a Tab. IV, fig. 18.-ban tüntetem fel, mintegy a *N. Eötvösorum* hasonló alakú, de jóval kisebb (azért törpe) H-sklereidjének (Tab. IV, fig. 17 *a*) mérőpálcájául, jöllehet, a tábla adott korlátja miatt, a jelzett példa még nem is a leg-hosszabbak közül való.

Fölösleges volna a további részletezés. A bevezetésben körvonalozott phylogeniai föladat alkattani részletét ezzel ki is merítettem,

Alaktani jellemzését, szokásos módon, a következő diagnózisban foglalom össze:

Norantea Eötvösorum sp. n. («*Marcgravia macrocarpa*» RUIZ Nr. 56, anno 1794 in Herb. Mus. botan. Berol. — non «*Marcgravia macrocarpa*» PAVON in Herb. BOISSIER-BARBEY-Chambésy, — neque *Norantea macroscypha* (GILG 21. 31—32).

Ramis teretibus, 4—5 mm crassis, glabris, griseo-cinerantibus, passim sordide subfuscatis, cortice non solubile vestitis, solidis. Folia alterna internodiis longiora breviter petiolata, petiolo crasso 4—5 mm longo glaberrimo; lamina usque 14 cm longa, 5 cm lata, ovato-oblonga vel versus basin inæqualiter cuneata vel in uno latere \pm rotundata, versus apicem rotundata, angustata, vel subacuminata, in ipso apice obtusiuscula vel emarginata, in margine intergerrima, coriacea, superne viridis vel subfuscata, opaca, inferne cinnamomeo-fuscescens, opaca, costa crassiuscula subtus bene prominula, nervi primarii in pagina inferiore parum conspicui, tenues, sub angulo acuto assurgentes, ante marginem arcuati, venis utrinque inconspicuis; glandulae hypophyllæ subparallelo-seriatæ, 0.4—0.7 mm latæ, rotundæ vel rotundatæ, subannuliformes, laminae pallidiores, carneo-ochraceæ (Tab. I, fig. 1 *a—b*). Racemus terminalis (in specimine unico viso: Tab. I, fig. 2) 14-florus densus, prophylla calycis approximata, omnino sepaloidea, late ovata ad apicem obtusata glaberrima, carnosula, bigibba, in margine integerrima; pedicelli crassi teretiusculi glaberrimi, 3 cm longi; nectaria in $\frac{1}{8}$ parte inferiore pedicelli inserta, petiolata (Tab. I, fig. 3 *nc*), petiolo 4—5 mm longo crasso-carnoso, sanguinea (?), anguste calceiformia, 12—14 mm longa, 4—5 mm lata (Tab. III, fig. 16); sepala orbicularia, integra et subscariosa, 7—10 mm in diametro (Tab. I, fig. 3 *Fl*), alabastra subglobosa (Tab. I, fig. 2 *al*).

WITTMACK a Flora Brasiliensis-ben közölt «*De Geographia Marcgraviacearum*» (9. 257—8) adatai szerint

Peru-ból mindössze három *Norantea* volt ismeretes. Ez a csekély fajsám, főleg WEBERBAUER botanikailag szakavatott s nagyszerűen végrehajtott gyűjtő-expeditiói révén, Perut illetőleg egyszerre 10-re emelkedett.

Érdekes, hogy a jobbadán GILG-től leirt (21, 31, 32) *Norantea*-ujdonságok sorában kettő — s ez percentualiter nagy szám — olyan, amelyek régmúlt idők classikus gyűjtései révén jutottak el a nagy gyűjteményekbe és a mai rendszertani felfogásnak meg nem felelő más néven (*Maregravia pentapetala* et *macrocarpa* RUÍZ et PAVON a. 1787! = *Norantea macroscypha* GILG 21. 31. — *N. anomala* WITTM. non H. B. K. in Fl. Bras. l. c. p. 240, quoad specim. SPRUCE. n. 6020, a. 1857—59! = *N. microscypha* GILG 21. 32). Az új időközön kívül tehát a múlt is rejteget magában sok oly ujdonságot, amelyek kritikai vizsgálata, a növényföldrajz nevezetes adatain kívül, származástani alapon vett összehasonlító alkattani ismereteinket is jelentékenyen gyarapítják.

Ezek sorába tartozik RUÍZ és PAVON két különböző, más-más gyűjteményben, de egyazon «*Maregravia macrocarpa*» néven 1787, illetőleg 1794. (tehát 121) év óta lappangó növénye. Ez utóbbinak *Norantea Eötvösum* néven a tudományba való beigtatásával egyszersmind távoli földekre hatólag kívánom leszögezni a fellendülő magyar közművelődés ama nevezetes korszakának emlékét, melynek philosophiában és természettudományban messze földekre hatásos pillére EÖTVÖS JÓZSEF báró «*Karthausi*»-ja (rossz napjaimba *breviariumom*), illetőleg EÖTVÖS LÓRÁND báró «*Graviatiós és földmágnességi vizsgálatai*», amelyek az újkori magyar természettudományosság egyik legnagyobb cselekedetét alkotják.¹

Személyes hálámon kívül az osztatlan és általános tisztelet jele a *Norantea Eötvösum*, a Maregraviaceák historiallag és botanikailag egyaránt szép példája.

¹ M. T. Akadémia Mathem. és Természettud. Értesítője számos kötete, utoljára XXXIII. (1915). köt. 408—9. l.

I. B) A vizsgálat tárgyát tevő herbariumi példák tüzetes sorozata.

A sorszám szerinti jelzések megfelelnek a szövegben előforduló és rendszert zárójelben foglalt hasonló jelzéseknek.

H₁. Norantea macroscypha GILG 1897! — In Peruvia ad Chacahuai (RUIZ, 1787) sub «*Marcgravia pentapetala*» in HB. (= Herb. Mus. Botan. Berolin). — Vide in Tab. I, fig. 7a.

H₂. N. macroscypha GILG 1897! — In HBB (= Herb. BOISSIER-BARBEY, Chambésy) sub «*Marcgravia macrocarpa*», Peruvia: Herb. PAVON. — Vide in Tab. I, fig. 7b.

H₃. N. Eötvösorum AL. RICHT. 1915! — In HB sub «*Marcgravia macrocarpa*». «In Peruviae ad Vitoc 1794. No. 56. RUIZ l. — Vide in Tab. I, fig. 1a—b.

H₄. Marcgravia umbellata L. In Cuba orientali. Coll. C. WRIGHT 1856—57. No. 54. (9. 226). In HV. (= Herb. Mus. Palat. Vindob.) = *Marcgravia rectiflora* TRIANA et PLANCHON var. *vulgaris* WITTM. teste WITTMACK.

I. C) Ábramagyarázat.

<i>c</i>	cuticula		
<i>e₁</i>	a levél színbeli (felső)	} epidermise	} bőr-rendszer
<i>e₂</i>	a " fonákbeli (alsó)		
<i>em</i>	epidermis mucigera		
<i>n</i>	nyálkasejtek (Schleimzellen)	}	} átszellőztető rendszer
<i>s</i>	légzőnyílásbeli készülék (stoma)		
<i>z</i>	záró-sejtek (Schliesszellen)		
<i>cl</i>	záró-sejtek cuticularis léczei		
<i>lr</i>	légrés		
<i>l</i>	légudvar (Atemhöhle)		
<i>kl</i>	külső légudvar		
<i>m</i>	a légzőnyílás úgynevezett melléksejtjei	}	}
<i>i</i>	sejtközi légüregek		
<i>rt</i>	raphidtómló		
	<i>r</i> raphidok		
<i>sdt</i>	styloídtómló		
	<i>sd</i> styloidok		
<i>vt</i>	váladáktartó		
	<i>ol</i> olajcsöpp (-gömbök)		
<i>gl</i>	levelek fonákbeli mirigye, (glandul ahypophylla. — GILG szerint = hyda-		

thodus hypophyllus: 21, 31, 32. — SOLEREDER szerint = „echte grosse Nektarien: 22, 152; nectarium extranuptiale: 23. 43).

<i>kw</i>	levélparabeli túltengés			
<i>p</i>	oszlopos parenchyma, palissade-réteg			
<i>pg</i>	gyűjtő-sejtek			
<i>sp</i>	szivacs-parenchyma		áthasonító (assimilációs)	
<i>spp</i>	palissade-szerűleg nyúlt szivacs- parenchymabeli sejtek		rendszer	
<i>chl</i>	chloroplastis (chlorophyllumos szemcsék)			
<i>ph</i>	parenchyma-hüvely			
<i>hr</i>	hadroma (hydroma)			
<i>lp</i>	leptoma (plastoma)			
<i>bt</i>	stelebeli hancs-sarló (sichelförmige Bast- belege der Gefässbündeln)		<i>st</i> Stele = központi oszlopszövet	
<i>sk</i>	sklereid = kemény sejtek			
<i>psk</i>	palosklereid = hasábos vagy pálezikás kemény sejtek		palissade sklereidjei	
<i>rsk</i>	rhizosklereid (makro-, mikro-) = gyöke- res kemény sejtek			
<i>skn</i>	sklereid-fészkek (Sklereiden-Nester)			
<i>ask</i>	astrosklereid			
<i>askk</i>	astrosklereid-kezdet	csillagos		
<i>osk</i>	ophiura-sklereid	kemény sejtek	szivacsparenchyma sklereidjei	
<i>lsk</i>	librosklereid = hancsrostalakú (stereid- szerű) kemény sejtek			
<i>skh</i>	horgony (Anker-)sklereid			
<i>br</i>	brachy- } sklereid, ezúttal a mesophyllumbeli sklereidok			
<i>msk</i>	makro- } központi teste gyanánt			
<i>/k</i>	felső, vagyis palissade alatti			
<i>ak</i>	alsó, vagyis fonák felőli		sklereidbeli kábel	
<i>skt</i>	sklereidbeli bőrtámasztó talpi nyúlvány			
<i>skp</i>	palissade-támasztó karok			
<i>tn</i>	sklereidbeli tövisnyúlvány			
<i>skm</i>	sklereid (nyúlvány)-beli k. m.			
<i>L</i>	levél-lemez (fol. lamina)			
<i>Pt</i>	levél nyele (petiolus)			
<i>al</i>	alabastrum			
<i>Fl</i>	virág (flos)			
<i>P</i>	pedicellus			
<i>nc</i>	nectarium			

A levélhús (mesophyllum) mechanikai rendszere

HB = Herbarium Mus. Botan. Berol. (Berlin)
HBB = „ Boissier-Barbey (Chambésy)
HBd = „ Mus. Nation. Hung. (Budapest)

HM = Herbarium Reg. Monac. (München)
 HU = „ Ultraject. (Utrecht)
 HV = „ Mus. Palat. Vindob. (Bécs)

Z. ZEISS-Mikroskopium Stat. I.
 Oc. HUYGENS-féle szemlencse 1--5 sz. és Orthoskop. Oc. 6. sz.
 Ob. Achromat. tárgylencse
 Hi. = homog. Immers. $\frac{1}{7}''$ n. Ap. 0. 90.

h hosszú
 sz széles
 k. m. kereszt-
 h. m. hossz-
 t. m. érintői (tang.)
 r. m. sugaras (radialis)
 p. m. levélperembeli (= Tab. I. fig. a, a—b) } metszet
 ± többé-kevésbé
 s. a. sensu ampliore
 s. str. „ strictu
 nagy. = nagyítás
 t. n. természetes nagyság (magnitudo naturalis).

I. tábla.

Norantea Eötvösorum AL. RICHT.

- Fig. 1. a. Egyik legfejlettebb és 1b. egy kisebb levele a fonák felől t. n. (H_3).
 „ 2. Virágzati töredék (inflorescentia) t. n.
 „ 3. Nectariumos (nc) virág t. n.
 „ 4. Részlet a levél-lemez i-irányú (= Tab. I. fig. 1a, i—i) k. m.-éből, az astrosklereidek tövisnyúlványképzésének példájául. — Z. Oc. 3. Ob. C.
 „ 5. Levélszínbeli bőr (epidermis) felületi képe. — Z. Oc. 3. Ob. DD.
 „ 6. a—b—c—d—e. Különböző sklereidek a szár kéregparenchymájából, — 0_1 — 0_2 az organikus tengely hosszanti iránya, 0_1 =tetőpont, 0_2 alapi pont (a 6e e tekintetben a táblán, az adott térbeli helyzet miatt, fordított irányban van).

Norantea macroscypha GILG.

- Fig. 7. a = «*Maregravia pentapetala*» Origin. in HB (H_1) levele a fonák felől t. n.
 b = «*Maregravia macrocarpa*» Origin. in HBB. (H_2), levele a fonák felől, t. n.
 „ 8. A levél lemezéből egy tájékoztató részlet.

II. tábla.

Fig. 9. Styloid-tömlőkkel (részben a bőrszövet alatt) ékes fonákbeli bőr, felülről tekintve, — *lsk* a bőrsejteken át áttetsző librosklereidek a szivacsparenchyma fonákfelőli zónájában — Z. Oc. 3. Ob. DD.

Norantea Eötvösorum.

Fig. 10. A levél fonákbeli bőre, légzőnyílásokkal (stoma) és raphidokkal. — Z. Oc. 3. Ob. DD.

- * 11. Styloidok (*sd*) tömlője a k. m.-ben, a palissade-réteg és a szivacsparenchyma határán. — Z. Ort. Oc. 6. Im. $\frac{1}{7}$ ".
- * 12. A levél lemezéből *i*-irányú k. m. (=Tab. I. fig. 1a, *i*—*i*) — Z. Oc. 4. Ob. AA.

III. tábla.

Fig. 13. A levél lemezéből *x*-irányú k. m. (=Tab. I. fig. 1 *x*—*x*). — Z. Oc. 2. Ob. C.

- * 14. Részlet a levél-lemez *i*-irányú k. m.-éből. — Z. Oc. 3. Ob. C.
- * 15. Levél-perembeli k. m. (=Tab. I. fig. 1a, *a*—*b*). — Z. Oc. 2. Ob. C.
- * 16. Nectarium (=bractea), Tab. I. fig. 3 *nc* kétszeres nagyságában.

IV. tábla.

Fig. 17. A szár (SCHULZE-féle maceratioval leválasztott) kéregparenchymája, az organikus tengely hosszában (O_1 — O_2) illeszkedő sklereidekkel. — Z. Oc. 2. Ob. AA. — Mintegy mérő-pálczájául szolgál a következő ábra sklereidje:

Norantea macroscypha.

- * 18. H—sklereid a szár kérgéből s annak hosszanti (O_1 — O_2) irányában (SCHULZE-féle maceratiós készítményből). — Z. Oc. 2. Ob. AA.
- * 19. K. m.-i részlet a levél-lemez *x*-irányában. — Z. Oc. 2. Ob. C.
- * 20. K. m.-i részlet a levél-lemez *i*-irányában. — Z. Oc. 2. Ob. C.

Marcgravia umbellata L.

- * 21. *a*. Termő (orthotropikus) — *b*. meddő (plagiotropikus) ág egy-egy levele t. n. (H_4).

V. tábla.

Norantea Eötvösorum.

Fig. 22. A levél-lemez z -irányú k. m.-e, a sklereïdbeli felső kábel-képzés (f_k) tendenciájával. — Z. Oc. 2. Ob. C.

* 23. Levél-lemezbeli k. m.-i részlet x -irányból, rhizo- és astrosklereïd párosult palissade-támasztó karjaival (skp_{1-2}). — Z. Oc. 3. Ob. C.

* 24. Légzőnyílásbeli készülék felülről tekintve, gödörkésen pontozott cuticulájú bőr (mellék)-sejtekkel. — Z. Orth. Oc. 6. Ob. DD.

* 25. A levél-perem fonákbeli k. m.-i részlete (= Tab. I. fig. a, 1 $a-b$), légzőnyílással, olajgömbbel, sklereïd (k. m. skm)-del és sklereïd-fészekkel (skn). — Z. Oc. 4. Ob. DD.

* 26. Szárbeli epidermis egy részlete felülről nézve. — Z. Oc. 2. Ob. DD.

* 27. $a-b-c-d$. A szár kéregbeli sklereïdjeinek különböző alakjai, valamennyi O_1-O_2 irányában orientáltan. — Z. Oc. 2. Ob. AA.

Norantea macroscypha.

Fig. 28. Szárbeli epidermis-részlet a bőrsejtek szint (niveau)-beli különbözetének (rajzban nem érzékelhető e_1-e_2) határán, SCHULZE-féle maceratioval leválasztottan s felülről nézve. Z. Oc. 4. Ob. DD.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915. október 18.-án tartott üléséből)

«A ZÉRUS TERÜLETŰ FELÜLETRŐL»

czímű értekezés (ez Értesítő XXXIII. kötete 730—748. ll.)
utólagosan észrevett sajtóhibái:

732. l., « $\psi=u_1$, $\psi=u_2$ » helyett « $\psi=v_1$, $\psi=v_2$ » veendő.

735. l. 18. sor, «egyszerű» helyett «egyszerűen összefüggő»
veendő.

736. l. 13. sor, «Vegyük el» után betoldandó «e lánczot és».

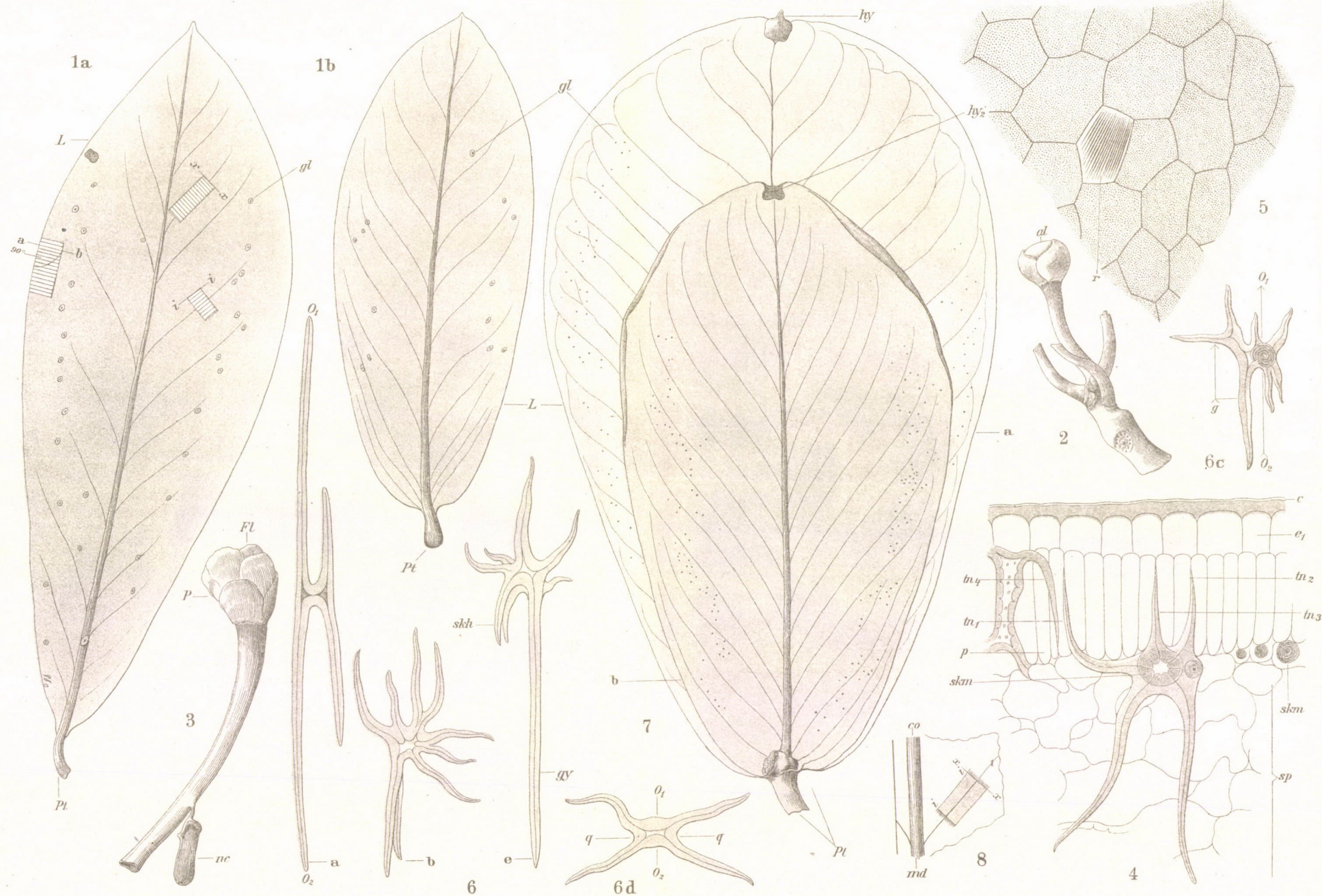
743. l. 5. sor, « k_1 » helyett « k'_1 » veendő. 10. sor « k'_{i_1} , k'_{i_r} »
helyett « k'_{i_2} ,... k'_{i_r} » veendő. 13. sor «fogyó» helyett «növvő»
veendő. Alulról a 4. sorban « k » helyett « $k^{(U)}$ » veendő.

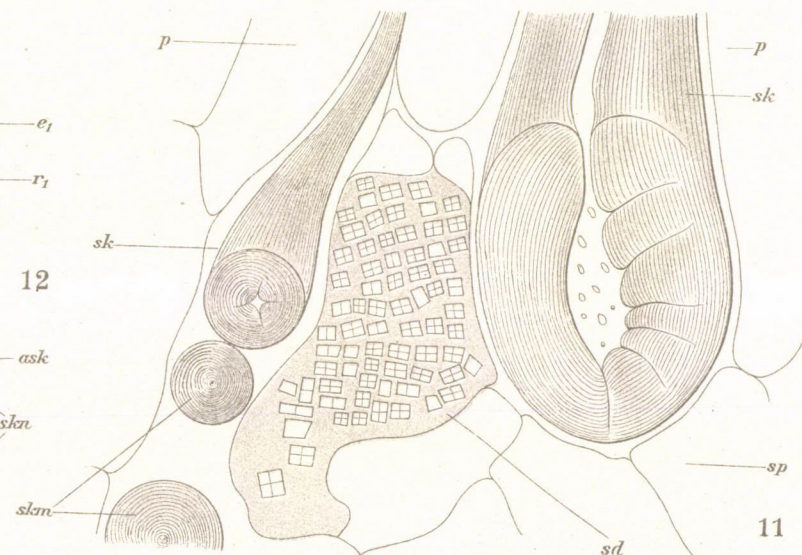
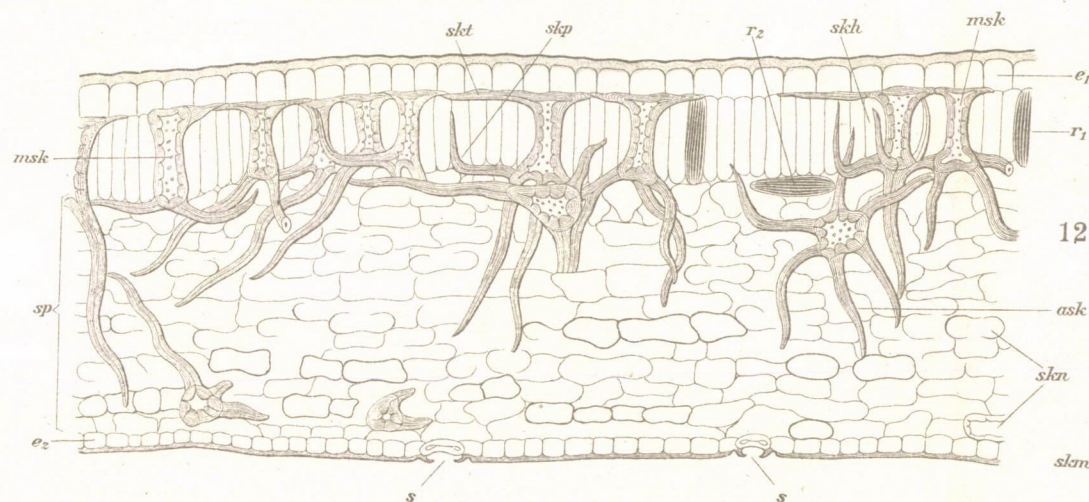
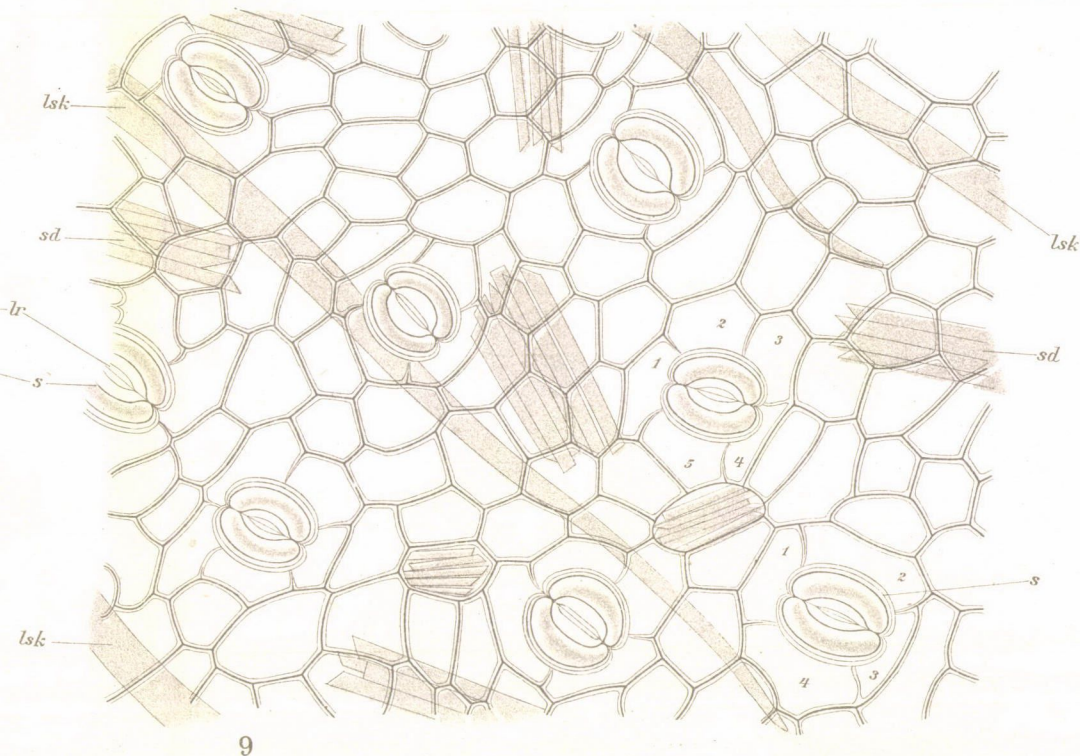
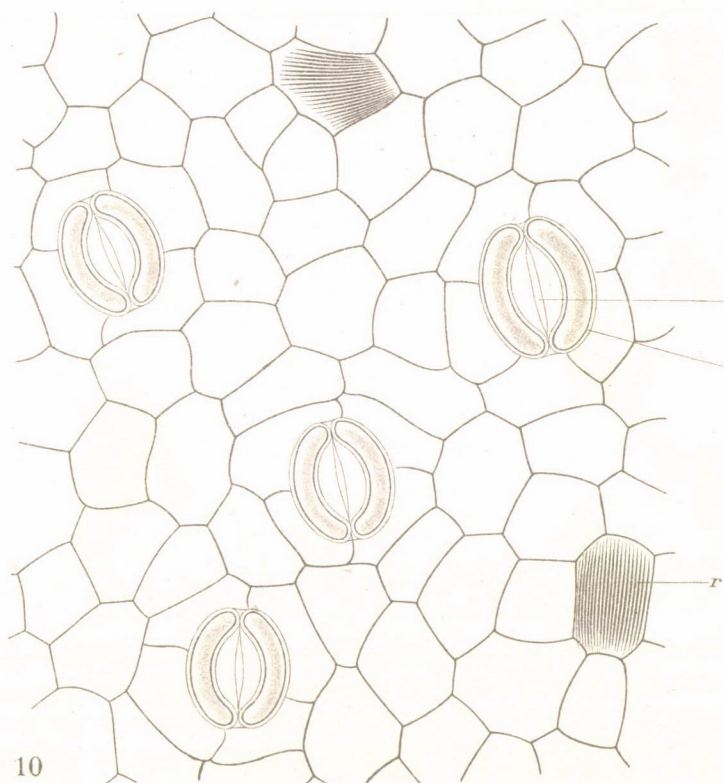
744. l. « k » helyett mindenütt « $k^{(U)}$ » veendő. Alulról a 4.
sorban « Bl » helyett $B(P)$ veendő. Alulról a 3. sorban «más»
után betoldandó « G ».

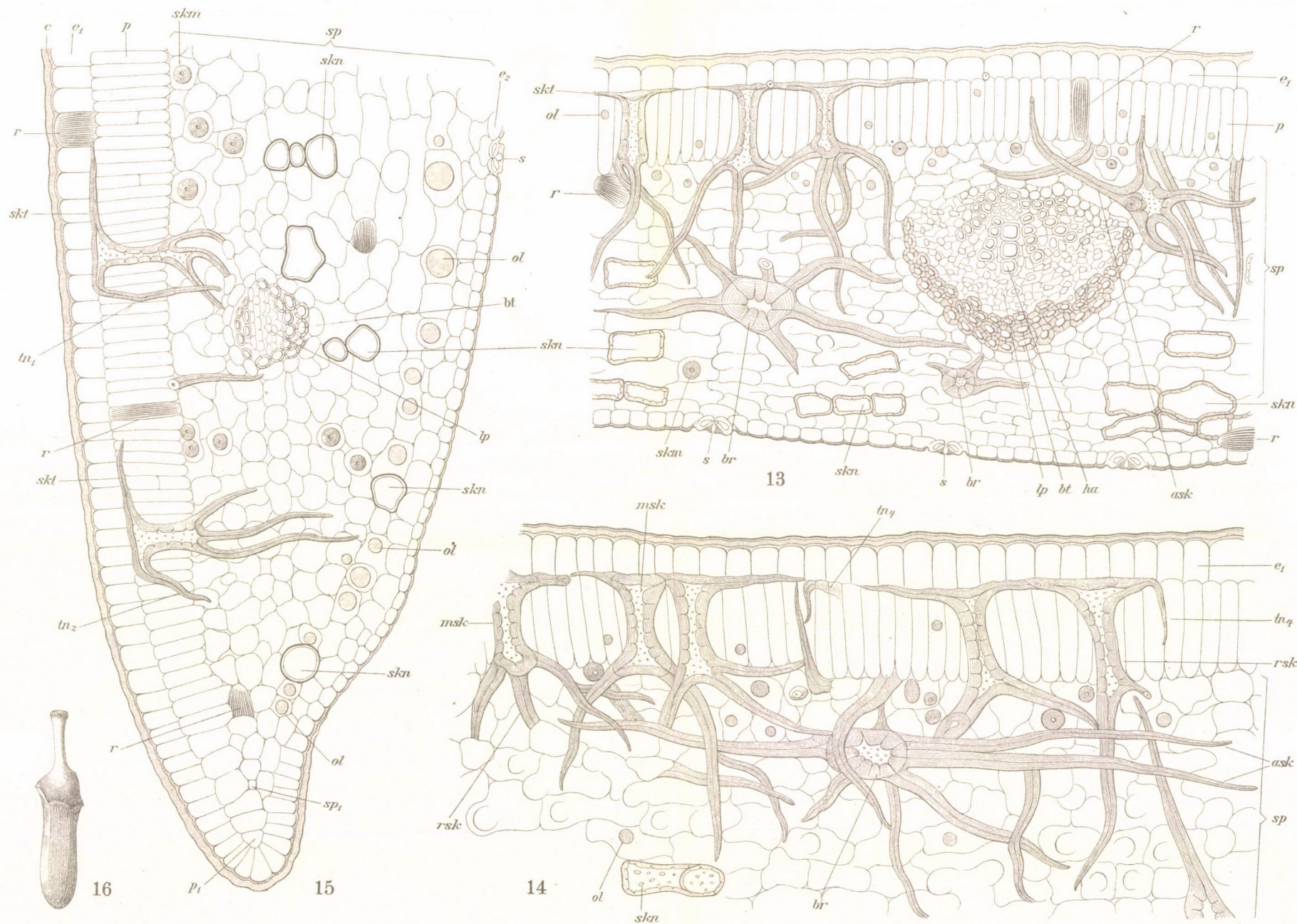
746. l. Első sorban « η'_1 » helyett « η_1 » veendő. 8. sor,
(« (k) , ∞)» helyett « $((k)+l, \infty)$ » veendő. 15. sor első mon-
data végére betoldandó «és hogy pontjaira $\varphi=\xi$. 21—22. sor
 $\overline{A'A''}$ » helyett « $\overline{A'A'_1}$ », « $\overline{B'_1B'}$ » helyett « $\overline{B_1B'}$ », « B'_1 » helyett
« B_1 » veendő.

748. l. 11. sor « $H(F)$ » helyett « $H(E)$ » veendő.

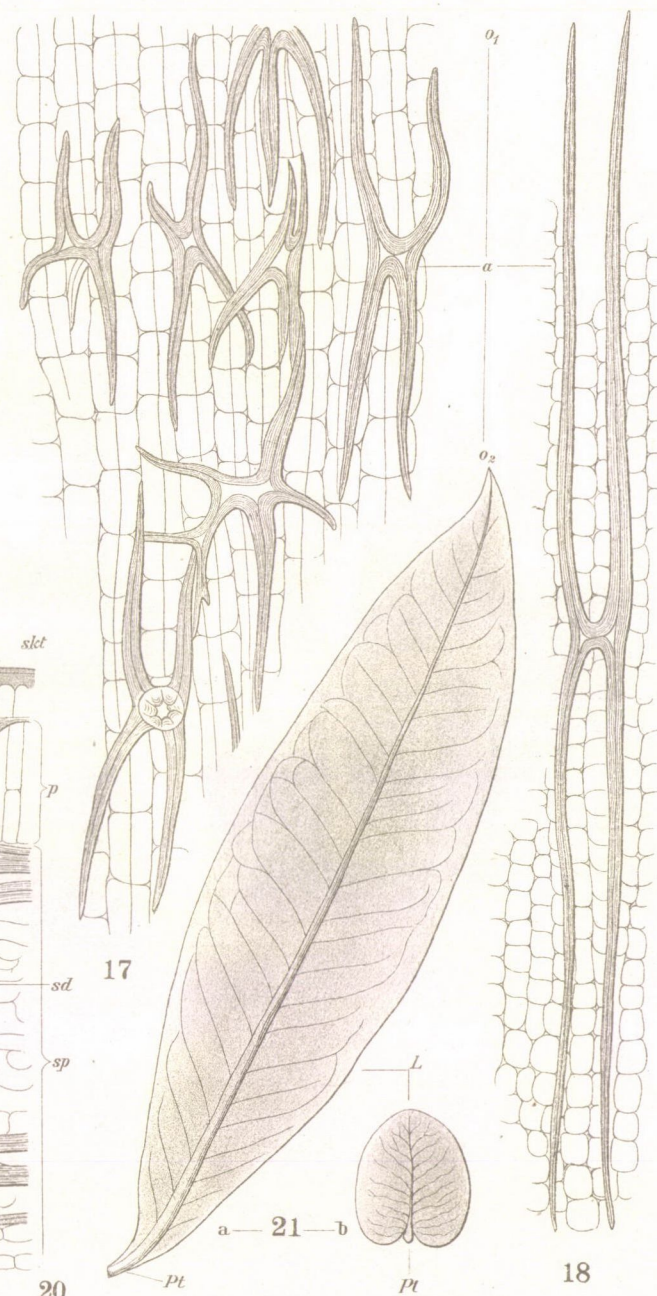
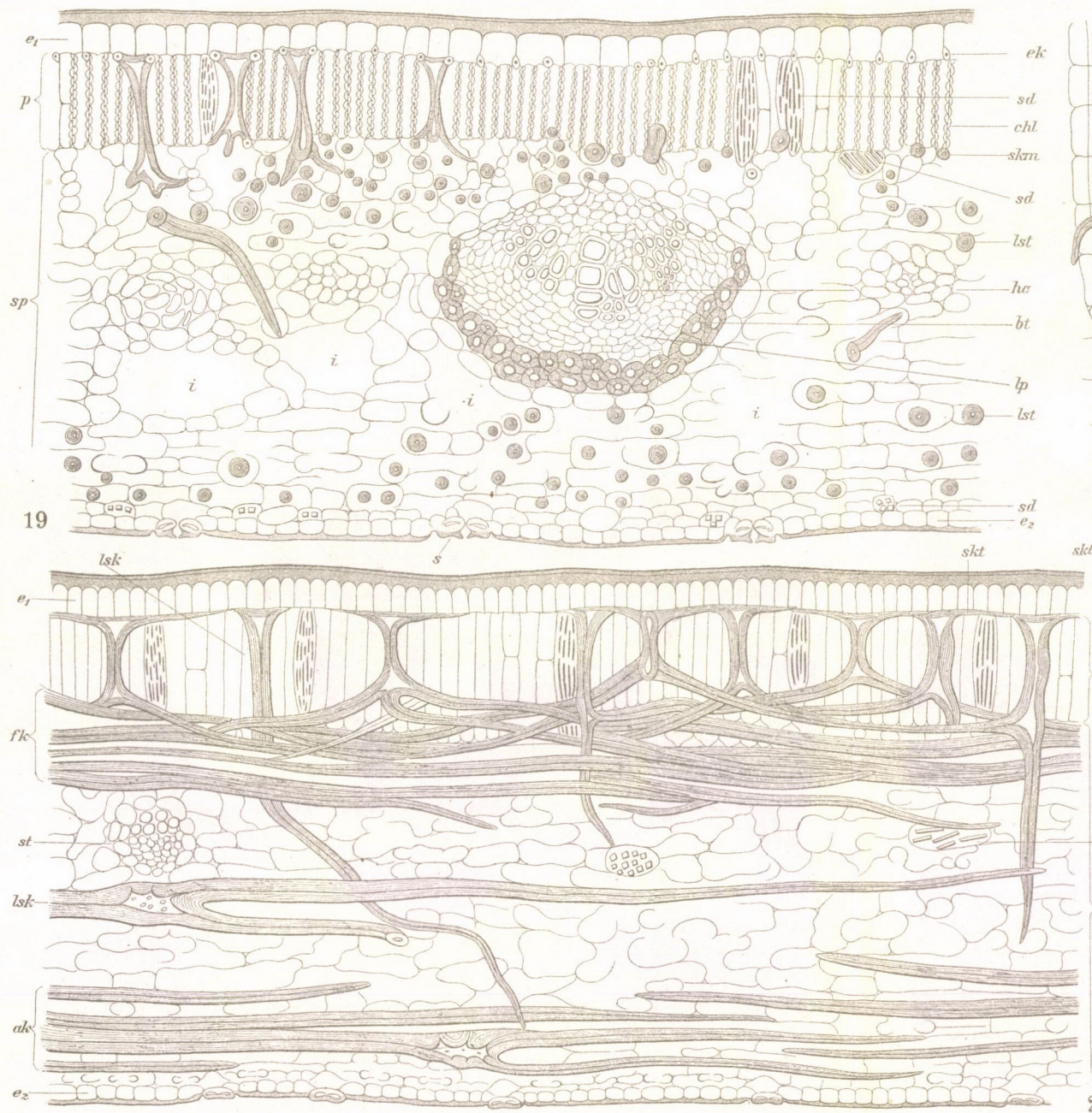
Geöcze Zoárd.



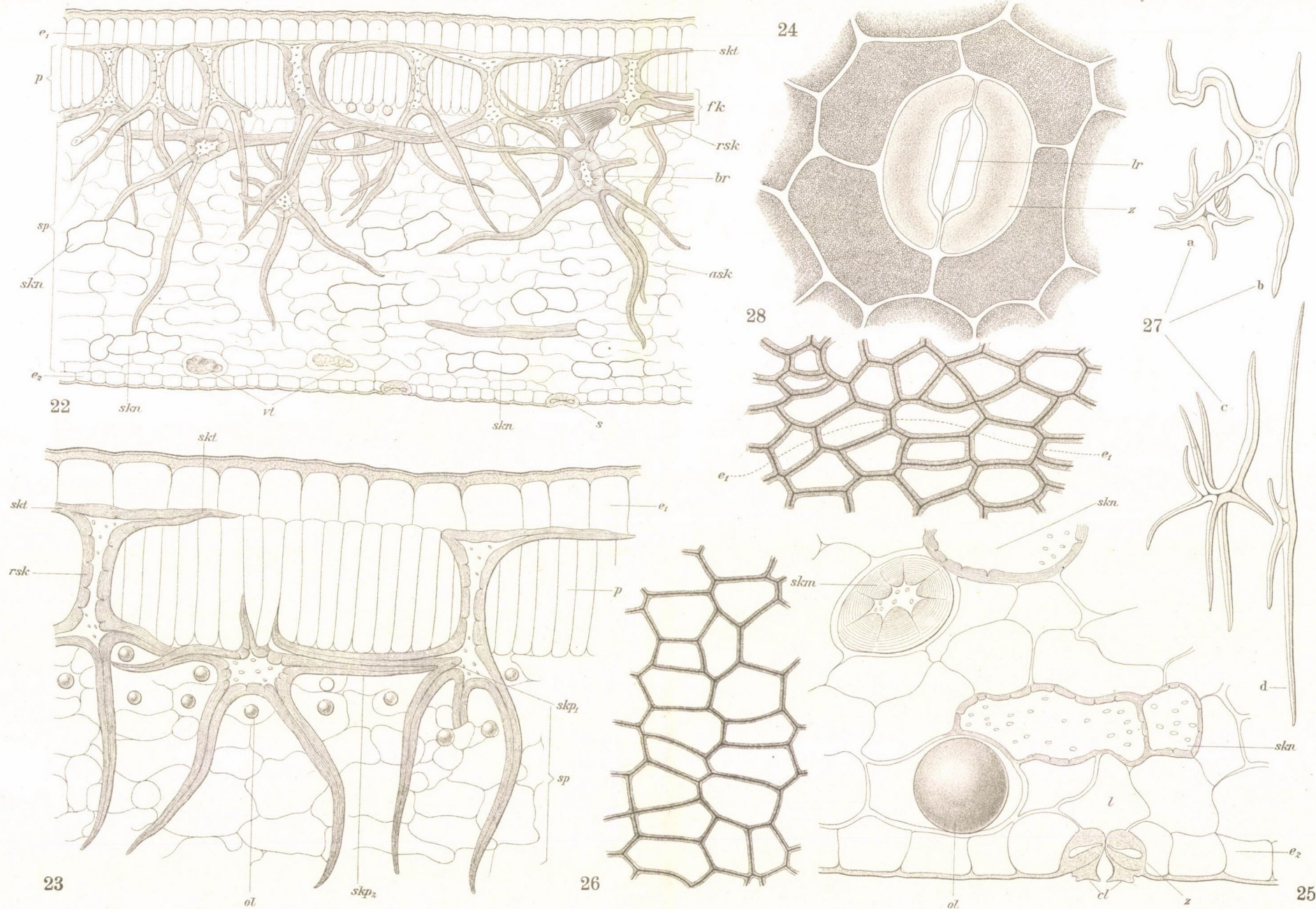












del. A. Richter: Vindobonae a. 1915.

Th. Bannwarth, Wien, VIII., lith. nyomása.



JELENTÉS

AZ ÓGYALLAI ASTROPHYSIKAI OBSERVATORIUMON VÉGZETT ASTROPHOTOMETRIAI MEGFIGYELÉSEKRŐL.

KONKOLY-THEGE MIKLÓS + tiszteleti tagtól.

A végtelen tért betöltő csillagos világ szerkezetére vonatkozó speculációk csak néhány évtized óta emelkednek biztos alapra, a mióta ugyanis a stellarasztronomiai és astrophysikai vizsgálatok eredményei egyaránt felhasználhatók a problema megoldására. Míg az ég szerkezetére vonatkozó tudás egyedül stellarasztronomiai megfigyeléseken alapuló speculációkon nyugodott, tulajdonképen csak ingó feltevésekből állott. De mióta az astrophysikának exact physikai törvényeken alapuló — az utolsó évtizedekből való — felfedezéseinek egész sora korunk nagyon tökéletesített segédeszközeinek igénybevételével oly korlátokat döntött le, melyek hosszú időn át a szó szoros értelmében gúzsba kötötték az astrometria kutatókat, vált lehetségessé az a lényeges haladás, mely a csillagos ég szerkezetét illető mai tudásunkat, mint szilárdan megalapozottat és physikailag megindokoltat, megkülönbözteti a korábbi idők ingó feltevéseitől.

A csillagos világ szerkezetét csak akkor ismerhetjük megközelítően, ha nemcsak az egyes csillagok és csillagrendszerek elrendeződését, azaz távolukat és mozgásukat ismerjük, hanem ha ismerjük fejlődésük folyamatának összes phasisait is. A csillagok világának fejlődési phasisainak sikeres tanulmányozásához a colorimetrikus, photometrikus és spectroscopikus megfigyelések karöltve járulnak, sőt a két utóbbi olyan mozgásokat derített ki, melyeket a stellarasztronomia nem tudott kimutatni.

Még a mult század második felében felismerték, hogy az

ilyen universalis problémák megoldásához minél több csillagnak fényét szükséges pontosan ismerni, mert a csillagfény pontos ismeretéből nemcsak a csillagszámra, a csillagtávra lehet következtetni, hanem a csillagfénynek változásából a csillagnak a látósugár irányába eső elmozdulására is. A csillagfény változása azonban nemcsak mozgással függhet össze, mert ennek oka a csillag felületén vagy közvetlen környezetében végbemenő változásokban is lehet. Ezeket a változásokat, illetve lefolyásuk törvényszerűségét csak gondos fényméréssel lehet megállapítani, különösen akkor, mikor a fényváltozás amplitudója csekély. A felsorolt tények horderejének felismerése nemcsak az astrophotometriai módszereknek és műszereknek tökéletesítésére vezetett, hanem arra is, hogy az astrophotometria exact művelésével mind szélesebb körben kezdtek foglalkozni.

A visuális photometria fejlesztése főleg az amerikai HARVARD-observatorium és a potsdami observatorium működéséhez, a photographikus photometriáé pedig főleg SCHWARZSCHILD, a göttingai csillagvizsgáló volt igazgatója nevéhez fűződik, ki jelenleg a potsdami csillagvizsgáló élén áll.

Míg PICKERING, a HARVARD-observatorium igazgatója és tanítványai az ég legnagyobb részének photometrikus átkutatását végezték, addig MÜLLER és KEMPF tanárok, a potsdami astrophysikai observatorium főobservatorai, az ég északi felének photometrikus átkutatására szorítkoztak s fénykatalogusukban azon 14,199 csillagnak, melyeknek becsült rendje a Bonner Durchmusterung szerint 7.5 csillagrendnél nem kisebb, adják visuális photometrikus fényrendjét oly pontossággal, mely az astrophotometria fejlődésében határkövet látszott állítani. A világ-hírré emelkedett Potsdamer Durchmusterung megtervezésekor MÜLLER és KEMPF szeme előtt az a cél lebegett, hogy az astrophotometria tovafejlődése szempontjából alapvető munkát nyújtsanak. Ez nekik teljes mértékben sikerült is, a mennyiben négy részben megjelent fénykatalogusuk egyes adataira talált valószínű hibák értékeinek kifogástalan egyezése nemcsak az egész munka homogen voltát igazolja, hanem a valószínű hibák kicsiny volta egyúttal fokmérője a potsdami fénykatalogus pontosságának és megbízhatóságának, a mi munkájukat classikus

műnek minősíti. Ezt a kiváló eredményt a szerzők elsősorban az összehasonlító csillagok photometrikus triangulatio útján megállapított rendszerének köszönhetik. Növeli katalogusuk értékét még az is, hogy ez az első rendszeres és teljesen homogén szinkatalogus.

Annak a munkának folytatását, melyet a potsdamiak az Ég északi feléről nyújtottak, Ógyallán óhajtottuk adni. Feladatunkul azért kitűztük, hogy a déli éggömbnek $\delta = -0^\circ$ -tól $\delta = -15^\circ$ -ig terjedő zónáját a *BD* szerinti 7.5 nagyságrendig photometrice megfigyeljük. Erre az ógyallai csillagvizsgáló annál is inkább vállalkozhatott, mivel az intézet államosítása után KÖVESLIGETHY RADÓ volt aligazgató és HARKÁNYI BÉLA báró volt observator kezdeményezésére modern astrophotometerekkel szereltetett fel s mivel az intézet fényváltozó csillagokra vonatkozó megfigyelései mértékadó külföldi helyekről is elismerésben részesültek. Az ógyallai fénykatalogust a kérdéses határig azért óhajtottuk kiterjeszteni, mivel a potsdami spektroszkopiai katalogus egyenes folytatásaként tekinthető ógyallai spektroszkopiai katalogus¹ is eddig a határig terjed.

Műszerül két ZÖLLNER-féle astrophotometer szolgált, melyeket az intézet O. TOEPFER potsdami mechanikustól szerzett be különböző photometriai megfigyelésekre. A műszer leírására nem kívánok kitérni, mert az intézet tisztviselői már több helyütt²

¹ Spectroskopische Beobachtung der Sterne zwischen 0° und -15° bis zur 7.5-ter Grösse; Beobachtungen angestellt am Astrophysikalischen Observatorium in Ógyalla, Band VIII, 2-ter Theil. Halle 1887. A megfigyelések eredményei magyar nyelven a Magyar Tudományos Akadémia által kiadott «Értekezések a Matematikai Tudományok köréből» című sorozat X. (1885), XII. (1886) és XIII. (1887) kötetében is megjelentek.

A katalogus 2022 csillagnak spectráltypusát adja, melyeket dr. KÖVESLIGETHY RADÓ, a csillagvizsgáló akkori observatora, a 160 mm-nyílású Merz-refractoron állapított meg. Olyan esetekben, mikor valamely csillag spectráltypusa a műszerrel nem volt megállapítható, a kérdéses csillag a 254 mm-nyílású refractoron figyeltetett meg KONKOLY és KÖVESLIGETHY által.

² TASS ANTAL. A ZÖLLNER-féle photometer. Matematikai és Fizikai Lapok. XII. (1903). Ugyanattól a csillagvizsgáló kisebb kiadványainak 3. számában (1904). TERKÁN LAJOSTÓL ugyane sorozat 9. számában (1906); továbbá TERKÁN LAJOSNAK «A tudományos asztrofotometria és jelentősége» című művében (1912) is megjelent.

ismertették. Vele két csillag photometrikus fénykülönbsége az

$$m_1 - m_2 = - \frac{1}{0.4} \log \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

képlet szerint határoztatik meg, melyben α_1 , illetve α_2 a műszer intenzitáskörén leolvasott adatok. Ha tehát az egyik csillag photometrikus rendje adott, a másiké könnyen meghatározható egyszerű differentiális méréssel. A két csillag fénykülönbségének meghatározására mérhető módon változtatható mesterséges csillag szolgál, melynek intenzitása, differentiális mérésekről lévén szó, végeredményben kiesik, feltéve természetesen, hogy a megfigyelések folyamán a mesterséges csillagot szolgáltató fényforrás fényereje nem változik meg. Ez a körülmény mindazokat, kik photometriai vizsgálataikhoz ZÖLLNER-féle photometereket használtak, a mesterséges csillagok tökéletesítésére ösztönözték. Már maga ZÖLLNER is fáradozott ezen. Sokáig egy elmés szerkezetű, de filigran petróleumlámpa szolgált fényforrásul, mely úgy van szerkesztve, hogy a láng magassága mérhető módon ellenőrizhető legyen. A kellő óvatosság és gondosság mellett órákra is lehetett a láng állandó voltában bízni, de mivel csak néhány gyertyafényű kis égőt lehet alkalmazni, a műszer optikai közegein áthaladó fénynyaláb sokat veszít intenzitásából és színárnyalataiból, úgy hogy a mesterséges csillagok képei, a valódi csillagok élénk és nyugtalan képei mellett, halvány s bágyadt korongok. A valódi és mesterséges csillagok ez eltérő volta rögtön szembeötlök s nagy gyakorlat szükséges ahhoz, hogy a szem a két fényhatás egyenlőségének megítélésében a kellő biztonságra tegyen szert. E hátrány kiküszöbölése végett sok helyütt kísérleteztek elektromos fénynyel, de a szénszálas lámpák nem váltak be. Ógyallán sikerült először a petróleumlámpát kifogástalan módon helyettesíteni elektromos fénynyel, mint erről TASS az *Astronomische Nachrichten* 4138. számában beszámolt. TASS Nernst-lámpával kísérletezett, melynek egyenletes s intensiv fehér fénye kiválóan alkalmas összehasonlító fényforrásul, annál is inkább, mert egyrészt a lámpa elhasználandó alkatrészei könnyen kicserélhetők, másrészt pedig mivel a Nernst-lámpákat 16-tól 250-ig terjedő Hefner-gyertya fényerősségben

készítik. Hogy a terjedelmesebb Nernst-lámpa a petroleumlámpa kicsiny tartályának helyén elférjen, csak a Nernst égőteste került a petroleumlámpa helyére, az előtét ellenállás a távcső oszlopára lett szerelve. Az áramkörbe iktatott s a megfigyelési adatok feljegyzésére szolgáló asztalka fölé szerelt voltmeter és rheostat segítségével a Nernst-lámpát tápláló áramot állandó feszültségen lehet tartani s ez által az összehasonlításul szolgáló mesterséges csillag intenzitását állandósítani. Ezzel az egyszerű változtatással a régi összehasonlító fényforrás minden fogyatkozása megszűnt s a mellett a mesterséges csillagok szintelt, tömör fénypontoknak látszanak, a mi a fényegyenlőség megítélésének biztonságát nagy mértékben fokozza.

A potsdamiakétől eltérő e berendezésünk ismertetése után áttérhetek az ógyallai nagyobb szabású photometriai munkák ismertetésére, mert ezeknek első része befejezett egész s legközelebb sajtó alá kerül. Az ógyallai fénykatalogus első $\delta = -0^\circ$ -tól $\delta = -10^\circ$ -ig terjedő része 2122 csillagnak a *BD* szerint 7.5 mg-ig bezárólag adja a photometrikus csillagrendjét. Második $\delta = -11^\circ$ -tól $\delta = -15^\circ$ -ig terjedő része 1064 csillagnak fogja photometrikus rendjét adni, a mihez még hozzájárul majd a $\delta = +0^\circ$ -tól $\delta = +4^\circ$ -ig terjedő égöv 723 csillagja, úgy hogy az ógyallai fénykatalogus második része 1787 csillagnak, a teljes tehát 3909 csillagnak photometrikus rendjét fogja adni. Az északi éggömb jelzett övében lévő csillagok megfigyelése azért szükséges, hogy fénykatalogusunk a potsdamival közvetlen kapcsolatba legyen hozható.

Az ógyallai visuális fénykatalogus első része TASS, TERKÁN és részben FEJES munkája. A programm kitűzéséhez szükséges előmunkákat TASS végezte, a programm kivitelével pedig TERKÁN és FEJES adjunctusok voltak megbízva. FEJESnek az intézettől 1906-ban történt kiválása után TASS observator vállalta a munkának a távozóra eső részét, mivel alkalmas utód nevelése és az intézet részére való megtartása, tekintve az egyik adjunctusi állással járó csekély anyagi javadalmazást, nagyon is kétségesnek volt tekintendő. A programm első részének kivitele egyébként 1904 szeptember 8.-ától 1913 december 8.-áig terjedő időközre esik és 380 megfigyelési napot ölel fel. FEJES megfigyeléseiből

TASS és TERKÁN urak csak néhány összehasonlítóra vonatkozó észlelést értékesítettek, de gondosan megvizsgálták azt a körülményt, okoz-e ezek megtartása inhomogenitást. Mivel a vizsgálat teljesen kielégítő eredménynyel végződött, nem lett volna értelme FEJES eredményeit mellőzni.

Hogy az ógyallai fénykatalogus csillagrendjei a potsdami fényrendszer értékeivel állíttassanak elő, az ógyallai fénykatalogus 139 összehasonlító csillagának photometrikus rendje a potsdami fénykatalogus fundamentális csillagjaihoz való összehasonlítással határozott meg. Mindegyik észlelő minden egyes összehasonlító csillagot 5—5 ízben figyelt meg, úgy hogy az összehasonlító csillagok meghatározása, beleértve a kiindulásul használt potsdami csillagok megfigyelését is, 2432 észlelésből állott, melyek a photometer intenzitáskörén 9728 beállítást követeltek. E megfigyelések 219 esetben, vagyis az összes esetek 9%-ában történtek 60° -nál nagyobb zenittávolság mellett, 70° -nál nagyobbánál mindössze 17 esetben történt megfigyelés. Az előfordult legnagyobb zenittávolság értéke $74^\circ.9$ volt, vagyis a legkedvezőtlenebb esetben is csak 10° -nyira lett megközelítve az a határ, melyen túl photometrikus megfigyelések már nem végezhetők komolyan.

Az összehasonlító csillagok meghatározásakor elért pontosságról a munka VI. táblázata nyújt felvilágosítást, mely az egyes összehasonlítókra nyert középértékek valószínű hibáit adja. E táblázat adatai szerint az összehasonlító csillagok adatai valószínű hibáinak közepe $\pm 0^m.031$, mi a potsdami fundamentális csillagokra számított valószínű hibák átlagos értékétől ± 0.020 mg-val tér el; a csekély eltérés megnyugtató s egy magában is igazolja, hogy a program kivitelezése felmerült, főleg az időjárás szeszélyeitől eredő nehézségek ellenére a kitűzött feladat kielégítő pontossággal oldott meg. Ezt még jobban igazolja a következő kis táblázat is, mely annak a vizsgálatnak eredményeit tartalmazza, vajjon vannak-e a két észlelő egyéni felfogása között rendszeres eltérések, melyek onnan származhatnak, hogy a különböző megfigyelők a különböző színű és fényű csillagokat nagyon is eltérő subjectivitással figyelik. Ennek megállapítása végett TASS, kitől a megfigyelések teljes

feldolgozása való, meghatározta a TASS és TERKÁN eredményei közötti különbségeket és ezeket a fényesség szerint csoportosította a következő módon:

Csillagrendköz	Csillagszám	Eltérés			Ta—Te értékek
		+	0	—	
4·00-tól 4·49 mg	1	0	0	1	—0·080 mg
4·50 „ 4·99 „	12	7	1	4	+0·015 „
5·00 „ 5·49 „	14	9	0	5	+0·023 „
5·50 „ 5·99 „	22	8	2	12	—0·010 „
6·00 „ 6·49 „	20	12	1	7	+0·022 „
6·50 „ 6·99 „	28	16	0	12	+0·011 „
7·00 „ 7·49 „	28	12	2	14	+0·006 „
7·50 mg-nél kisebb	14	7	0	7	—0·006 „
Összeg:		139	71	6 62	

Az összeállítás szerint a 139 összehasonlítóra nyert eredmény között 6 csillagnál egyáltalán nem volt eltérés, 71 csillagnál a Ta-Te értékek közötti eltérések pozitív, 62 csillagnál pedig negatív előjelűek. A pozitív és negatív eltérések közel egyenlő, valamint az eltérések értékeinek kicsiny volta arra utal, hogy számbavehető menetről, vagy rendszeres eltérésről szó sem lehet.

Az egész munka gerinczét tevő összehasonlító csillagokra vonatkozó vizsgálatok a munka második fejezetében vannak ismertetve, melyben a felsoroltakon kívül még kimerítően vannak tárgyalva azok a fontos szempontok is, melyeket az összehasonlító csillagok megválasztásakor tekintetbe kell venni. Ugyancsak e fejezet tartalmazza az összehasonlító meghatározására végzett megfigyeléseket is. Mivel e fejezet adatai alkotják azt a szilárd vázat, melyre az egész munka támaszkodik, szükségesnek láttuk e fejezetet elsősorban ismertetni.

Az első fejezet az astrophotometria történeti fejlődésének vázlatos ismertetését adja, de mindamellet olyan részletes-séggel, hogy e tekintetben irodalmunkban forrásmunkául is szolgálhat. A csillagrend fogalmának történeti kialakulása kapcsán a becslésen alapuló fénykatalogusok ismertetése után rátér a szerző a csillagrend szigorú értelmezésének levezetésére, a photo-

metrikus fényskála jelentőségének s mindama szempontoknak ismertetésére, melyeknek betartása mellett egy modern photometrikus fénykatalogusnak készülnie kell. A szükséges részletességgel kritikailag méltatja a modern vizuális photometrikus fénykatalogusokat, végül kidomborítja azt a célt, melyet a munka kitűzésekor szem előtt tartottak s adja a megfigyelésekre használt műszer rövid elméletét.

A harmadik fejezet a zónacsillagok megfigyelését tartalmazza. Az 1983 zónacsillag közül a megkívánható pontosság biztosítása végett 1637 csillagot 2—2 ízben, 483-at 3—3, 103-at 4—4, 21-et 5—5 és végül 7-et 6—6 ízben kellett megfigyelniök. A zónacsillagok megfigyelése 6380 észlelésből állott, a photometer intensitáskörén végzett leolvasások száma tehát 25.200. A 6380 észlelés közül 5400 történt 60° -nál kisebb, a többi 980 megfigyelés 60° -nál nagyobb zenittávol mellett. A legnagyobb zenittávol $77^\circ 5'$ volt; 70° -nál nagyobb zenittávolság mellett mindössze csak 38 esetben történt megfigyelés. A zónacsillagok megfigyelése tisztán TASS és TERKÁNTÓL való. A megfigyelések közlését a megfigyelési esték levegőállapotának feltüntetése követi. A fejezetet az elért pontosságot tárgyaló fejtegetések zárják be, melyekből kiderül, hogy egy-egy katalogusérték valószínű hibája ± 0.078 mg; az eredmény tehát teljesen kielégítő.

A negyedik fejezet adja a fénykatalogust. Minthogy színbecsléseket az átlátszatlan levegő miatt nem végeztek, egy külön színjegyzékben fel vannak sorolva azok a csillagok, melyeknek színét a KÖVESLIGETHY-féle ógyallai spektroszkopiai katalogus adja.

Legérdekesebbek és legértékesebbek az ötödik fejezet fejtegetései, melyek az ógyallai és más fénykatalogusok eredményeinek összehasonlítását tartalmazzák, a mi természetes is, mert egy photometrikus fénykatalogusnál a főérdeklődés éppen ilyen összehasonlításra koncentrálódik. A program kitűzésekor az ógyallai csillagászok szeme előtt, mint már említettem, az a cél lebegett, hogy a mintaszerű potsdami fénykatalogust a déli éggömbnek a -0° és -15° declinatiók határolta övére kiterjeszszék a potsdamiak pontosságával. Hogy mennyiben sike-

rült a kitűzött célzt elérni, azt éppen eredményeiknek más fénykatalogusokéival való összehasonlítása mutatja. A munka kész első részét a PRITCHARD féle «Uranometria Oxoniensis», a PICKERING-féle «Harvard Photometry» és «Photometric Revision of the Bonner Durchmusterung» cz. fénykatalogussal hasonlította össze Tass, azonkívül mivel az anyag kiválasztásakor a Bonner Durchmusterung szolgált alapul, TASS és TERKÁN fénykatalogusuk adatait ezzel is összehasonlították. Midőn ezzel az utóbb említett összehasonlítással elkészültek, akkor volt kénytelen TERKÁN hadiszolgálatra bevonulni s így a többi összehasonlítás s az egész anyag feldolgozása TASS vállaira nehezedett.

Az ógyallai fénykatalogusnak a *BD* becsült adataival való összehasonlításának eredményeit adja a következő táblázat:

A csillagok fényessége	Összehasonlító csillagok		Zónacsillagok	
	<i>Cs. sz.</i>	<i>Ó—BD</i>	<i>Cs. sz.</i>	<i>Ó—BD</i>
Fényesebb 3·0 mg-nál	—	—	9	+0·15
3·01—4·00 mg	—	—	18	+0·14
4·01—5·00 «	15	+0·05	53	+0·08
5·01—6·00 «	35	—0·06	169	—0·04
6·01—7·00 «	47	—0·05	761	—0·09
7·01 mg-nál gyengébb	42	+0·11	973	+0·16
Összeg	139	+0·005	1983	+0·05

A táblázat szerint az *Ó—BD* eltérések az 5·0 mg-tól kezdve nem mutatnak menetet s oly kicsiny értékűek, hogy az *Ó—BD* különbségek nagy közelítéssel állandónak tekinthetők. Ez arra mutat, hogy a bonni becsült rendszernek a $\delta = -0^\circ$ és $\delta = -10^\circ$ közötti része teljesen simul az ógyallai rendszerhez. Összehasonlítás kedvéért ideiktatjuk a potsdami fénykatalogus egyes részeinek a *BD* adataival való összehasonlításának eredményeit:

A csillagok fényessége	Potsdam I. ¹⁾ +0°-tól +20°-ig		Potsdam II. ²⁾ +20°-tól +40°-ig		Potsdam III. ³⁾ +40°-tól +60°-ig		Potsdam IV. ⁴⁾ +60°-tól +90°-ig	
	Cs. sz.	P_1-BD	Cs. sz.	P_2-BD	Cs. sz.	P_3-BD	Cs. sz.	P_4-BD
Fényesebb 3·0 mg-nál ———	9	+0·55	12	+0·34	11	+0·27	4	+0·32
3·0—3·4 mg ———	21	+0·42	24	+0·22	11	+0·25	9	+0·34
3·5—3·9 „ ———	26	+0·36	15	+0·22	14	+0·31	6	+0·06
4·0—4·4 „ ———	42	+0·19	46	+0·25	29	+0·16	6	+0·29
4·5—4·9 „ ———	45	+0·08	64	+0·13	43	+0·13	24	+0·15
5·0—5·4 „ ———	108	+0·04	126	+0·05	106	+0·00	69	+0·04
5·5—5·9 „ ———	167	—0·06	164	—0·01	129	+0·04	70	—0·02
6·0—6·4 „ ———	327	+0·01	391	+0·09	399	+0·06	220	+0·13
6·4—6·9 „ ———	658	+0·06	912	+0·19	844	+0·20	456	+0·24
7·0—7·4 „ ———	1252	+0·02	1628	+0·26	1583	+0·30	761	+0·26
7·5 ———	680	—0·03	904	+0·27	805	+0·32	431	+0·28
Összeg ———	3335	+0·02	4286	+0·21	3974	+0·24	2056	+0·23

¹⁾ Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. IX. Photometrische Durchmusterung des nördlichen Himmels enthaltend alle Sterne der B. D. bis zur Grösse 7·5 von G. MÜLLER és P. KEMPF. Theil I. 487 old. — ²⁾ U. o. Bd. XIII. Theil II. 454 oldal. — ³⁾ U. o. Bd. XIV. 438 oldal. — ⁴⁾ U. o. Bd. XVI. 265 oldal.

A táblázat adatai szerint a $P-BD$ különbségek a declinációk szerint beosztott övekben változó magatartást mutatnak. A P_1-BD különbségek a szabad szemmel látható csillagoknál a fényesség csökkenésével csökkenő menettel bírnak, mely a teleskopikus csillagoknál eltűnik. A P_2-BD különbségek menete a fényesség csökkenésével a szabad szemmel látható csillagoknál csökkenő, a teleskopikusoknál növekedő. A megengedett ingadozásokat nem tekintve: a P_3-BD és P_4-BD különbségek menetének természete a P_2-BD különbségekéhez hasonló. Mindezekből a következő törvényszerűségek folynak.

A P_1-BD különbségek közepének értéke a teleskopikus csillagoknál $+0^m01$, a mi arra mutat, hogy a potsdami fénykatalogus I. része teleskopikus csillagjainak fényrendszere összehasonlul a BD fényrendszerrel. Ez az eredmény a potsdami összehasonlító csillagok meghatározásának módjából egyébként is következik, mert a potsdamiak úgy határozták meg összehasonlító csillagaik rendjét, hogy a teleskopikus csillagoknál találkozzék a potsdami photometrikus rendszer a bonni becsült fényrendszerrel. Így a tekintetbe vett övben és fényközben egy photometrikus csillagrendkülönbség értéke egyenlő egy becsült csillagrendkülönbséggel. A fényesebb csillagoknál pedig a P_1-BD eltérések graphikai kiegyenlítése arra vezetett, hogy ezek csillagrendenként 0.177 ± 0.0058 értékkel változnak meg, a miért is egy bonni csillagrend a kérdéses fényközben 0.823 photometrikus csillagrenddel egyenlő. Két egymás után következő csillagrend intenzitása logaritmusaának viszonya tehát a Pogson-féle $\log \rho = 0.4$ érték helyett 0.329 értékre vezet. A P_2-BD , P_3-BD és P_4-BD különbségek menetéből hasonló módon adódott, hogy a szabad szemmel látható csillagoknál egy bonni csillagrend rendre 0.905 , 0.935 , 0.915 , a teleskopikusoknál pedig rendre 1.142 , 1.057 , 1.21 photometrikus csillagrenddel egyenlő, a miből $\log \rho$ -ra rendre a következő értékek adódnak: 0.362 , 0.361 , 0.366 ; illetve 0.457 , 0.423 , 0.484 . Ezek szerint a bonni fényskálaban két egymásután következő csillagrend intenzitása viszonyának logaritmusa nem állandó, vagyis adódik, hogy a bonni fényskála nem homogen skála.

Ugyanerre az eredményre vezetnek az $O-BD$ különbségek

is. Az 5·0 mg-nél fényesebb zónacsillagoknál az $\dot{O}-BD$ különbségek közepe 0^m09, az 5·0 mg-nél gyengébbeknél a különbségek közepe 0·01 mg, vagyis az összehasonlító csillagok $\dot{O}-BD$ különbségeinek közepével teljesen egyező; ez arra mutat, hogy a gyengébb csillagoknál az ógyallai fényrendszer összesimul a bonnival, a fényesebbeknél ellenben nem. Ez az eredmény is igazolja, hogy megfigyeléseink adatait a potsdami rendszerben sikerült kifejezni, mivel ellenkező esetben az $\dot{O}-BD$ különbségek magatartása a kérdéses fényközben más volna. Ha a fényesebb csillagoknál mutatkozó $\dot{O}-BD$ különbségek menetét egyenes vonallal előállíthatónak tételezzük fel, arra az eredményre jutunk, hogy a tekintetbe vett fényközben egy bonni csillagrend 0·956 ógyallai photometrikus csillagrenddel egyenlő $\log \rho$, vagyis két egymásután következő csillagrend fényessége viszonyának logaritmusa = 0·382.

PRITCHARD említett fénykatalogusában a $\delta = -10^\circ$ -tól az északi pólusig terjedő övben a szabad szemmel látható csillagok közül 2784-nek adja photometrikus rendjét. A PRITCHARD-féle és az ógyallai fénykatalogus 309 közös csillagot tartalmaz. PICKERINGnek a «Harvard Photometry»-je (röviden H_{14}) az ógyallaival 429 közös csillagot, «Photometric Revision»-ja (röviden H_{24}) 675 közös csillagot tartalmaz. E három fénykatalogusnak az ógyallaival való összehasonlítása eredményét a következő táblázatban mutatjuk be. (Lásd a köv. old.)

A táblázat adatai szerint

$$\begin{aligned}\text{Ógyalla—Uranometria} &= +0\cdot12 \text{ mg} \\ \text{Ógyalla—Harvard } 14 &= +0\cdot14 \text{ „} \\ \text{Ógyalla—Harvard } 24 &= +0\cdot07 \text{ „}\end{aligned}$$

Az említett potsdami fénykatalogus egyes részeinek PRITCHARD adataival való összehasonlítása végeredményben a következőre vezetett:

$$\begin{aligned}P_1-U &= +0\cdot13, \text{ az egyes eltérések amplitudója } 0\cdot25 \text{ mg} \\ P_2-U &= +0\cdot14, \text{ „ „ „ „ } 0\cdot23 \text{ „} \\ P_3-U &= +0\cdot12, \text{ „ „ „ „ } 0\cdot24 \text{ „} \\ P_4-U &= +0\cdot12, \text{ „ „ „ „ } 0\cdot20 \text{ „}\end{aligned}$$



A csillagok fényessége	Ógyalla— Uranometria nova Oxon.		A csillagok fényessége	Ógyalla— Harvard Photometry		A csillagok fényessége	Ógyalla— Photometric Revision	
	Cs. sz.	Ó-U.		Cs. sz.	Ó-H ₁₄		Cs. sz.	Ó-H ₂₄
Fényesebb 4·0 mg-nél	26	+0·10	Fényesebb 3·0 mg-nél	10	+0·11			
4·01—5·00 mg — — —	57	+0·10	3·00—3·99 mg — — —	18	+0·03			
5·01—6·00 „ — — —	149	+0·07	4·00—4·99 „ — — —	61	+0·21	Fényesebb 5·0 mg-nél	36	+0·08
6·01-nél gyengébb — — —	77	+0·21	5·00—5·99 „ — — —	193	+0·01	5·00—5·99 mg — — —	90	+0·04
			6·00—6·99 „ — — —	141	+0·25	6·00—6·99 „ — — —	313	+0·05
			7·00-nál gyengébb — — —	6	+0·13	7·00-nál gyengébb — — —	236	+0·09
Összeg és középérték	309	+0·12	Összeg és középérték	429	+0·14	Összeg és középérték	675	+0·07

Mindezekből következik, hogy az összközép értéke:

$$\text{Potsdam—Uronometria} = +0.13 \text{ mg.}$$

A Potsdam—Uranometria különbségek átlagos értéke tehát teljesen azonos az Ógyalla—Uranometria különbségek közepének értékével, a mi arra mutat, hogy az ógyallai fénykatalogus önmagában homogen skálával bír. Tekintve pedig, hogy az Ó—U különbségek amplitudója mindössze 0.14 mg, vagyis kisebb a P—U különbségek legkisebb amplitudójánál, bátran mondhatjuk, hogy az ógyallai fényrendszert semmiféle egyenlőtlenség nem terheli s hogy sikerült igen nagy megközelítéssel az ógyallai fényrendszert a potsdamiban kifejezni.

Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a Potsdam- és Harvard-fénykatalogusok összehasonlításának eredményeit vesszük alapul. Ugyanis:

m				
$P_1 - H_{14} = +0.17$,	az eltérések amplitudója	0.15 mg		
$P_2 - H_{14} = +0.18$,	"	"	0.14	"
$P_3 - H_{14} = +0.16$,	"	"	0.06	"
$P_4 - H_{14} = +0.13$,	"	"	0.10	"

vagyis végeredményben:

$$\text{Potsdam—Harvard Photometry} = +0.16 \text{ mg};$$

s ezzel szemben Ógyalla—Harvard Photometry = +0.14 mg, noha az egyes eltérések ugrásszerű, de a megengedett határon belül maradó s a photometrikus mérések természetéből folyó ingadozásokat mutatnak.

Az Ógyalla—Harvard 24 közötti különbségek átlagos értéke némileg eltér a Potsdam—Harvard 24 különbségek középértékétől. Ugyanis:

m				
$P_1 - H_{24} = +0.13$,	az eltérések ingadozási köze	0.21 mg		
$P_2 - H_{24} = +0.16$,	"	"	0.19	"
$P_3 - H_{24} = +0.12$,	"	"	0.14	"
$P_4 - H_{24} = +0.11$,	"	"	0.15	"

végeredményben tehát:

$$\text{Potsdam—Harvard Photometric Revision} = +0.13 \text{ mg.}$$

Ez az összeállítás azt mutatja, hogy a Photometric Revision skálája nem teljesen homogen, mert a $P-H_{24}$ különbségek csillagrendenként különböző módon változnak meg. Ugyanerre az eredményre jutott MÜLLER és KEMPF, mikor a Harvard 24 jelzésű fénykatalogust a Harvard-observatorium későbbi évkönyveiben megjelent fénykatalogusokkal hasonlította össze. Ez összehasonlításakor kitűnt, hogy az egyes Harvard-fénykatalogusok között systematikus eltérések vannak, és pedig a csillagfénytől függő és csillagrendenként változó eltérések.

Végeredményben tehát kimondhatjuk azt, hogy az ógyallai fénykatalogus első része önmagában véve homogen rendszer. Hogy az ógyallai fénykatalogus a potsdamival közvetlen kapcsolatba legyen hozható, a második részbe tartozó csillagok megfigyelése alkalmával a $\delta = -10^\circ$ -tól $\delta = +4^\circ$ -ig terjedő öve az égnek a 7.5 csillagrendig bezárólag lesz megfigyelve. Így a potsdami fénykatalogussal 723 közös csillag áll rendelkezésre a két fénykatalogus direct összekapcsolására. Az indirect összehasonlítás a

$$\begin{aligned} P-U &= +0.13 \text{ mg, } \acute{O}-U = +0.12 \text{ mg} \\ P-H_{14} &= +0.16 \text{ " , } \acute{O}-U_{14} = +0.14 \text{ " } \\ P-H_{24} &= +0.13 \text{ " , } \acute{O}-U_{24} = +0.07 \text{ " } \end{aligned}$$

összefüggésekből

$$\text{Potsdam}-\acute{O}\text{gyalla} = +0.03 \text{ mg}$$

eredményre vezet, mely érték tájékoztatást nyújt annak megállapítására, mennyiben éretett el a kitűzött cél.¹

★

Az egyedüli kifogás, melyet az ógyallai fénykatalogus ellen látszólag emelni lehet, az, hogy színmegfigyelések nem végeztek. Ez a kifogás is elesik, ha tekintetbe vesszük az Ógyallán évek óta folyó actinometrikus megfigyeléseket. Noha ezek befejezésétől még messze vagyunk, a mit főleg a háború okozta

¹ A külföldre való tekintettel az observatorium Nagyobb kiadványai németül is megjelennek.

zavarok idéztek elő, mégis indítatva érzem magam, hogy ez alkalommal a csillagvizsgáló-intézet e munkálatairól is röviden beszámoljak.

Mint látjuk, eddig több visuális photometrikus katalogussal rendelkezünk, mostanáig azonban nem létezett olyan terjedelmesebb fénykatalogus, mely a sugárzás actinikus részét illetőleg ugyanazt a célzt követné, melyet a visuális photometria tartott szem előtt. Különböző kísérletek történtek az utolsó évtizedekben e téren, de sem a focalis photographikus felvételek, sem az extrafocalis felvételek nem vezettek a kellő eredményre. A photographikus-photometrikus módszereknek elsősorban ökonomikusoknak kell lenniök s a mellett oly pontosságot kell nyújtaniok, hogy a visuális photometria pontosságának mértékét elérjék. A focalis csillagképek korongjai, a mérés nehézségét nem tekintve, még azt a nehézséget is támasztják, hogy az optikai tengelytől való kis távolságokban már is oly deformatiók állnak be, hogy átmérő és csillagrend között már nincsenek egyszerű vonatkozások. Ez a körülmény a focalis photographiai felvételeknek photometrikus értékesítését rendkívül megnehezíti, mert bonyodalmas számításokat és kellőleg nem indokolható correctiók alkalmazását követeli. Az égneik ily módszerek szerint való átkutatása igen költséges lenne, mert óriási apparatust és nagyszámú munkaerőt igényelne. Az extrafocalis felvételeknél ugyancsak bonyolódott összefüggések jelentkeznek csillagrend és sötétedés között s még az által is támadnak új nehézségek, hogy az egymáshoz közel álló csillagok extrafocalis képei egymást fődik.

SCHWARZSCHILD hosszas kísérletek után oly eljárást vezetett be, mely nemcsak kikerüli az extrafocalis és átmérős módszerek minden nehézségét, hanem oly pontossággal is bír, mely a photometrikus átkutatással szemben joggal támasztható igényeket messze túlhaladja és a mellett systematikusan ható hibáknak csak kis mértékben van alávetve.

A SCHWARZSCHILD módszere szerint készült photographiai-photometrikus átkutatás első része 1912-ben jelent meg a következő czímmel: «Aktinometrie der Sterne der *BD* bis zur Grösse 7.5 in der Zone 0° bis $+20^{\circ}$ Deklination.» Az actinometrikus katalogus ez első része csodálatos gyorsasággal készült el, a mi

annak a körülménynek tulajdonítandó, hogy SCHWARZSCHILDET munkájában négy szakképzett munkatársán kívül több hallgatója is támogatta. Ez a rész, mint a címből kitetszik, az Ég ugyanazon részének adja photographikus fényét, melyet a potsdami visuális fénykatalogus ölel fel. Az egész munka tehát 14,000 csillagnál több csillagnak actinikus adatait fogja tartalmazni. A munkának egyik részét, és pedig a potsdami visuális fénykatalogus negyedik részében foglalt anyag actinikus feldolgozását, Tass kezdeményezésére az ógyallai csillagvizsgáló vállalta magára, hol természetesen a visuálisan megfigyelt égövnek actinikus átkutatása is folyamatban van, úgy hogy végeredményben belátható időn belül 17,000-nél több csillag actinometrikus katalógusával fogunk bírni.

A megfelelő felvételek előállítására egy külön e célra beszerzett távcső szolgál, melyre a SCHWARZSCHILD-féle mozgókamara van szerelve, mely olyan szerkezettel bír, mely a felvétel alatt automatikusan két egymásra merőleges irányú mozgást végeztet a lemezzel, úgy hogy minden csillag képe 0.3 mm oldalhosszal bíró kis négyyszög, melynek sötétedése HARTMANN-féle mikrophotometerrel határozthat meg. A különböző csillagok sötétedésének különbségeiből meghatározhatók az egyes felvételek sötétedés-görbéi, melyekből a photographikus fényeségek aránylag egyszerű úton levezethetők.

Noha a folyamatban lévő munkáról részletesebb jelentést még nem tehetek, mégis röviden utalni óhajtanék azokra a szempontokra, melyek a vállalkozás tudományos értékét és nagy horderejét kidomborítják és melyek a göttingai actinometrikus katalógusnak a potsdami fénykatalógussal és a «Revised Harvard Photometry» cz. fénykatalógussal való összehasonlításából adódtak.

Úgy a visuális, mint a photographikus csillagfény különböző hullámhosszal bíró fénysugarak hatásának összege lévén, a visuális fénymérésekből és a színszűrők nélkül készült nem orthochromatikus lemezeken nyert felvételekből levezetett photographikus csillagrendek között színkülönbség okozta erős eltérés van. Ez a színegyenletnek nevezett eltérés olyan nagy, hogy a szín és a csillagspectrum energiaeeloszlásának mértékéül

szolgálhat. Ezért a photographikus csillagrend és a visuális csillagrend közötti különbségnek, a színindexnek igen nagy a jelentősége. Vele a csillagok physikai sajátságának egész sora levezethető. Így meghatározható a csillagok színindexéből a csillagok spectrumtypusa, színe, effectív hőmérséklete, sőt a csillagoknak spectrumtypusokra történt és önkényesnek látszó beosztását a színindex számszerű adatai homogen rendszernek tüntetik fel. A színindex segítségével egymásra továbbá átrendelhetők a különböző visuális photometrikus csillagfényrendszerek is. Ha tehát az egész munka elkészült, 17,000-nél több csillagnak fogjuk eme fontos physikai sajátságát ismerni, a mi a további kutatás szempontjából a legmesszemenőbb perspectívát nyújtja.

E tények vázlatos felsorolásával eléggé kidomborítani véltem a photographikus photometria nagy horderejét s rámutatni arra, hogy az ógyallai csillagvizsgálón mily komoly és fontos munkásság folyik. Az a mag, melyet a csillagvizsgáló államosítása utáni első években az intézet akkori szellemi vezetői, KÖVESLIGETHY¹ és báró HARKÁNYI volt munkatársaim elvetettek, termékeny talajra talált s a megfelelő gyümölcsöt hozza.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 márcz. 13-án tartott üléséből.)

VARRATCSONTOSODÁSOK A GYERMEKKORBAN.

LENHOSSÉK MIHÁLY rendes tagtól.

Ismeretes, hogy a koponya varratainak záródása igen ingadozó tünet, akár az idejét, akár a sorrendjét, akár pedig a fokát vesszük tekintetbe. De az ezzel foglalkozó széleskörű vizsgálatokból, a melyek közül mint legújabbakat és legnagyobb anyagon végzeteket RIBBE,¹ FRÉDÉRIC² és DAVIDA³ vizsgálatait emelem ki, kiderült, hogy minden ingadozás mellett is rendes viszonyok közt ez a záródás nem indul meg a 20-as évek közepe, vagyis a test növekedésének befejezte előtt. Ha valamely varrat előbb csontosodik el — nem szólva természetesen a koponya-alapnak már a 16. év körül összeforradni kezdő haránt synchondrosisáról —, a záródást időelőttinek, rendellenesnek minősíthetjük.

Az ilyen synostosis præcox már a magzati életben beköszönhet, a minek mindig a koponya valamely súlyos alakbeli rendellenessége (trigono-, akro-, oxy-, skaphokephalia stb.) a következménye. De ez igen ritka eset; magamnak sohasem volt alkalmam észlelni, pedig tapasztalataim sok száz magzatra

¹ F. C. RIBBE: Étude sur l'ordre d'obliteration des sutures du crâne dans les races humaines. Thèse de Paris. 1885.

² J. FRÉDÉRIC: Untersuchungen über die normale Obliteration der Schädelnähte. Zeitschr. f. Morphologie u. Anthropologie. Bd. IX. 1906. p. 373.

³ DAVIDA JENŐ dr.: Vizsgálatok a koponyavarratok és synchondrosisok csontosodásáról. Erdélyi Múzeum-Egyesület Orvostudományi Szakosztálya. 34. kötet. 1912.

terjednek ki. De az irodalomból ismerünk ilyen eseteket FÖRSTER,¹ WYMAN,² HESCHL,³ AHLFELD⁴ és mások közléseiből.

De már a gyermekkorban elég gyakoriak ezek a korai összeforradások, sokkal gyakoribbak, mint eddig hitték. Azoknak a vizsgálatoknak az alapján állithatom ezt, a melyek eredményeit a következőkben közlöm:

216 gyermekkoponyát vizsgáltam meg a budapesti I. sz. anatómiai s a budapesti embertani intézet gyűjteményéből. A legfiatalabb koponya 1² éves gyermeké, a legidősebb 14 évesé. De ezt az anyagot két csoportba kell osztanom. Az első csoport napjainkból való, gyermekkorházakból az anatómiai intézetbe került 90 koponyát foglal magába; a másik csoport a budapesti «régi váci temető»-ből előkerült 126 gyermekkoponyát. Ezt a temetőt alkalmasint 1777-ben adták át rendeltetésének és 1849-ig használták. Török Aurél tanár 1882-ben exhumáltatta s szállíttatta az embertani intézetbe a csontmaradványokat. A két csoport megkülönböztetése már azért is fontos, mert az eredmény eltérő az egyiken és a másikon. A napjainkból való koponyákon a korai varrat-elcsontosodások gyakoriságát 17·77%-nak, a régibb anyagon csak 10·31%-nak találtam.

Legritkább a koszorúvarrat elcsontosodása: ez csak három esetben = 1·38% fordult elő; ezekben sem különállóan, hanem más synostosisokkal együtt: egyszer a nyílvarrat s kétszer a pikkelyvarrat záródásával.

Következik gyakoriság tekintetében a nyílvarrat, mely öt esetben = 2·31% volt összeforradva, 3-szor egymagában, egy esetben a koszorúvarrat egy részével s egyben mindkét pikkelyvarrattal és sutura parieto-mastoideával együtt. A nyílvarrat

¹ FÖRSTER: Congenitale Synostosis sagittalis mit Dolichocephalus als selbständiges Leiden. Jahrb. f. Kinderheilk. Bd. 7. 1865. pg. 66.

² WYMAN: Observations on crania. Proc. Boston Soc. Nat. Hist. Vol. 2. 1868.

³ HESCHL: Foetale und praemature Obliterationen der Schädelnähte nach Fällen der Gratzter Sammlung. Prager Vierteljahrschr. f. d. prakt. Heilkunde. Bd. I. 1870. p. 19.

⁴ AHLFELD FR.: Die Missbildungen d. Menschen. Leipzig 1880—82. 2. Abschn. pg. 265.

korai záródása kétségtelenül kóros jelenség s a rendellenes varratelcsontosodásnak önálló, jól elhatárolt alakja. Ha elég korán áll be, a falcsontok harántirányú növekedésének meg-gátlása folytán rendellenes koponyaalakra: 'szélső dolichokephaliára, skaphokephaliára vagy sphenokephaliára vezethet. De ez korántsincs mindig így. Nem ritkán kerül a kezünkbe fiatal egyének koponyája, a melyen a nyílvarrat a maga egészében, a bregmától a lambdáig eltűnt, még pedig kétségtelenül már a gyermekkorban s a mely e mellett teljesen rendes idomú, sőt gyakran nem is dolichokran, mint azt az ismert Virchow-féle törvény szerint hihetnők, hanem brachykran. Az én öt gyermekkoponyám közt csak egy van — egy 7 éves fiúé — a mely fiatal kora ellenére már határozottan skaphokephal, egy másikon — 7 éves gyermekén — a feltűnő dolichokrania jelzi a nyílvarrat eltűnése okozta kraniostenosist. Egy harmadik idetartozó koponya — 8 éves gyermeké — szintén eltorzult ugyan, csak hogy a rendellenes alakulást nem a nyílvarrat elcsontosodása, hanem az egyidejűleg jelenlevő koszorúvarrat-synostosis szabta meg: a koponya nem hosszúkás, hanem inkább rövid, összenyomott s e mellett kissé toronyszerűen a magasba emelkedő (turrikephal). Úgy látszik, olyankor, a mikor ez a két varrat egyszerre záródik el a gyermekkorban, a koszorúvarrat a domináns a koponya idomának a befolyásolásában, a nyílvarrat synostosisa nem érvényesül. A fennmaradó két nyilsynostosisos koponya egészen rendes alakú; ilyen esetekben mindenek szerint a falcsontok erősebb lapszerű belső növekedése pótolja a hiányzó szélgyarapodást.

Megemlítendőnek tartom, hogy mind az öt eset a régi váczi temetőből kiásott koponyák közül való; mintha ritkább lett volna napjainkban ez a kóros jelenség. De persze ilyen aránylag csekély anyagra támaszkodva nem lehet ezt határozottan állítani s különben is ellene szól egy pozitív észlelet: a régi budapesti homokbányai katonatemető 542 fiatal — 20 év körüli — férfi koponyáján a sagittalsynostosis gyakoriságát 1.84%-nak (10 eset) találtam, a jelenkorból származó 267 koponyán — ugyancsak egészen fiatal egyének koponyáin — pedig 1.49%-nak (4 eset), tehát csak jelentéktelenül kisebbnek.

A mi a varratelcsontosodás e fajának az okát illeti, nem mulaszthatom el, hogy ne utaljak arra, hogy az öt gyermekkoponya közül kettőn az angolkór határozott jeleit találtam: kraniotabeszes hiányokat a nyakszirten s a halántékárokban. De azt vélem, hibás dolog volna ebből azt következtetni, hogy csakugyan a rachitis okozza ezt a kóros jelenséget. A nagyvárosi gyermekek között BOLLINGER szerint minden harmadikon megvannak a rachitis nyomai s így nagyon is lehetséges, hogy csak véletlen összetalálkozása ez két különböző önálló pathologiai folyamatnak. A toronyfejűségnek (turricephalia, akrocephalia) nevezett koponyarendellenességre nézve, mely leginkább a koszorúvarrat korai záródásával szokott közvetlenül összefüggni, újabban igen valószínűvé vált, hogy az «oxycephal syndroma» egyéb jelenségeivel együtt az agyvelőfüggelék (hypophysis cerebri) hiányos fejlődésének (hypopituitarismus) a következménye. Nem lehetetlen, sőt valószínű, hogy itt is hasonló ok szerepel. Ma már biztosan tudjuk, hogy a koponya és csontváz fejlődésének irányításában nagy szerepük van a belső elválasztású mirigyeknek, de valószínű, hogy ez a kapcsolat nemcsak mennyiségbeli, hanem minőségbeli is, oly értelemben, hogy a hormonképző mirigyeknek bizonyos működésbeli hiányai a koponya és csontváz fejlődésének nem elmaradását vagy túltengését, hanem bizonyos alakbeli szabálytalanságait okozhatják.

A harmadik külön csoportba azok a koponyák foglalhatók össze, a melyeken a halántéktájak varratain (sutura sphenoparietalis, squamosa, parietomastoidea) mutatkozik időelőtti záródás. 9 ilyen eset van a 216 gyermekkoponya közt = 4.16%, tehát már jelentékenyen nagyobb százalék. Egy-egy esetben a pikkelyvarrat és a sutura parieto-mastoidea van külön-külön elcsontosodva, öt esetben közösen csontosodtak el ezek, egy esetben csak a sutura sphenoparietalis és parieto-mastoidea tűnt el, míg a köztük levő pikkelyvarrat ép, az utolsó esetben pedig mind a három halánték-varrat összeforradt és pedig mindkét oldalt. A synostosis öt esetben kétoldali, négy esetben féloldali (3-szor jobb-, 1-szer baloldali).

Hogy itt valamely súlyosabb kóros folyamatnak a megnyilvánulása van előttünk, az nem lehet kétséges. A halánték-

tájék varratainak, különösen a pikkelyvarratnak, rendes viszonyok közt valamennyi varrat közül legkisebb a hajlandóságuk az elcsontosodásra. Ezt a varratokkal foglalkozó szerzők mindannyian kiemelik s magam is megerősíthetem nagy anyagot felölelő tapasztalataim nyomán. A pikkelyvarratot rendszerint nyitottnak találjuk még igen elaggott egyének koponyáin is, a hol a többi varratnak már alig van nyoma. FRÉDÉRICNEK az a nagy kivételkép felhozott két esete, a hol a sutura parieto-mastoidea fiatal egyén koponyáján már záródott, kétségtelenül gyermekkori synostosis. A tőlem megfigyelt hasonló esetek egy részén a koponya az elmosódott varratok helyén lelapult, vagy pedig egész alakulásában kissé részaránytalan, jelölve annak, hogy a korai varratösszeforradás akadálya volt a rendes fejlődésnek.

Az okozó pathologiai tényező súlyosságát még meggyőzőbben tanúsítja az a körülmény, hogy azok közül a gyermekek közül, a kiken ez a tünet jelen van, csak kevés éri el a felnőtt kort. Ezt úgy állapítottam meg, hogy összehasonlítottam a synostosis temporalis gyakoriságát a gyermekkoponyákon s a fiatal, de már felserdült egyének koponyáin. Nagy anyagot — 1064 koponyát — vizsgáltam meg, csupa ifjú, 18—30 év közti egyén koponyáját:

1. Napjainkból származó, boncztermi 267 koponyán, a melyeken a többi varrat mind megvolt, négy esetben = 1·49% találtam halánték-synostosist.

2. A «régi váczi temető» anyagából kiválogatott 255 fiatal koponyán három esetben = 1·17% volt varratzáródás a halánték-tájékon.

3. A homokbányai anyag 542 koponyáján hat eset = 1·10% mutatott halántéki synostosist.

Összefoglalva a három csoportot, átlagban 1·22% gyakoriságot (13:1064) kapunk, s ezt egybevetve a gyermekeken megállapított számmal (4·16%), kiderül, hogy a halánték-synostosisos gyermekeknek több mint $\frac{2}{3}$ -a elpusztul még a gyermekkorban.

Feltűnő a számok egyezése e három csoportban, melyek közül az egyik a jelenkorból, kettő egy letűnt korszakból való; olyan kóros tényezők szerepelnek itt tehát, a melyek a 100 év

előtti időtől napjainkig nem változtak meg erejükben, gyakoriságukban.

De mik ezek a kóros tényezők? HESCHL (i. m. 1874, 22. oldal) traumára gondol: utal arra, hogy a gyermekek, mikor jární tanulnak, gyakran esnek a halántéktájukra. De ebben az esetben valami gyulladásnak: periostitisnek, pachymeningitisnek a nyomait (csontmegvastagodást, érlikacsákat) kellene az eltűnt varratok helyén észlelnünk, pedig ilyeneket sohasem látunk: a varratok simán csontosodtak el. Ugyanezen az ellenvetésen dől meg a leptomeningitises s születéstraumás eredés felvétele is. Angolkór jelei a 9 koponya közül négyen voltak megállapíthatók, de ez a fentebb kifejtettek értelmében mit sem bizonyít.

Elérkeztem a gyermekkori varratcsontosodás leggyakoribb és legérdekesebb alakjához: a sutura occipito-mastoidea synostosisához. Meg is mondom mindjárt, hogy miért tartom ezt a legérdekesebbnek. Véleményem szerint más megítélés alá esik, mint a korai synostosis többi fajtája. Itt nem valamely kifejezett kórfolyamat tünete áll előttünk, hanem vagy normál-változat, vagy a mit valószínűbbnek tartok, a gyermek általános alkati gyengeségének jele. Ezt e varratelcsontosodás gyakoriságából, minden egyéb kóros jelnek a koponyán való hiányából, különösen pedig abból következtetem, hogy az ilyen synostosisos gyermekek nagy része, többsége élve marad s eléri a felnőtt kort.

A megvizsgált 216 gyermekkoponya közt 20 esetben = 9.25% volt ez a varrat elcsontosodva. Milyen nagy különbség a hozzá gyakoriság tekintetében legközelebb álló varratzáródáshoz, a 4.16%-ban talált halánték-synostosisához képest: több mint kétszerese ez a szám amannak! De ha kritikai szemmel vizsgáljuk ezt az eredményt, bizonyos kételyeink támadnak az iránt, vajjon csakugyan hű mutatója-e a kérdéses jelenség gyakoriságának. Ezek a kételyek különben egyaránt vonatkoznak valamennyi varratzáródásra s így kölcsönös számarányukat nem érintik. Először is: pathológiai anyaggal van itt dolgunk, már a gyermekkorban elhalt egyének koponyáival, olyan egyénekével, a kiknek egy része bizonyosan már alkati gyengeséggel született. Ha lehetne valami módon, például Röntgen-sugár

segítségével, a synostosis gyakoriságát egészséges, élő gyermekek sorozatán megvizsgálni: valószínű, hogy csekélyebb százalékszámot kapnánk. De van egy másik körülmény, a mely meg ellenkezőleg azt sejteti, hogy az igazi szám nagyobb az itt kapottnál. Habár a legfiatalabb csecs-synostosisos koponya négy hónapos gyermeké, tehát bizonyos, hogy már ebben a korban beállhat a záródás, majdnem biztosra vehető az is, hogy az időelőtti varratelesontosodásnak ez az alakja nemcsak a korai gyermekkorban állhat be, hanem fokozatosan beköszönthet később is, egészen a nemi érés idejéig. Ezt a következőből lehet megállapítani. Ha anyagunkat — a 216 gyermekkoponyát — az évek száma szerint osztályozzuk, azt látjuk, hogy a synostosis occipito-mastoidea gyakorisága bezárólag a 10. évig 8·06% (15 koponya 186 közül), a 11—15. év között pedig 16·66% (5 koponya 30 koponya közül). Igaz, hogy ilyen csekély számoknál (csak 30 tíz éven felüli koponya!) a véletlen szerepe nem rekeszthető ki, de mégis igen valószínűnek kell tartanunk, hogy a százalékszámoknak ez a hatalmas — kétszeresére való — felszökkenése onnan van, hogy még a 11—15. év közt is szaporodik a synostosis. A két egymással ellenkező körülmény kiegyenlítésének eredményeképp felvehetjük, hogy a synostosis occipito-mastoidea valójában valamivel gyakoribb a fentebb kapott 9·25%-nál.

A 20 eset közül 16-ban nincs semmi más elcsontosodva, csak a szóban forgó varrat. Ezek a «tiszta esetek» külön statisztikát igényelnek. Gyakoriságuk 7·40%, korok szerint elkülönítve: a 10. évig 12 eset 186 közül = 6·45%, 11—15. év közt 4 eset 30 közül = 13·33%. A fennmaradó 4 esetben a synostosis occipito-mastoideán kívül egyéb varratcsontosodások is vannak a koponyán: mindannyi a halántéktájék varrataiban, egy esetben a koszorúvarratban is. Véleményem szerint ezeket az eseteket is úgy kell megítélnünk, hogy talán véletlen összehatalálkozása forog fenn két különböző dolognak.

55%-ban féloldali a synostosis, 45%-ban mindkét oldali; a féloldali esetek körülbelül egyformán oszlanak meg a jobb- és baloldal közt. A varrat egyetlen egy esetben sincs tökéletesen elcsontosodva. Ha FRÉDÉRIC-kel (i. h. 381. old.) három egyenlő

részre osztjuk a varratot, a pars media az, a melyen a csontosodás megindul. Az esetek többségében még a gyermekkorban a pars superiorra is áttérjed, míg a pars inferior sohasem csontosodik el a nemi érés előtt; csak a felnőtt korban egészíthető ki a synostosis a foramen jugulareig. Ebben a sorrendben jellemző tulajdonságát ismerjük fel a sutura occipito-mastoidea gyermekkori záródásának; mert a varratnak a magasabb korban beálló physiologiai csontosodása FRÉDÉRIC és DAVIDA megállapítása szerint mindig legalul kezdődik s innen halad felfelé.

Nevezetes ténynek jutunk a nyomára, ha a megvizsgált gyermekkoponyák két csoportját külön vesszük szemügyre a synostosis occipito-mastoidea gyakorisága szempontjából. Ha ezt a jelenséget olyanféle tünetnek fogjuk fel, mint a minő például STILLER¹ costa X. fluctuans, vagyis ha a veleszületett alkati gyengeség jelének tartjuk, érdekes megvizsgálni azt a kérdést, vajjon nem lett-e gyakoribb ez a jel Budapest lakossága körében az elmúlt században? Említettük, hogy a 216 gyermekkoponya közül 90 napjainkból származik, 126 pedig az 1849-ben beszüntetett «régi vácsi temető»-ből, melybe valószínűleg 1777 óta temettek; az utóbbi anyag tehát nagyjában egy századdal előzi meg korunkat. E vizsgálat meglepő eredményt adott: a synostosis a régi koponyákon 5.55%-ban, a maiakon 14.44%-ban van meg! E nagy különbség megítélésekor helyén van egy kis kritika. Nem is szólva a véletlen szerepéről, mely ilyen aránylag csekély számoknál nagyon is zavarólag hathat, számba kell vennünk, hogy a régibb anyag temetőből való, az újabb a boncztani intézetből. A két anyag némi tekintetben eltér egymástól; a temető gyermekanyaga közt bizonyára nagy hányadot tesznek ki a kiütéses hevenyész fertőző-betegségekben (himlő, vörheny, kanyaró) és diphtheritisben elhalt gyermekek, míg a boncztani anyag közt ez a halálok teljesen ki van rekesztve, mivel az ilyen betegségben elhalt gyermekek holttestét közegészségi okokból nem szállítják az anatómiai intézetbe. De az ilyen fertőző-betegségben elhalt gyermekek között kétségtelenül sok lehetett

¹ B. STILLER: Die asthenische Konstitutionskrankheit. Stuttgart, 1907. Lásd még: FR. MARTIUS: Konstitution und Vererbung. Berlin, 1914.

az eredetileg egészséges, minden alkati betegségtől ment gyermek. Világos ennél fogva, hogy valamely degenerációs jel ritkább kell hogy legyen a temető anyagán, mint a boncztani anyagon. Ezt elismerve mégis hangoztatnunk kell, hogy az ebből folyó különbség nem lehet olyan tetemes, hogy a fentebbi két szám közti eltérést teljesen megmagyarázná. Sem a véletlen szereplése, sem a vázolt körülmény nem tudja ezt a nagy különbséget érthetővé tenni s így nem marad más hátra, mint felvennünk, hogy a csecs-synostosis a budapesti gyermekek közt csakugyan gyakoribb lett az utolsó században, ha nem is olyan mértékben, mint az ama két szám nagy eltéréseéből következni látszik. Egyébként ha még kételyeink volnának az iránt, hogy reális-e ez a következtetés, ezek a kételyek el kell hogy tűnjenek a később megemlítendő még meggyőzőbb észleletek folytán. Ennek a szaporodásnak a ténye újabb bizonyíték a mellett, hogy itt nem normál-varietás forog fenn, hanem valamely ingadozó, közegészségi viszonyoktól vagy hasonlótól függő tünet. Hogy az eltérést rasszkülönbség nem okozhatja, az világos, mert Budapest lakossága nem változott meg annyira fajbelileg 100 év alatt, hogy a különbséget erre lehetne vonatkoztatni, a mihez megjegyzem, hogy a zsidóság, a melynek aránya Budapest lakossága közt az utóbbi 100 év alatt tetemesen növekedett, nem jöhet számba, mert hisz a főváros lakosságának e része külön temetkezik s a boncztermi anyaghoz egyáltalában nem járul hozzá.

Ha csak azokat az eseteket vesszük számításba, a melyekben egyedül a sutura occipito-mastoidea van elzáródva, a két csoport százalékszámait a következők: új csoport 11·11% (10 eset 90 közül), régi csoport 4·76% (6 eset 126 közül).

Egybefoglalva valamennyi korai varratelesontosodást, a következő számokat kapjuk: jelenkor 17·77% (16 eset 90 közül), régi vácsi temető 10·31% (13 eset 126 közül).

Hogy a csecs-synostosis nem valami pozitív heveny-betegségnek a megnyilvánulása, hanem legfeljebb kóros dispositióé, a mellett felhozható, hogy e gyermekkoponyák egyikén sem találtam kóros elváltozásokat, angolkórnak, luesnek vagy egyéb betegségnek a nyomát. Valamennyi rendes alakú és nagyságú

s az elcsontosodott varrat helyén sem csonthártyagyuladásra utaló megvastagodást, sem hypervascularisatiót nem mutat, a minő a többi korai synostosisnál, különösen a nyílvarraténál nem ritkaság. A csecs-synostosis mint egyedül álló rendellenes vonás szokott a különben teljesen normálisnak látszó koponyákon megjelenni, rendszerint más synostosisok nélkül.

De nem forog-e itt fenn egyszerűen rendes változat? Talán nem egyéb ez, mint physiologiai tünetény, mint a többi tetelesen megelőző első tagja a rendes varratelcsontosodások lánczolatának? Ennek a lehetőségnek megerősítése vagy megczáfolása attól függ, hogy a nemi érés utáni időből való, vagyis felserdült fiatal egyének koponyáján milyen számmal található ez a varratzáródás, azaz a synostosisos gyermekek közül mennyi hal meg már a gyermekkorban s mennyi éri el a felnőtt kort? Ha az arányszám a nemi érés után is változatlan marad, akkor normálvariációra kell gondolnunk, ha a gyermekkori számnak csak csekély töredékére száll le, akkor éppen olyan természetű súlyosan kóros tünetényre, mint a többi korai synostosis, ha végül csökken ugyan a szám, de csak kis fokban, akkor nagyon valószínűvé lesz az a már fentebb jelzett felfogás, hogy itt valami dispositio-félének, alkati gyengeségnek az ismertető jele van előttünk.

E lehetőségek eldöntésére meg kellett tehát vizsgálnom a synostosis occipito-mastoidea præcox gyakoriságát felnőtt ifjú egyének koponyáján. 267 oly koponyát találtam a vezetésem alatt álló I. sz. anatomiai és az embertani intézet gyűjteményében, a mely e célra alkalmas, csupa napjainkból származó boncztermi koponya. A koponyák egy részén fel van jegyezve egykori tulajdonosuk kora, a többin a fogak s különösen a varratok állapotából lehetett megállapítani, hogy 18—30 éves egyéné; csak olyan koponyákat használtam fel, a melyeken kívülről való megtekintésre (a legtöbb koponya megnyitatlan) valamennyi varrat nyitott még, vagy legfeljebb első nyomai láthatók a varratzáródásnak a nyílvarrat obelion-tájékán.

A 267 koponya közt húszat találtam, a melyen a fél- vagy mindkét oldali csecsvarrat elcsontosodott = 7.49%. Ha ezt a számot összehasonlítjuk a mai gyermekek koponyáján megállá-

pitott 11·11%-kal, kimondhatjuk, hogy a csecs-synostosisos gyermekeknek több mint $\frac{2}{3}$ -a (67·41%) élve marad. Ez az eredmény tehát határozottan az alkati gyengeség mellett szól; sem normalvarietásról, sem valami nagyon súlyos kóros állapotról nem szólhatunk ez után. Az «alkati gyengeség» felvétele mindamellett csak hypothesis marad, mert lehet itt más valami is a háttérben, például a lappangó veleszületett luesnek, vagy az angolkórnak igen enyhe alakja, de a magam részéről a jelzett felvételt tartom a legvalószínűbbnek.

Kisebb a különbség, ha az összehasonlításkor a régi temetőből való gyermekkoponyákat is számbaveszszük; az arány így módon 9·25%:7·49%.

Az izolált csecs-synostosis 20 esetében felnőtteken a varrat éppen oly arányban volt hol csak az egyik oldalon, hol mindkettőn elcsontosodva, mint a gyermekeken: 9 esetben (45%) mindkét oldalon, 11-ben (55%) csak az egyik oldalon. De az utóbbi esetben itt inkább a baloldal volt túlsúlyban, nem a jobb, mint a gyermekeken; úgy látszik, egyforma arányban vesz részt a kétoldali varrat a záródásban s csak a véletlen mozdította itt az egyik, ott a másik oldal felé a mérleg mutatóját. A varrat középrésze minden esetben el volt csontosodva; 20 eset közül 14-ben a felső része is, míg az alsó részre csak 3 esetben terjedt a synostosis.

Mint eddig ismeretlen vagy nem kellőképp ismert tényre, utalhatok arra a megállapításra, hogy a mai fiatalokú koponyák között 7·49%-on, vagyis körülbelül minden 13.-on, már a tulajdonképeni varratzáródás megindulta előtt, a gyermekkorból származóan elcsontosodva találjuk a sutura occipito-mastoideát, csak az egyik oldalon vagy mindkét oldalt, részben vagy teljesen. Nagyon természetes, hogy a varratnak olykor elcsontosodott állapota ifjú egyének koponyáin nem kerülhetett el egészen az anatomusok figyelmét, de azok a szerzők, a kik említést tesznek róla, mint ZUCKERKANDL,¹ HYRTL,² FRÉDÉRIC (i. h. 388. old.),

¹ E. ZUCKERKANDL: Beiträge z. Lehre des menschlichen Schädels. Mitteil. d. anthrop. Gesellsch. in Wien. Bd. 3. 1873. pg. 31.

² J. HYRTL: Lehrbuch d. Anatomie, 15. Aufl. Wien, 1881, pg. 281.

DAVIDA (i. h. 15. és 67. old.), mint valami nagy ritkaságot hozzák fel s e mellett nem ítélik meg helyesen, a mennyiben belesorozzák a rendes, felnőtt korban bekövetkező varratzáródások közé mint a sorrendnek kivételes változatát, holott valójában egészen másfajta, rendellenes, kóros, gyermekkori synostosis.

Megjegyzem, hogy a gyermekkori synostosis occipito-mastoideának a koponya idomára nincs módosító hatása. A mennyire külön pontos mérések nélkül, csak figyelmes megtekintéssel meg tudom ítélni: sem a féldoldali, sem a kétoldali záródás nem okoz asymmetriát vagy más alakváltozást a koponyán vagy nyakszirttájékon.

Vizsgálataimból tehát az derült ki, hogy ez a synostosis jóval gyakoribb a mai budapesti gyermekeken, mint a 100 év előttieken. Ez mindenesetre érdekes és szemetesztető tény még akkor is, ha más volna az oka a synostosisnak, mint alkati gyengeség, például veleszületett lues, különösen ha kapcsolatba hozzuk azzal a körülménnyel, hogy Budapest e 100 év alatt fejlődött szerény provinciális jellegű városból csaknem milliós világvárossá, a nagy embertömegek együttéléséből származó közegészségi ártalmakkal.

De ha ez az észlelet nem alapszik valami tévedésen vagy a véletlen szeszélyén, a varratzáródás gyakoriságának e különbsége meg kell hogy legyen a két különböző korból származó felnőtt fiatal egyének koponyáin is. Hogy megvan-e, annak a megállapítására kielégítő vizsgálati alapot szolgáltatott a régi vácsi temető anyaga. 255 olyan koponyát találtam az e temetőből kiföldelt csontmaradványok között, a mely a fentebb elmondott ismertetőjelek szerint biztosan 18—30 év közötti egyénének volt megállapítható. A varrat izoláltan elcsontosodva 15 esetben (6-szor mindkét oldalt, 4-szer jobboldalt, 5-ször baloldalt), vagyis 5·88%-ban volt. Ez tehát tetemesen kisebb arány, mint a mai hasonló korú boncztermi koponyákon talált 7·49% s így az eredmény megerősíti a gyermekkoponyákon tett észleletet. Nem hallgathatom el, hogy a gyermekeken s a felnőtteken megállapított arányszámok összehasonlításakor bizonyos ellendmondások mutatkoznak; de ezek nem annyira lényegesek, hogy

a főmegállapítást, a synostosis gyakrabbadásának tényét kétségesse tudnák tenni. Ilyen dissonantia, hogy a számszaporodás a 100 év előtti időtől a mai napig nem mutatkozik egyforma arányúnak a gyermekkoponyákon s a felnőttek koponyáin: a gyermek-anyagon sokkal nagyobb különbséget kapunk a múlt s a jelen állapota közt. De fentebb már rámutattam egyes zavaró körülményekre, a melyek ezt a túlságos nagy különbséget megmagyarázzák s a melyek feltételezni engedik, hogy a szaporodás valójában nem lehetett akkora, mint ama számok eltérése. A felnőtt anyag arányszámai mindenesetre megbízhatóbbak, mert az anyag egyöntetűbb; az itt mutatkozó különbség lesz az igazi kifejezője a szaporodás fokának. Másik dissonantia, hogy a váczi temető anyagán nagyobb százalékszámot kapunk a felnőtteken, mint a gyermekeken. Itt csakis a véletlen szerepelhet: a 126 váczi temetőbeli gyermekkoponya közt nyilván kivételesen kevesebb synostosisos koponya került együvé, mint a mennyi megfelelt volna az igazi gyakoriságnak. Lehetetlen, hogy a felnőttek közt ez a gyermekkori varratzáródás gyakoribb legyen, mint a gyermekek közt; még ha minden ilyen gyermek megmarad is, a két százalékszám legfeljebb egyenlő lehet.

Még egy lépéssel tovább is mentem s az iránt is érdeklődtem, hogy milyen gyakran fordul elő ez a korai synostosis, az elfajulásnak ez az érdekes jele még jóval régibb, korunkat nem száz évvel, hanem sokkal többel megelőző koponyákon? E vizsgálat csak akkor adhatott megbízható eredményt, ha ugyanabból a korból és ugyanarról a helyről való s fajbelileg is egységes anyagon hajtom végre. Ennek a feltételnek egészen megfelelt az embertani intézet gyűjteményének egy több száz koponyára menő sorozata, melyet néhai Török Aurél tanár Pósta Béla dr.-ral, most a régészet kolozsvári egyetemi tanárával ásott ki 1882-ben Rákospalota határában. Az ásatás s a lelet ismertetése eddigelé nem jelent meg nyomtatásban s az embertani intézetben sem találtam a koponyákra írt «Rákospalota» helyneven kívül egy szó feljegyzést róla. Szerencsére azonban Pósta tanár úr, a kinek az ásatásnál való szerepléséről az Archæologiai Értesítő 1887. évfolyamának egy megjegyzéséből értesültünk, szíves volt egész kéziratra menő

részletes ismertetést rendelkezésemre bocsátani róla, a miért e helyen is őszinte köszönetemet nyilvánítom neki. Az értékes lelet a csontokkal talált bár csekély számú, de jellemző mellékletek s különösen az érmeik tanúsága szerint egy Árpádkori, XI—XIII. századbeli magyar falu temetkezési helyét tárja elénk. A koponyák közt 123 egészen fiatal egyénét találtam, nem számítva azokat, a melyek a nyakszirt töredezett volta vagy hiányossága miatt nem voltak a vizsgálatra felhasználhatók. A sutura occipito-mastoidea synostosisát — más varratzáródások nélkül — 7 esetben állapíthattam meg: ez 5·68%-nak felel meg, 0·2 híján ugyanannyinak, mint a mennyit a váci temető fiatal koponyáin találtam (5·88%). Ebből tehát az következik, hogy azok az okok, a melyek Budapest lakossága körében újabban a csecs-synostosis szaporodását eredményezték, éppen csak a legutóbbi 100 esztendőben mutatkoznak, azelőtt sok évszázadon keresztül egyformák maradtak a synostosis okozó körülmények. Utalni óhajtanék arra is, hogy ebben a szaporodásban újabb bizonyítékát látjuk annak, hogy a sutura occipito-mastoidea korai elcsontosodása más jelentőségű, máshogy ítélendő meg, mint a többi varraté. Ez utóbbiak ugyanis, mint különösen a halánték-synostosisra nézve láttuk, nem mutatnak különbséget gyakoriságuk tekintetében a napjainkból származó koponyáknak a 100 év előttiekkel való összehasonlításakor.

Nem hagyhatom említés nélkül, hogy egy másik koponyasorozaton végzett vizsgálataim eredménye látszólag nem illeszkedik a fentebb kifejtett következtetés keretébe. Csak látszólag; valójában az első pillanatra szembeszökő ellentmondás bővebb meggondolásra elsimul. A csecsvarrat synostosisának gyakoriságát megvizsgáltam még egy 820 koponyából álló sorozaton is, melyet néhai Török tanár 1885-ben ásatott ki a budapesti vágóhid mögött levő, most homokbányának használt területen. A hagyomány szerint itt valaha katona-temető volt; a koponyák állapota körülbelül a XVIII. századra enged következtetni, az meg egészen bizonyossá vált a vizsgálat alkalmával, hogy a homokbányai temető csakugyan katonák temetkező helye volt, mert a sok száz koponya csupa egészen fiatal férfié, csak nagyon kevés középkorú férfié s egy pár nőé akadt közöttük.

Sajnos, a koponyák egy része megsérült a kiásás alkalmával s így csak 542 koponya volt alkalmas a vizsgálatra: kivétel nélkül 18—25 év közti fiatal férfiak koponyái, teljesen nyílt varratokkal. Itt még a kezdődő obelion-csontosodást mutató koponyákat sem vettem figyelembe. Azt vártam, hogy a synostosis aránya ugyanolyan lesz e koponyákon, mint a velük körülbelül egykorú régi váczi temetőbelieken, tehát 5—6 %, de meglepetésemre az arányt nagyobbnak: 7·19 %-nak találtam. Ez a szám ugyan még mindig alatta marad valamivel a mai fiatal koponyákon talált 7·49 %-nak, de a különbség elenyészően csekély. De egy kis elmélkedéssel sikerült a dissonantia okát megtalálnom. Ez itt csupa férfi-koponyából álló sorozat, a váczi temetőbeli s a többi megvizsgált pedig a nem tekintetében vegyes anyag. A férfi koponyájára nézve azonban biztosan tudjuk — valamennyi szerző, például PICCOZZO,¹ SCHWALBE,² FRÉDÉRIC (i. h. 443. old.), DAVIDA (i. h. 73. old.) kiemeli ezt —, hogy sokkal hajlandóbb a varratelesontosodásra, mint a női koponya, hogy a férfi varratai rendszerint előbb és nagyobb mértékben záródnak a nőkéinél. Ily körülmények között felvehetjük, hogy a korai synostosisok is gyakoribbak a hímnemben, mint a nőnemben, hogy ugyanaz a kóros tényező a fiúgyermeken hamarabb vezet varratzáródásra, mint a leánygyermeken. Ezt a «homokbányai» anyagot nem szabad tehát e szempontból fenntartás nélkül összehasonlitanunk a többivel. Ennek a magyarázatnak az alapjára helyezkedve megpróbáltam kiszámítani, hogy mekkora lehetett a synostosis occipito-mastoidea gyakorisága ama kor nőinek koponyáin. A $\frac{7\cdot19 + X}{2} = 5\cdot88$ (váczi temető) egyenletből kiszámítva a X -et, 4·57 %-ot kaptam. Ez a szám persze egyelőre nem áll szilárd alapon, mert két, bár valószínű, de elvégre mégsem egészen bizonyos felvételen nyugszik: az egyik az, hogy a

¹ T. PICCOZZO: Le suture della volta cranica in rapporto al sesso. Atti Soc. Rom. Antrop. Vol. 3. p. 147.

² G. SCHWALBE: Der Neanderthalschädel. Bonner Jahrbücher, H. 106. 1901. p. 6.

synostosis gyakoriságát a fiatal katonák koponyáin csakugyan a himnemük okozza, a másik pedig az, hogy a váczi temető koponyái közt a két nem egyforma számmal van képviselve, a mi — közönséges polgári temető anyagáról lévén itt szó — csakugyan nagyon valószínű.

(A M. T. Akad. III. osztályának 1916 május 15.-én tartott üléséből.)

•

•

VIZSGÁLATOK AZ ÜVEGTEST SZERKEZETÉRŐL.¹

SZENT-GYÖRGYI ALBERT-től.

Bevezetés.

Az üvegtest szerkezetét már másfél évszázad óta vizsgálják. 1870-ig e vizsgálatokat csak szabad szemmel végezték. Az ebbe az időszakba tartozó adatok hosszú sorozatából leginkább DEMOURS (1751), ZINN (1755), CLOQUET (1818), ARNOLD (1832), PAPPENHEIM (1842), BRÜCKE (1843—47), HANNOVER (1845), BOWMAN (1848) és STILLING (1868—69) adatai érdemelnek említést.

E kutatások az üvegtest szerkezetének egymásnak jórészt ellentmondó felfogásaihoz vezettek, melyek közül egyik-másik még mai napig is fennmaradt az irodalomban. Különös figyelmet érdemel közülök kettő: a PAPPENHEIM-BRÜCKE- és a HANNOVER-féle. Az előbbi az üvegtestet koncentrikus, hagymalevélszerű lemezekből állónak mondja, míg az utóbbi a narancs egyes szeleteihez hasonló szelvényekből összetettnek hiszi. Az adatok nagy számának ellenére a bennük rejlő ellentmondások miatt 1870-ben az üvegtest szerkezetének kérdése még, mondhatjuk, teljesen tisztázatlanul állott.

A második korszakot, melyet a mikroszkop alkalmazása jellemez, CIACCIONAK 1870-ben megjelent jeles dolgozata nyitja meg. Ebben a dolgozatban, mely a maga idején aránylag kevés figyelemben részesült, a szerző arról az észleletéről számol be, hogy az addig szövettanilag egynemű szerkezetűnek, vagy helye-

¹ A budapesti kir. m. tudományegyetem I. sz. anatómiai intézetében készült dolgozat.

sebben szerkezetnélkülinek hitt üvegtest végtelenül finom rostocskák sűrű fonatából áll, melyek egy folyékony alapállományha vannak beágyazva.

CIACCIO vizsgálatait 15 évi szünet után, mely alatt teljesen feledésbe merültek, VIRCHOW H. erősítette meg először 1885-ben. Neki köszönhető, hogy a kutatók mind nagyobb mértékben elismerték az olasz szerző észleletének helyességét, míglen az üvegtestrostocskák létezése végül is biztos tétellé lett a tudományban.

Új lendületet hozott a kérdés fejlődésébe RETZIUS G.-nek 1893-ban megjelent dolgozata. A svéd szerző az üvegtest szerkezetének felderítésére felhasználta a modern szövettani technika eszközeit, a mivel az üvegtestre vonatkozó ismereteinknek új korszakát látszott megnyitni. De a nagy reményekkel kecsegtető új irány e dolgozat megjelenése után jóformán teljesen megakadt. A további vizsgálatoknak és haladásnak ugyanis útját állotta az üvegtest szerkezetének végtelen finomsága és érzékenysége, mely annak szövettani megvizsgálását és feldolgozását majdnem teljesen lehetetlenné tette. Az üvegtest ugyanis a legóvatosabb rögzítés és beágyazás mellett is mindig annyira összezsugorodott, hogy szerkezetének kimerítő felderítése nem sikerülhetett.

Ebből érthetjük, hogy a RETZIUS után megjelent vizsgálatok, melyek közül különösen SALZMANN (1900-1912) közleményei érdemelne kemlítést, érdemleges eredményre nem vezettek. Különösen az üvegtest hátulsó felének szerkezetéről hiányoztak teljesen az adatok, míg az üvegtest elülső része a retina ciliaris-szal való bensőbb összefüggése s ennek folytán a fixáló és víztelenítő szerek zsugorító hatásával szemben való nagyobb ellentállása miatt inkább volt a szövettani kutatás részére hozzáférhető.

Ilyen módon a kifejlett üvegtest szövettanára vonatkozó ismereteink 1913-ban még csaknem teljesen ugyanazon a ponton állottak, mint 20 évvel azelőtt, 1893-ban, RETZIUS dolgozatának megjelenésekor, úgy, hogy szinte szemetszűrő volt ismereteinknek ez a hézaga, a mely a szövettan mai igen fejlett állásával ellenkezően úgy az állati, mint az emberi üvegtestre vonat-

kozólag kitöltésre várt. Ez a hiányosság annál feltűnőbb volt, mert időközben az üvegtest embryonális fejlődéséről, histogenezisének kérdéséről, az embryonális üvegtest durvább szerkezetének, nagyobb ellentálló képességének és így könnyebb szövettani vizsgálatának megfelelően nagy irodalom keletkezett. (TORNATOLA, RABE, LENHOSSÉK, KÖLLIKER, ADDARIO, VAN PÉE, SZILY A. stb.)

Technikai vizsgálatok.

Midőn 1913-ban tisztelt tanárom, LENHOSSÉK MIHÁLY professzor úr figyelmemet az üvegtestre, mint az emberi és állati testnek egy szövettanilag még kevésbé ismert szervére irányította, nyilvánvaló volt előttem, hogy e téren új és kielégítő eredményre csakis a histo-technikai eljárások kellő kifejlesztésével, az üvegtest különleges viszonyaihoz alkalmazott technikával juthatunk. Ezért első igyekezetem az volt, hogy megállapítsam azokat a feltételeket, a melyek mellett az üvegtest sikeresen rögzíthető és beágyazható, s hogy megfelelő eljárások kidolgozásával útát nyissak magamnak a kutatáshoz.

E kísérletek folyamán két egymástól eltérő eljárást sikerült megállapítanom, melyek a megfelelő anyagon alkalmazva teljesen kielégítő eredményt adnak. E két eljárás: az ezüst-gelatína- és az acetón-celloidin-eljárás.

I. Az ezüst-gelatína-eljárás két részből áll:

- a) az impregnálásból;*
- b) a beágyazásból.*

Az impregnálás methodikája LENHOSSÉK tanártól származik, a ki először alkalmazta a CAJAL-féle ezüst-módszert az üvegtest vizsgálatára, kissé módosítva azt. Ez eljárás szerint a friss szem a következő folyadékba teendő:

Formalin	— — — — —	20	köbcentiméter,
Aqua dest.	— — — — —	80	„
Argentum nit. cryst.	—	1.5	gramm.

Kisebb szemek 1 hétig, nagyobb szemek 9 napig maradnak ebben az oldatban, melyet naponta meg kell újítani. Az eredeti LENHOSSÉK-féle eljárástól csak annyiban tértem el, hogy az

anyagot nem az egész kezelés alatt, hanem annak legfeljebb csak 2 utolsó napján tartottam a költökemenczében.

Hogy a folyadék könnyebben hatolhasson a szem belsejébe, a nagyobb szemeken egy kis oldalsó nyílást ejtek.

A redukálást a következő oldatban végzem:

Pyrogallol Merck	1.5 gramm,
Formalin	5 köbcentimeter,
Aqua dest.	100 „

24 órai redukálás után a szemet nagysága szerint 24—48 óráig mossuk folyó vízben.

A paraffinbeágyazás e módszernél nem alkalmazható, mert a paraffin nem oldható ki a metszetből a fibrilláris szerkezet sérelme nélkül; még kevésbbé használható a celloidinbeágyazás, mert a beágyazás alatt az ezüstözés kifakul. Ezért más beágyazó közegre volt szükség, mely nem jár ilyen hátrányokkal. Ilyennek bizonyult a gelatina.

Kisebb anyagnál 5—10%, nagyobb anyagnál 7—14%-os gelatinát alkalmaztam. Előbbinél 1—1 napig, utóbbinál 2—2 napig hagytam az anyagot a gyengébb és erősebb oldatban 30° C. mellett. Tekintettel a gelatina nagy viscositására, a szemgolyót előzetesen mindig megnyitottam egy kis oldalsó szelvény lemetszésével.

A metszéshez a fagyasztó mikrotomot, a végleges eltevéshez az APÁTHY-féle gummikeveréket használtam.

Az ezüst-eljárás előnyei közül a következőket emelhetem ki:

A módszer igen éles és áttekinthető képeket ad, a mi különösen a mikrotopographia szempontjából igen fontos. A legszebb képeket kapjuk vele olyan állatokon, a melyeknek az üvegteste nem nagyon sűrű szerkezetű, a minők például a hüllők, két-éltűek, a tengeri malacz. Hátrányai közül a legnagyobb, hogy csak kisebb szemeken alkalmazható, nagyobb szemeken már nem igen sikerül, mivel a gelatina nem hatol be eléggé az üvegtestbe, különösen ha ez tömöttebb szerkezetű. Egész kis szemeken még celloidinbeágyazással is egybekapcsolható, a hol a gyors aceton-víztelenítés után rövid idő alatt elvégezhetjük a

beágyazást. További hátránya az eljárásnak, hogy a rostoknak a sejtekhez való viszonyát nem engedi kellően tanulmányozni.

II. Celloidinos eljárás. Ezt tekinthetjük a főeljárásnak, már csak azért is, mert egyaránt alkalmazható kis és nagy szemén: az emberi szem például csak ezzel vizsgálható.

Ennél az eljárásnál az anyagot a következő folyadékban rögzítjük:

Aceton	— — — — —	125	köbcentiméter,
Acid acet. glac.	— — — — —	5	„
Formalin	— — — — —	40	„
Aqua dest.	— — — — —	100	„
Sublimat	— — — — —	4	gramm

Kisebb anyag rögzítéséhez 2—3 nap, nagyobbéhoz 6—7 nap szükséges. A víztelenítésre nem használunk alkoholt, hanem acetont, a melyben a kisebb anyag 1—2 napig, a nagyobb 3—4 napig marad. Ezután az acetont æther-alkohollal helyettesítve, az anyagot beágyazzuk celloidinba, miután a szemgolyóból eltávolítottunk egy oldalsó szelvényt; még pedig a beágyazásra fokozatosan 2—4—6%-os, vagy érzékenyebb anyagnál 2—4%-os celloidint használunk.

A celloidin keményítését chloroformban és utána terpineolban végezzük. Metszés előtt el kell távolítanunk a lencsét s annak üregét sűrű celloidinnal töltjük ki; a hígabb celloidinnal átitatott anyagot sűrűbb celloidinnal öntjük körül, melyet azután megkeményítünk. A metszésről nincs különös mondanivalónk.

A mi a festést illeti, a legszebb képeket a HELD-féle molybdænsavas hæmatoxylin és a bleu de Lyon nevű anilinfesték adja.

E módszerekkel s különösen az utóbbival sikerült elérnem azt, a mi eddig csak desideratum volt, hogy még nagyobb szemekből is, a minő például az emberi szem, az üvegtest tökéletes átmetszeteit nyertem, a melyekben zsugorodásnak, hézagoknak, a fibrillumok összezsugorodásának vagy rendetlenségbe jutásának semmi nyoma sincs.

A canalis hyaloideusról.

A vázolt új technikát először is a canalis hyaloideus létezése körül folyó vita eldöntésére használtam fel. E vitát WOLFRUM M.-nek 1907-ben megjelent dolgozata indította meg, a melyben a nevezett szerző STILLING vizsgálatainak már szinte a köztudatba átment eredményeit tagadásba vette. STILLING ugyanis azt állította, hogy valamennyi általa megvizsgált emlős szemében sikerült kifejlődött állapotban is megtalálnia az üvegtest csatornáját, melyet első leírója után CLOQUET-csatornának is neveznek. WOLFRUM határozottan azt állította, hogy ez téves: ilyen csatorna a kifejlett állat és ember szemében nincs s ez álláspontja mellett megmaradt végig (1909), bár a csatorna létezése mellett többen (SCHAAFF E. 1907, 1909, 1910, BRIBACH E. 1910) emeltek szót s maga STILLING is (1909—1911) újra hangoztatta állításának helyességét újabb vizsgálatok alapján.

De ki kell emelnem, hogy a kérdést e vizsgálatok egyáltalán nem dönthették el végleg, mert sem STILLINGnek és hiveinek, sem pedig WOLFRUMnak a vizsgálatai nem alapultak az egyedüli megbízható módszeren: a közvetlen szövettani vizsgálaton, hanem csak indirekt methodikán, nevezetesen színes folyadéknak a feltárt üvegtestre való csöppentésén és ennek az üvegtestben való elterjedése módján.

Döntő jelentőségük a kérdésben kétségtelenül csakis a szövettani metszeteknek lehetett; ilyeneket azonban a technika fejletlensége miatt eddig senkinek sem sikerült előállítani.

Vizsgálataim anyagául először a disznó szemét választottam, egyrészt, mert az eddigi vitákban ez az anyag játszotta a legnagyobb szerepet, másrészt ez az anyag volt a legkönnyebben beszerezhető és feldolgozható.

Vizsgálatom eredménye az volt, hogy a canalis hyaloideus a kifejlődött disznó szemében kivétel nélkül minden esetben megtalálható s a szemnek állandó alkotórésze. Tehát STILLINGnek volt igaza.

Egyúttal leírását is adhattam a canalis hyaloideus szövettani képének, melyet röviden a következő pontokban foglalhatok össze:

1. A csatorna a látóidegfőtől egyenesen vagy kissé hajlott alakban fut a lencse hátulsó felszínéhez.

2. A látóidegfőn egy tágabb ampulláris részszel kezdődik. Ez előre egy keskenyebb részletbe folytatódik, melyet isthmus névvel jelölhetünk meg. A lencse mögött a csatorna tölcsér-alakban kiszélesedik, az infundibulumot alkotva.

3. A canalis hyaloideus nem valódi csatorna, hanem csupán a környezeténél jóval ritkább szövésű rostozattal kitöltött tengely-része az üvegtestnek.

4. A canalisnak külön határhártyája van. Ez a határhártya olyan szerkezetű, mint az üvegtestet elül a zonula felé határoló lemez, tudniillik sűrűbb fibrilláris fonatból és sűrűbb rostközötti állományból áll.

E vizsgálatok alapján véglegesen megállapítotttnak tekinthető, hogy a kifejlődött disznó szemében a canalis hyaloideus megvan. További vizsgálatok fogják eldönteni, hogy megtalálható-e minden emlős szemében, vagy mely emlősök szemében van meg és hogy az alakja megegyezik-e mindenütt a disznó szemében talált viszonyokkal.

Vizsgálatok a kétéltűek és a hüllők üvegtestéről.

Tekintettel arra, hogy az üvegtest az összehasonlító szövet-tannak eddig teljesen kidolgozatlan, még meg sem kezdett fejezete volt (csak a fejlábúak — cephalopodák — üvegtestéről találtam néhány munkálatot), az volt a tervem, hogy végig kutatom a gerinczesek valamennyi osztályán keresztül az üvegtest szerkezetét. E sorozatból az anyag könnyű hozzáférhetősége folytán eddigelé a kétéltűek és a hüllők üvegtestére vonatkozó vizsgálataimmal készültem el.

Az üvegtest mindkét állatosztályban aránylag egyszerű viszonyokat mutat. A rostozatok nem túlfinomak, az általuk alkotott szövetek nem túlságosan tömött s végül a rostok majdnem mindenütt igen szép szabályos rendszereket alkotnak, mind olyan tulajdonságok, a melyek ezt az anyagot különösen alkalmassá teszik az üvegtest általános morphologiai tulajdonságainak megismerésére.

E vizsgálatok eredményei között talán legfontosabb annak a ténynek a megállapítása, hogy az üvegtestrostok sehol sincsenek rendszertelenül, szabálytalanul elrendezve, hanem minden állatban típusos, szabályos rostrendszereket alkotnak, a melyek egy-egy állatfajban állandóan egyformán vannak elrendezve, de különböző fajokban mindig más és más elrendeződést mutatnak. Az üvegtestnek e szerint a különböző állatfajokban különböző, az illető állatfajra szigorúan jellemző szerkezete van.

Igen meglepő volt annak a ténynek a megállapítása, hogy a kifejlődött kételtűek és hüllők szemében olyan structurákat találunk, a melyek az emlősök szemében az embryonalis fejlődés során mint múlandó fejlődési fokozatok észlelhetők.

Különösen vonatkozik ez arra a finom rosthálózatra, mely a kételtűekben és a hüllők közül a teknősökben a durva, tulajdonképeni zonularostok között foglal helyet. A gyíkokban és kigyókban ez a közbeeső rosthálózat kevésbé van kifejlődve, de ezzel szemben viszont maguk a zonularostok mutatnak bizonyos fokig fonatszerű elrendeződést. Ide sorozható az a tény is, hogy a kételtűek és a hüllők legnagyobb részében a zonula nincs olyan szigorúan elválasztva az üvegtesttől, mint az emlősökben s még ott is, a hol erősebben kifejlett elülső határhártya alakul ki, ez nem az üvegtestet és a zonulát választja el egymástól, hanem már az üvegtesten belül foglal helyet. Mind e képeket megisméltetni látjuk a madarak és az emlősök üvegtestének fejlődésében, a mint azt LENHOSSEK vizsgálatai alapján ismerjük.

A kételtűek és hüllők üvegtestén szerzett tapasztalatok alapján teljesen hibásnak kell megjelölnünk azt a régi felfogást, mely az üvegrostokban jóformán teljesen élettelen, önálló differenciálódásra képtelen passiv képződményeket lát. Az üvegtest-fibrillumok igen messzemenő differenciálódásra képes, nagymértékben plastikus képződmények, melyek az embryonális fejlődésen túl is még állandó differenciálódásokon és belső átalakulásokon esnek át. RETZIUS állításával szemben meg volt állapítható, hogy az üvegtest rostocskái nem futnak elszigetelten, hanem hogy elágazódásaik közvetlenül összefüggnek egymással s így összességükben egy anastomosisos valódi hálózatot alkotnak. Hasonlóképen másodlagosan összefüggésbe jutnak a velük

közvetlenül érintkező egyéb szöveti alkotórészekkel is, a minők például az ideghártya vagy az erek. Egészen hibás dolog ebből az összefüggésből következtetést vonni az üvegtest fejlődésére, a mint azt többen tettek, ezen az alapon állítva az üvegtestnek a retina egyes részeiből való fejlődését; ez az összefüggés másodlagos odatapadás.

A mi az egyes állatfajok szerinti különbségeket illeti, a következőket találtam:

A kétéltűek közül a foltos salamandrárt vizsgáltam meg. Itt az üvegtest képében legfeltűnőbb egy erős, durva rostköteg, a *tractus centralis*, mely a látóidegfőtől kiindulva legyezőszerűen sugárzik szét az üvegtestben a lencse felé. Egy másik rostrendszer, mely csaknem minden általam megvizsgált gerinces állatban megvan, az *ora serrata* tájékáról, vagyis az ideghártya *pars opticájának* a *pars cœcájába* való átmenete helyén ered s kissé fellazulva hátrafelé húzódik s a *tractus centralis* körül vész el.

Ezt a nyalábot RETZIUS észlelte először a békán, a miért RETZIUS-féle nyalábnak neveztem el. E két főrendszeren kívül még egyéb részleteit is megállapíthattam a rostocskák elrendeződésének s azt az érdekes tényt figyeltem meg, hogy a rostocskák elrendeződése nem egészen egyforma a szemgolyó orrfelöli és halántéki oldalán, a mit a látóidegfőnek a szemgolyóba való excentrikus belépésével hozok összefüggésbe. Ennek bizonyítékát abban látom, hogy legkevésbé kifejezett ez a különbség a béka szemén, a melyen a látóideg a szemnek csaknem a hátulsó polusán tér be. Eltekintve ettől az állattól, az említett asymmetriát minden állat szemén megtaláltam.

A béka üvegtestében (vizsgálataimat a *rana esculenta* szemén végeztem) a legfeltűnőbb képződmény szintén a *tractus centralis*. A RETZIUS-féle nyaláb itt is eléggé fejlett. Feltűnő s éppen csak a békán előforduló jelenség egy igen ritka fonatú, laza üvegtest-részlet, mely a *tractus centralist* gyűrűalakban veszi körül. A salamandrán előforduló sugárirányú rostrendszer itt hiányzik, ezzel szemben azonban egy új, igen erős rostokból álló rendszer jelenik meg, mely függetlenül a RETZIUS-féle nyalábtól, de ugyan-csak az *ora serratán* eredve, a szem központi részei és háttére

felé húzódik. A béka üvegtestének rostfonata valamivel lazább a salamandraénál; a rostocskák itt is elég finomak.

A *tropidonotus natrix* szemében szintén a *tractus centralis* a legfeltűnőbb képződmény. De mellette itt egy másik új képződmény tűnik elő, szorosan hozzacsatlakozva, ez a *tractus hyaloideus*, mely azonban nem a látóidegfőn, hanem mellette, a látóidegfőn belépő *arteria centralis retinæ* halántéki ágán ered. Ez a *tractus hyaloideus* éppen olyan erős rostköteg, mint a *tractus centralis*, de a rostok benne többé-kevésbé csőszerű elrendeződést mutatnak s egy laza, jóval ritkább szövésű belső részletet fognak körül. Véleményem szerint első nyomát látjuk itt már a teknősökön s a *coluber vivax*on teljes fejlettségében megjelenő *canalis hyaloideus*nak.

Retzius-nyalábót ezen az állaton nem tudtam kimutatni, csak egy elmosódott, szétszórt rostokból álló rendszer mutatható ki, mely éppúgy, mint a *Retzius*-nyaláb, az *ora serrata* tájékán veszi kiindulását s szintén *meridionalis* irányban halad. Vele egy gyengén fejlett *radialis* rostozat kereszteződik. Feltűnő a *tropidonotus*on az üvegtest elülső hártájának majdnem teljes hiánya.

A *coluber caspius* szeme a *tropidonotus*étól főleg abban különbözik, hogy itt az *arteria centralis* a szembe lépve egy verőeres hálózatot alkot, mely *neurogliától* környezve, mint alacsony kúp alakú képződmény nyomul a szembe. Ennélfogva itt mindkét képződmény, a *tractus centralis* és *hyaloideus* ezen a kúpon ered s egymástól nem is választható külön oly élesen.

A *coluber vivax*ban hiányzik a *tractus centralis*, de megvan a másik képződmény, mely azonban itt már mint jól fejlett *canalis hyaloideus* jelenik meg. Felfelé haladva az állatok sorozatán, itt találjuk meg tehát először ezt a képződményt teljes fejlettségében.

A gyíkokon (*lacerta muralis* és *viridis*) az erősen kifejlődött «kúp» következtében majdnem teljesen új szerkezetet mutat az üvegtest. A kúp itt mint széles vaskos képződmény nyúlik be az üvegtestbe. A *tractus centralis* széles alappal a kúpnak oldalsó felszínén ered, széles tölcserré tágulva ki előre s elfoglalva az üvegtest legnagyobb részét. Kifelé, az üvegtest fenn-

maradt része felé hártyaszerű képződmény választja el s így az egész üvegtest elég élesen elkülönült két részre oszlik.

A kúp csúcsa előtt egy lazább szövésű üvegtestrészlet foglal helyet. *Canalis hyaloideus* nincs jelen; talán az imént említett laza részlet felel meg neki. A *tractus* határhártyáján kívül levő üvegtestrészlet szerkezete nagyjában megegyezik a *tropidonotus* üvegtestének szerkezetével, de bizonyos hasonlatosság mutatkozik a béka üvegtestével is abban a tekintetben, hogy a *tractus* körül itt is megvan a békánál említett gyűrűalakú laza üvegtestrészlet.

A megvizsgált hüllők közül a teknősbéka áll üvegtestének szerkezete tekintetében legközelebb az emlősökhöz. (A vizsgálat tárgya *testudo graeca* volt.)

Kúpot itt nem találunk. A zonulát az üvegtesttől jól fejlett határhártya választja el, a *RETZIUS*-nyaláb erős fejlettségben jelenik meg és ugyanazt a finom rajzolatot és jellemző lemezes szerkezetet mutatja, mint az emlősök legnagyobb részében. Az üvegtest rostozata finom, sűrű, a *tractus centralis* teljesen hiányzik, ezzel szemben tökéletes fejlettségben jelenik meg a *canalis hyaloideus*, mely itt is épp oly kevéssé valódi csatorna, mint a többi állaton, hanem csupán igen laza, a környező üvegtesttől külön határhártyával elkülönített részlete az üvegtestnek.

A *canalis hyaloideus* itt feltűnő módon a látóidegfőtől kiindulva nem a lencse hátulsó felszíne felé veszi az útját, hanem attól halántéki irányban haladva, a lencse és ora serrata között kifeszülő elülső határhártyán végződik.

Az a kérdés tolul végül elénk, hogy mi a jelentőségük ezeknek az erősen fejlett rostrendszereknek és rostképződményeknek. Legvalószínűbbnek én is *LEN*HOSSÉK felfogását tartom, mely szerint a rostrendszerek húzási és nyomási trajektoriumokat valósítanak meg, melyek a szem belső nyomásával, a szemre kívülről ható erőkkel és végül a szem belső nedvkeringésével hozhatók kapcsolatba. A *canalis hyaloideus* és a hártyák egy részének kialakulásában talán a legutóbb említett körülmény játszsza a főszerepet.

Vizsgálatok az emberi üvegtestről.

Könnyen érthető, hogy az üvegtestre vonatkozó szövettani vizsgálataimnál az emberi anyag érdekelt leginkább. Itt különösen feltűnő volt ismereteink hiányossága. Az emberi test szövettani tekintetben minden porcikájában meglehetősen behatóan át van vizsgálva és ime itt van előttünk egy nagyobb terjedelmű részlet, melynek szerkezetét eddigelé még nem sikerült megállapítani a technikai nehézségek miatt. Az emberi üvegtestről eddig rendelkezésre álló dolgozatok egyfelől csak az üvegtest általános szövettanával, a fibrillumok minőségével és másfelől az üvegtest legelűső, közvetlen a lencse és sugártest mögött fekvő részével foglalkoznak. Hiányzott még teljes, kimerítő leírása az üvegtestfibrillumok elrendeződésének, az üvegtest histotopographiájának az ember szemében; és hasonlóképen nem tartalmazott az irodalom eddig egyetlen ábrát sem, mely az emberi üvegtestet a maga egészében tüntette volna fel. Előrelátható volt, hogy ha sikerül az új technikával az ember üvegtestéből tökéletes készítményeket előállítani, a melyek az üvegtestet zsugorodás nélkül, rostjainak igazi elrendeződésével mutatják, megoldását fogja nyerni több függő kérdés, mely eddig a vizsgálati eszközök tökéletlensége miatt vita tárgya volt.

Az ember üvegteste, éppúgy mint az állatoké, finom, sűrű fibrilláris vázból s a rostocskák között folyékony részből, a humor vitreusból áll. A fibrillumok sűrű és igen finom fonatot alkotnak, melyben az egyes rostok nem haladnak elszigetelten, mint azt RERZIUS hitte, hanem, egymással dúsan anastomozva, a tér minden irányába kiterjedő összefüggő hálózatot alkotnak. Az emberi üvegtest vizsgálata különböző korokban szintén csak azt bizonyítja, hogy az üvegtestrostozat nem tekinthető élettelen, passiv váznak, mely ha egyszer kifejlődött, ugyanabban az alakban, legfeljebb csak növekedve marad meg az életen keresztül, hanem hogy változásoknak, differenciálódásnak alávetett, erőművi hatásokra élénken reagáló s valószínűleg elég élénk anyageserével bíró szövet. Nemcsak első fejlődésében, de későbbi kialakulásában is igen érzékeny módon alkalmazkodik a kívülről a szemre ható mechanikai ingerekhez, a fejlődő szem belső

nyomási viszonyaihoz és az élet különböző szakaszaiban, úgy látszik, kissé eltérő belső nedvkeringéshez. Ez alkalmazkodás eredményének tekinthetők azok a típusos rostrendszerek, a melyekbe az üvegtest fibrillumai elrendezkednek. Az egyes rostrendszerek mechanikai-statikai rendeltetését egyenkint közelebbről megállapítani ma még nem lehet, már csak azért sem, mert a szem belsejében uralkodó feszülési viszonyokat nem ismerjük eléggé, de valaha talán lehetséges lesz ez is.

Ily értelemben korántsem záródik le még a születéssel az emberi üvegtest fejlődése, sőt a születést követő első 5 évben szinte rohamosnak nevezhető az üvegtest belső differenciálódása. Ez idő alatt az üvegtest szerkezete ismételten jóformán teljesen átalakul. Ez a folyamat, bár kissé lassabb menetben, a 18—19. évig folytatódik. Ezen a fokon bizonyos értelemben nyugalmi állapot következik be, de csak abban az értelemben, hogy a további differenciálódások — a melyek a legmagasabb korig folytatódnak — ezentúl nem annyira új rostrendszerek képződésében, mint a már meglevők továbbfejlődésében, erősebb kialakulásában nyilvánulnak.

A vizsgálat fonalát a 7 hónapos magzaton vettem fel, még pedig egyrészt azért, mert körülbelül e kornál szűnnek meg az üvegtest fejlődésére vonatkozó adatok, másrészt pedig a későbbi stadiumok megértéséhez szükséges volt erre a kiindulópontra.

A 7 hónapos magzat üvegtestének szerkezete még eléggé durvának nevezhető. Legfeltűnőbb különbség a teljesen kifejlett állapothoz képest, hogy az üvegtest még nem különült el egy sűrűbb szerkezetű, tömöttebb kéregállományra és egy lazább szerkezetű belső részletre. Mindkét részlet egyformán tömött és ellentálló itt még.

A legfeltűnőbb képződmény e korban a canalis hyaloideus (Cloqueti), a mely e fokozaton még teljes fejlettségében áll előttünk, mint lazább szövésű, a környezettől külön határhártyával elválasztott üvegtestrészlet, mely a látóidegfőtől a lencse hátulsó felszínéhez húzódik. Az általam a disznó megfelelő csatornáján leírt 3 különböző átmérőjű részlet: az ampulla, az isthmus és az infundibulum itt is élesen megkülönböztethető.

A csatornában fut a már elzáródott, de még mindig meglevő és jól látható arteria hyaloidea.

A szem tengelyén át vont vízszintes metszeten úgy a halántéki, mint az orri oldalon az ora serrata tájékáról erősen fejlett rostrendszert látunk kiindulni. A RETZIUS nyalábnak felel ez meg, de e fokozaton nyalábnak még nem nevezhető, minthogy a rostok nincsenek benne elég sűrűn tömörülve. E rendszer rostjai részben meridionalis irányban húzódnak hátrafelé, részben a lencse mögé húzódva az üvegtest tengelyéhez közel egy aránylag durva rostozatú nyilirányú köteget alkotnak, mely a nasalis oldalon közvetlenül hozzáfekszik a csatornához, míg a temporalis oldalon egy szabálytalan rostozat választja el tőle. Az üvegtest elülső határhártyája még igen fejletlen s rajta jól megfigyelhető e hártyaszerű tömörülés keletkezési módja.

A 2 hónapos gyermekeken az üvegtest lényegesen eltérő képet tár elénk. Szerkezete általában finomabb és sűrűbb, elhatárolódása a zonula területe felé jóval élesebb. A zonulára vonatkozó feltűnő jelenség, a mely már az előbbi stadiumban is meg volt állapítható, hogy a zonularostok itt nemcsak a sugártesten és sugárnyulványokon erednek, hanem a szivárványhártya hátulsó felszínén is, annak külső harmadán. Az orbiculus ciliaris hámfján nemcsak zonularostok erednek, hanem közöttük egy sűrű üvegtestrostozat is, mely részben elfoglalja a zonulaterület oldalsó részét s még a 13. életévben is megtalálható. Ez üvegtestrostocskák közül a hátrább eredők közvetlenül hátrafelé haladva térnek be a tulajdonképeni üvegtestbe, az előbbre eredők egy darabon befelé haladnak s csak a lencse közelében hajolnak be hátrafelé az üvegtestbe, miközben a határhártyával kereszteződnek.

Ez a stadium azért bír különös érdekességgel, mert az éppen eltűnőfélben levő canalis hyaloideust tünteti elénk. Ezen a fokozaton túl már nyomát sem találtam a csatornának s így talán mondhatjuk, hogy az emberen a canalis hyaloideus még az élet első hónapjaiban, talán a 3–4. hónapban teljesen eltűnik úgy, hogy ezentúl nyomai sem maradnak meg. Lényeges különbség ez az ember s az eddig megvizsgált emlős állatok

között, a melyekben megmarad a csatorna. Magyarázatát talán abban kereshetjük, hogy az emberi szemben NUEL és BENOIT, valamint C. BEHR szerint hiányzik a szem belső nedveinek a látóidegfüvön át való lefolyása. A csatorna oly módon tűnik el, hogy határhártyája feloldódik s az intra- és extracanalicularis rosthálózat összekeveredik. MAWAS és MAGITOT állítása, hogy a csatorna eltűnése falzatának összeesése útján megy végbe, nem bizonyult helyesnek.

Az üvegtest körzeti részeiben ugyanazt a meridionalis szerkezetet észleljük, mint az előbbi fokozaton és a szem tengelyrészében itt is a nyílirányú rostozat az uralkodó. Mindkét rostrendszer elül az orbiculus ciliaris hámfján kiinduló előbb említett rostozatba megy át. Még mindig nincs meg a különbség a tömöttebb kéreg és a lágyabb velő között.

A 3½ éves gyermek üvegteste megint teljesen eltérő szerkezetet tüntet fel. Míg eddig a meridionalis szerkezet volt uralkodó az üvegtest képeben, addig ezt most egy sugárirányú, radiär-typus helyettesíti. Csak a peripherián alkot az üvegtest egységes rosthálózatot, beljebb sugárirányú kötegekké látjuk tömörülni az egyes rostokat, a melyek beljebb a szem központja felé valóságos kis hártává erősödnek. A halántéki oldalon e rostos hárták egy erősebb, egységes, homlokirányú átmetszeten félholdalakú képződménynyé tömörülnek.

A 13 éves gyermekén sajátyszerű módon megint csak a meridionalis rostozat az erősebb. Itt már mint erőteljes, feltűnő képződmény lép előtérbe a RETZIUS-nyaláb, mely hátrafelé szabályos meridionalis rostrendszerre lazul fel; ez alkotja az üvegtest körzeti részét, az üvegtestkérget. Az üvegtest e része már közel áll a végleges szerkezetéhez, míg a szem belsejében még erős fejlődésben látunk olyan rostkötegeket, melyek még a 20. év előtt eltűnnek.

A 20 éves egyén szemében éri el az üvegtest teljesen kifejlesztett állapotát. Ha összehasonlítjuk e fokozatot a 40 éves ember üvegtestén észlelhető viszonyokkal, nem találunk ez utóbbin egyéb különbséget, mint azt, hogy egyes, már a 20 éves egyénben is meglevő rostrendszerek erősebb fejlődést értek el.

A kifejlődött üvegtest szerkezetének leírása alapjául a 46 éves ember üvegtestét választottam. Az üvegtestrostok elrendeződése a következőkben vázolható röviden:

A rostrendszerek tanulmányozására homlokirányú és vízszintes metszetek összehasonlító vizsgálatára van szükség: csak így tekinthetjük át a különböző irányban kereszteződő rostnyalábokat és kaphatunk helyes képet a kereszteződő nyalábok elrendeződéséről az üvegtest belsejében.

Meridionalis (vízszintes vagy sagittalis) metszeteken vizsgálva az üvegtestet, ez 3 részből látszik állani. Egy leginkább meridionalis rostozatú, sűrű, tömöttebb kéregrésztetre egy valamivel lazább, nagyjában nyílrányú rostok által alkotott közbeeső réteg következik; az üvegtest belsejét egy igen laza szövésű és rendszertelen elrendezésű belső rész, a velő foglalja el.

A kéreg meridionalis rostozata előre fokozatosan a RETZIUS-köteggé tömörül össze, mely az ora serrata előtt a ciliaris hámon tapad. A szem háttére felé a kéreg délkörirányú rostozata lassan veszít a szabályosságából és eltűnik a diffusus üvegtesthálózatban.

Az átmeneti réteg, mint említettük, általában nyílrányú szerkezetű. A kéregtől rendszerint, de csak a szem elülső részében, finom határhártya választja el. Elül az átmeneti réteg rostozata igen finom és sűrű rostrendszerbe megy át, mely végül részben a határhártyához tapadva végződik, részben pedig ezen áthaladva, az orbiculus ciliaris hámjához követhető.

Az üvegtest elülső határhártyája mögött egy eddig ismeretlen, igen érdekes rostrendszer került megfigyelésre. Igen erős rostokból áll ez, melyek a határhártyával párhuzamosan futnak s a határhártya felé vonuló rostrendszerekkel kereszteződnek, miközben azonban velük összefüggésbe jutnak.

Azok a sugárirányú tömörülések, a melyek a homlokirányú metszeteken olyan feltűnő jelenséget alkotnak, a meridionalis metszeten csak halvány, árnyyszerű sötétebb és világosabb sávok alakjában mutatkoznak. Az üvegtest velőállománya igen laza és szabálytalan szerkezetű, mégis a még leginkább szembeötlő rostok főképen nyílrányban haladnak benne. A velőállományban e korban már rendszeren szembeötlenek egyes feltűnően laza

szerkezetű, vagy esetleg egészen szerkezetnélküli, csak folyadékkal kitöltött hézagok. Ezek a lacunák, melyek rendesen az átmeneti rétegben levő sűrűbb radiær irányú hárttyák közé is beterjednek, az üvegtest aggkori elváltozásainak első hirnökei. De e belső oldódási folyamatnak első nyomait sokszor már jóval korábban észlelhetjük; másfelől vannak esetek, a mikor a 40-es években e tünetek még teljesen hiányoznak. Mint látni fogjuk, ezek a korrall járó elváltozások csak a velőállományra és az intermediær réteg belső lazább szövésű részeire szorítkoznak, míg a kéregállomány még a magasabb korban is változatlanul mutatja a rendes szerkezetet, sőt még bizonyos progressiv differenciálódásokat tüntet fel olyan korban, a mikor a velőállományon már nagyfokú felhigulást észlelünk. Az üvegtest velőállományának ezt a korrall járó részleges elfolyósodását szövettanilag már RETZIUS, WOLFRUM és mások is kimutatták, s hogy ez a hézagképződés nem a szem technikai kezelésének a rovására irandó, az kiderül abból, hogy STILLING és WOLFRUM friss, nem rögzített anyagon is észlelte.

A szem homlokirányú metszetein az üvegtestben szintén jól megkülönböztethető a 3 réteg: a kéreg, az átmeneti állomány és a velő. De itt élénken szembeötlik az üvegtestnek olyan szerkezete, mely a délkörirányú metszeteiken csak halványan mutatkozott: a radiær-szerkezet. Az egész kéreg és hasonlóképen az átmeneti réteg sűrűbb, tömöttebb sugárirányú oszlopszerű rostfonatokat tüntet fel, melyek körülbelül egyenlő szelvényekre osztják fel az üvegtestet s melyek között lazább és egyenletesebb szövésű részletek vannak. Ezek az oszlopszerű nyalábok vagy «columellák» csak átmetszetei meridionalisan futó, lemezszerűen elrendezett rosttömörüléseknek. A szem felszíne irányában ezek a columellák nem húzódnak egészen az ideghárttyáig, hanem tőle kissé beljebb már feloldódnak a kéregnek szabályos circularis rostozatában.

Befelé a radiær-nyalábok nem végződnek a kérget az intermediær-állománytól elválasztó határhárttyán, hanem azon túl benyomulnak az intermediær-rétegbe s itt rostozatos szerkezetüket elvesztve, valóságos hárttyácskákká tömörülnek. E membranellák az üvegtest velőállományának külső határáig követ-

hetők, itt elvesznek, miután ismét finom rostocskákra osztottak.

Elképzelhető, hogy ha az üvegtestet erősebb szerekkel rögzítjük, a lazább szövésű structurák esetleg tönkremennek s így esetleg különválnak a tömöttebb kéreg a valamivel lazább közbülső rétegtől s az egész laza velőtől, úgy, hogy a hagyma-szerű szerkezet benyomását kaphatjuk, másfelől pedig szétválhat az üvegtest kéregállománya a tömött radiær-sövények között levő lazább részek feloldása folytán narancsszelvényyszerű részekre is, látszólagos alapot szolgáltatva így a régi HANNOVER-féle «Apfelsinen»-theoriának.

Így tehát azt látjuk, hogy egyik elmélet sem, sem a hagyma-, sem a narancs-elmélet nincs minden alap híján, de viszont egyik sem nevezhető egészen helyesnek, mert az üvegtest fibrillaris váza egységes, összefüggő rendszert alkot, melyben legfeljebb bizonyos tömörülések szabnak meg némi concentrikus és radiærszerkezetet.

A 60 éves ember szemében az üvegtest velőállománya csaknem egészen elfolyósodott, belőle csak egyes elszigetelt rostczafatok és nyalábok maradtak meg. A kéreg ellenben még e korban is majdnem teljesen érintetlenül megvan s belső differenciálódásait is folytatja, a mint azt különösen a sugárirányú rostképződmények erősebb fejlettsége tanúsítja.

Az üvegtestnek egyetlen lényeges morphologiai alkotó része a finom rosthálózat, míg az e hálózatban itt-ott található sejtek, a melyek valószínűleg egyfelől vándorsejtek, másfelől pedig a fejlődő ideghártyából lefűződött ectoderma-elemek, jelentőséggel nem bírnak. A fibrillaris hálózat egyes rostnyalábjai és rostrendszerei s a hálózatnak helyenkint való különböző sűrűsége szabja meg az üvegtest makroszkopos szerkezetét.

A BINOM CONGRUENTIÁK ELMÉLETÉNEK ÚJ TÁRGYALÁSA.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

A binom congruenciák elméletét a maga classicus egyszerűségében már GAUSS kifejtette a *Disquisitiones arithmeticae* III. fejezetében. A kutatás főeszköze ott az a sajátos algoritmus, mely az index-rendszerek használatán alapszik és a mely a binom congruenciák megoldását épp oly egyszerű módon teszi lehetővé, mint az analysisban a logarithmus-rendszerek használata a gyökvonást. Lehet-e a binom congruenciák elméletét az index-rendszerek felhasználása nélkül is felépíteni? Ez a kérdés módszertani szempontból fontos, de tartalmilag is érdekes. Erre a kérdésre óhajtok a jelen dolgozatomban válaszolni. Valóban sikerült a binom congruenciáknak ilyen, az index-rendszerek használatától független elméletét kifejteni, még pedig teljesen elemi számelméleti tételek felhasználásával.

I. Előkészítő tételek.

A jelen fejezetben összeállítok néhány — részben már ismeretes — tételt, a melyre az elmélet főtételének bebizonyítását visszavezetem.

1. §. *Tétel. Ha p törzsszám és*

$$(n, p-1) = \delta,$$

azaz n és $p-1$ legnagyobb közös osztója δ , akkor az

$$x^n \equiv 1 \pmod{p} \quad (1)$$

és az

$$x^{\delta} \equiv 1 \pmod{p} \quad (2)$$

congruentiák gyökei ugyanazok.

Mindenekelőtt könnyen kimutatható, hogy az (1) congruentia bármely ξ gyöke kielégíti a (2) congruentiát is, azaz ha

$$\xi^n \equiv 1 \pmod{p},$$

akkor egyszersmind

$$\xi^{\delta} \equiv 1 \pmod{p},$$

δ ugyanis mint n és $p-1$ legnagyobb közös osztója a

$$\delta = an + b(p-1)$$

alakban állítható elő, a hol a és b egész szám. Ennek következtében

$$\xi^{\delta} \equiv \xi^{an+b(p-1)} \equiv (\xi^n)^a \cdot (\xi^{p-1})^b \pmod{p}.$$

De mivel föltevésünknel fogva

$$\xi^n \equiv 1 \pmod{p},$$

és FERMAT tételénél fogva

$$\xi^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

mert ξ mint az (1) congruentia gyöke p -vel osztható nem lehet, azért tehát

$$\xi^{\delta} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Hogy megfordítva (2)-nek minden gyöke egyszersmind (1)-nek is gyöke, az még egyszerűbben mutatható ki. Ha ugyanis

$$\eta^{\delta} \equiv 1 \pmod{p},$$

akkor, mivel $\frac{n}{\delta}$ egész szám, egyszersmind fönnáll a következő congruentia is

$$(\eta^{\delta})^{\frac{n}{\delta}} \equiv 1^{\frac{n}{\delta}} \pmod{p},$$

azaz

$$\eta^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Tehát csakugyan a (2) congruentia bármely η gyöke kielégíti egyszersmind az (1) congruentiát is, a mivel a kimondott tétel teljesen be van bizonyítva.

2. §. Tétel. Az

$$x^\delta \equiv 1 \pmod{p}$$

congruentiának fokszámával megegyező számú különböző gyöke van. Ennek a — különben ismeretes — ténynek igazolására elegendő az

$$x^{p-1} - 1 \equiv \prod_{k=1}^{p-1} (x - k) \equiv \left[x^{\left(\frac{p-1}{\delta} - 1\right)\delta} + x^{\left(\frac{p-1}{\delta} - 2\right)\delta} + \dots + x^\delta + 1 \right] (x^\delta - 1) \pmod{p}$$

azonos congruentia fölrása, melyet az a körülmény tett lehetővé, hogy $p-1$ a δ -val osztható.

Mivel pedig az 1. §-ban kimondott tétel értelmében az (1) és (2) alatti congruentiák gyökei megegyezők, kimondhatjuk, hogy az

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}$$

congruentia gyökeinek pontos száma: δ , a hol

$$\delta = (n, p-1).$$

3. §. Ha az

$$1, 2, 3, \dots, p-1 \quad R)$$

redukált maradéksor számainak n -edik hatványait képezzük és azokat a p modulusra vonatkozóan tekintjük, akkor pontosan $\frac{p-1}{\delta}$ számú különböző számértéket kapunk; tehát az egymástól különböző n -edik hatványmaradékok száma $\frac{p-1}{\delta}$.

Legyenek az

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}$$

congruentia különböző gyökei:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\delta, \quad s_1)$$

Mindenekelőtt könnyen belátható, hogy e sorozat számai a szorzás műveletével szemben csoportot alkotnak, azaz s_1) bármely két számának szorzata vagy bármely számának bármely hatványa ismét az s_1) sorozat száma. Ha ugyanis

$$\xi_i^n \equiv 1 \pmod{p},$$

$$\xi_j^n \equiv 1 \pmod{p},$$

akkor innen tüstént következik, hogy

$$(\xi_i \xi_j)^n \equiv 1 \pmod{p}$$

és

$$(\xi_i^k)^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ha $\delta = p-1$, akkor a bebizonyítandó tétel FERMAT tételénél fogva evidens. Ekkor ugyanis az s_1) és R) sorozatok azonosak és e sorozatok bármely számának $(p-1)$ -dik és így n -edik hatványa is FERMAT tételének értelmében 1-gyel kongruens, úgy hogy a különböző n -edik hatványmaradékok száma, a mint ezt a bebizonyítandó tételünk is követeli, 1-gyel egyenlő.

Ennélfogva behatóan csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, a melyben δ a $p-1$ -nél kisebb, a midőn tehát az s_1) sorozat számai a R) sorozatot még nem meritik ki. Legyen most már r_2 az R) sorozatnak oly száma, a mely az s_1) sorozatban még nem fordul elő; akkor az

$$r_2 \xi_1, r_2 \xi_2, \dots, r_2 \xi_i, \dots, r_2 \xi_k, \dots, r_2 \xi_\delta \quad s_2)$$

sorozat számai egymástól és az s_1) sorozat számaitól is különbözők, ha azokat a p modulusra vonatkozóan tekintjük. Ugyanis az

$$r_2 \xi_i \equiv r_2 \xi_k \pmod{p}$$

congruentiából tüstént következne

$$\xi_i \equiv \xi_k \pmod{p},$$

de ezt kizárja az a körülmény, hogy az s_1) sorozat számai \pmod{p} különbözők; az

$$r_2 \xi_i \equiv \xi_k \pmod{p}$$

congruentia pedig azért lehetetlen, mert belőle és az s_1) sorozat csoporttulajdonságából következne, hogy

$$r_2 \equiv \xi_k \xi_i^{p-2} \equiv \xi_l \pmod{p},$$

de ez lehetetlen azért, mert r_2 föltevésünk szerint az s_1) sorozat számaitól \pmod{p} különböző.

Ha az R) redukált maradéksornak van még oly r_3 száma, mely sem az s_1) sem az s_2) sorozatban nem fordul elő, akkor az

$$r_3 \xi_1, r_3 \xi_2, \dots, r_3 \xi_i, \dots, r_3 \xi_\delta \quad s_3)$$

sorozat számai ismét egymástól, valamint az s_1 és s_2 sorozatok számaitól különbözök, mert az ilyen congruenciából, a milyen

$$r_3 \xi_i = r_2 \xi_k \pmod{p},$$

ismét s_1 csoporttulajdonságánál fogva következnek, hogy

$$r_3 \equiv r_2 \xi_k \xi_i^{p-2} \equiv r_2 \xi_i \pmod{p},$$

a mi ismét ellenkezik azzal, r_3 az s_2 sorozatban nem foglaltatik. Ezt az eljárást kellően folytatva, az R redukált maradéksor számai végül mind fel lesznek használva és e mellett a következő táblázatban elrendezve:

$$\begin{array}{llll} \xi_1, & \xi_2, \dots, & \xi_\delta; & s_1) \\ r_2 \xi_1, & r_2 \xi_2, \dots, & r_2 \xi_\delta; & s_2) \\ r_3 \xi_1, & r_3 \xi_2, \dots, & r_3 \xi_\delta; & s_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ r_t \xi_1, & r_t \xi_2, \dots, & r_t \xi_\delta; & s_t). \end{array} \quad (T)$$

Mivel e táblázat most már R összes számait magában foglalja, azért

$$t\delta = p-1;$$

és így e táblázat sorainak száma:

$$t = \frac{p-1}{\delta}.$$

E táblázat egy- és ugyanabban a sorában foglalt számok n -edik hatványai egymással kongruensek, mert

$$(r_i \xi_k)^n \equiv r_i^n \xi_k^n \pmod{p};$$

$$(k=1, 2, \dots, \delta)$$

és

$$\xi_k^n \equiv 1 \pmod{p},$$

tehát

$$(r_i \xi_k)^n \equiv r_i^n \equiv D_i \pmod{p}$$

$$(k=1, 2, \dots, \delta).$$

E mellett könnyen belátható, hogy az

$$r_1^n \equiv D_1, \dots, r_i^n \equiv D_i, \dots, r_j^n \equiv D_j, \dots, r_t^n \equiv D_t$$

sorozat számai a p modulusra nézve különbözők; mert az

$$r_j^n \equiv r_i^n \pmod{p}$$

congruentiából tüstént az

$$(r_j r_i^{p-2})^n \equiv 1 \pmod{p}$$

congruentia következne, azaz az következne, hogy $r_j r_i^{p-2}$ az s_i sorozat valamely száma, vagy hogy

$$r_j r_i^{p-2} \equiv \xi_k \pmod{p};$$

és innen

$$r_j \equiv r_i \xi_k^{-1} \pmod{p};$$

a mi pedig lehetetlen, mert r_j oly számot jelentett, mely a (T) táblázat s_i sorában nem fordul elő.

Ezen az alapon tehát kimondhatjuk, hogy a

$$D_1, D_2, \dots, D_{\frac{p-1}{\delta}}$$

számok az összes lehetséges különböző n -edik hatványmaradékok és hogy ezeknek pontos száma:

$$\frac{p-1}{\delta},$$

valamint azt is, hogy ha az R) redukált maradéksor összes számaikat az n -edik hatványra emeljük, $\frac{p-1}{\delta}$ számú különböző értéket kapunk, melynek mindegyike δ -szor adódik.

4. §. *Elnevezés.* Az egész számoknak oly sorozatát, a melynek számai n -edik hatványra felemelve az R) redukált maradéksor számaiból alakítható és egymástól különböző n -edik hatványait szolgáltatják, *n -edfokú teljes rendszernek* nevezzük. Az előzők szerint az összes n -edfokú teljes rendszerek a következők:

$$\xi_{i_1}, r_2 \xi_{i_2}, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}} \xi_{i_{\frac{p-1}{\delta}}}$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_{\frac{p-1}{\delta}} = 1, 2, \dots, \delta).$$

Ennek következtében a különböző n -edfokú teljes rendszerek száma: $\delta^{\frac{p-1}{\delta}}$.

II. Az n -edfokú binom congruenciák megoldhatóságának feltétele.

Legyen most már adva az

$$f(x) \equiv x^n - D \equiv 0 \pmod{p} \quad (D \not\equiv 0 \pmod{p})$$

a p törzsszám-modulusra vonatkozó binom congruentia és legyen ismét $p-1$ és n legnagyobb közös osztója,

$$(n, p-1) = \delta,$$

a hol δ -ról föltehető, hogy $(p-1)$ -nél kisebb. Mert ha

$$\delta = p-1,$$

akkor FERMAT tételénél fogva az

$$x^n \equiv D \pmod{p}$$

congruentia akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$D \equiv 1 \pmod{p}$$

és ekkor a binom congruenciát az

$$1, 2, \dots, p-1$$

redukált maradéksor minden száma kielégítvén, különböző gyökeinek száma tehát

$$\delta = p-1$$

lesz, míg megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p},$$

a mi a később kifejtendő általános eredménnyel — mint látni fogjuk — teljes összhangzásban van.

Áttérve most már az általános eset tárgyalására, a melyben

$$\delta < p-1,$$

mindenekelőtt világos, hogy az

$$f(x) \equiv x^n - D \equiv 0 \pmod{p}$$

congruentiának akkor és csak akkor van gyöke, ha az

$$f(1), f(2), \dots, f(p-1)$$

helyettesítési értékek között legalább egy van, mely p -vel osztható; erre pedig — mivel p törzsszám — szükséges és elegendő, hogy e helyettesítési értékek szorzata p -vel osztható legyen, azaz hogy fennálljon a következő congruentia:

$$C \equiv \prod_{i=1}^{p-1} f(i) \equiv \prod_{i=1}^{p-1} (i^n - D) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Az I. fejezet 3. és 4. §-ában foglaltak szerint a redukált maradéksor számai a T) táblázatban rendezhetők el, a melynek egy és ugyanahhoz a sorához tartozó számoknak n -edik hatványai a p modulusra nézve kongruensek. Ennek következtében C szorzat ebben az alakban is írható:

$$C \equiv \left[\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{\delta}} (r_j^n - D) \right]^\delta \pmod{p},$$

a hol

$$r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}}$$

n -edfokú teljes rendszert alkotnak.

Foglalkozzunk mgst már behatóbban a

$$P \equiv \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{\delta}} (r_j^n - D) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{\delta}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{\delta}} (D - r_j^n)$$

szorzattal. Ha ezt a D fogó hatványai szerint kifejtjük, akkor az a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{p-1}{\delta}} P &= D^{\frac{p-1}{\delta}} - S_1(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}}^n) D^{\frac{p-1}{\delta}-1} + \dots + \\ &+ (-1)^k S_k(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}}^n) D^{\frac{p-1}{\delta}-k} + \dots + \\ &+ (-1)^{\frac{p-1}{\delta}-1} S_{\frac{p-1}{\delta}-1}(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}-1}^n) D + \\ &+ (-1)^{\frac{p-1}{\delta}} r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}}^n, \end{aligned}$$

a hol az

$$S_k(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{d}}^n) = \sum r_1^n r_2^n \dots r_k^n$$

együtthatók az

$$r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{d}}^n$$

mennyiségek elemi symmetrikus formái.

Most már könnyen kimutatható az

$$S_1' \equiv S_2' \equiv \dots \equiv S_k' \equiv \dots \equiv S_{\frac{p-1}{d}-1}' \equiv 0 \pmod{p}$$

congruentiák fennállása. Ugyanis

$$S_k(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{d}}^n)$$

az

$$r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{d}}$$

mennyiségeknek nk -adfokú homogen kifejezése; ennek következtében:

$$S_k[(tr_1)^n, (tr_2)^n, \dots, (tr_{\frac{p-1}{d}})^n] \equiv t^{nk} S_k(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{d}}^n) \pmod{p} \quad (1)$$

a t bármely értéke mellett. Válaszszuk t -t úgy, hogy p -vel ne legyen osztható, akkor az

$$r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{d}}$$

n -edfokú teljes rendszerrel egy időben

$$tr_1, tr_2, \dots, tr_{\frac{p-1}{d}}$$

sorozat elemei is n -edfokú teljes rendszert alkotnak, mert a

$$\begin{aligned} tr_i &\equiv tr_k \\ (tr_i)^n &\equiv (tr_k)^n \end{aligned} \pmod{p}$$

congruentiák lehetetlensége folytán e sorozatnak elemei, valamint ez elemek n -edik hatványai is a p modulusra nézve különbözök és így elemeinek n -edik hatványai valóban megadják az

I. fejezet 3. §-a értelmében létező összes $\frac{p-1}{\delta}$ számban lévő különböző n -edik hatványt. Ennek következtében az

$$r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}}^n$$

és

$$(tr_1)^n, (tr_2)^n, \dots, (tr_{\frac{p-1}{\delta}})^n$$

sorozatok, ha ezeket a p -modulusra vonatkozóan tekintjük, csak elemeik sorrendjében különböznek és mivel továbbá

$$S_k(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}}^n)$$

az

$$r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}}^n$$

mennyiségek symmetrikus függvénye, mely e mennyiségek bármely felcserélésekor nem változik, azért

$$S_k[(tr_1)^n, (tr_2)^n, \dots, (tr_{\frac{p-1}{\delta}})^n] \equiv S_k(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}}^n) \pmod{p}.$$

Ennek figyelembe vétele mellett a (I) alatti relatio most már így írható:

$$(t^{nk} - 1) S_k(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}}^n) \equiv 0, \pmod{p} \quad (\text{II})$$

$$(k=1, 2, \dots, \frac{p-1}{\delta}-1).$$

A kn szorzat nem osztható $(p-1)$ -gyel, mert

$$\frac{kn}{p-1} = \frac{k \frac{n}{\delta}}{\frac{p-1}{\delta}}$$

az

$$\left(\frac{n}{\delta}, \frac{p-1}{\delta} \right) = 1$$

egyenlőségnél fogva egész szám csak akkor lehetne, ha k a $\frac{p-1}{\delta}$ -vel osztható lenne, de ezt kizárja az a körülmény, hogy

k -nak tekintetbe jövő legnagyobb, értéke $\frac{p-1}{\delta} - 1$, a $\frac{p-1}{\delta}$ -nál kisebb lévén, vele nem osztható. Mivel másrésről a

$$t^{h(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad (h \text{ egész szám})$$

az egyedüli congruenciák, melyeket a redukált maradéksor összes számai kielégítenek, azért a

$$t^{nk} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

melyben — mint kimutattuk — az nk fokszám $(p-1)$ -gyel nem osztható, nem is lesz a redukált maradéksor minden számával kielégíthető és így olyan a zérustól különböző τ egész számnak is kell léteznie, a melyre nézve

$$\tau^{nk} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ha most már a t minden egész értéke mellett fennálló (II) alatti congruenciában t helyébe τ -t helyettesítjük, a nyerendő

$$(\tau^{nk} - 1) S_k(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}-1}^n) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(k=1, 2, \dots, \frac{p-1}{\delta}-1)$$

congruentia mutatja, hogy

$$S_k(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{\frac{p-1}{\delta}-1}^n) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(k=1, 2, \dots, \frac{p-1}{\delta}-1).$$

Ennek következtében P így írható

$$(-1)^{\frac{p-1}{\delta}} P \equiv D^{\frac{p-1}{\delta}} + (-1)^{\frac{p-1}{\delta}} r_1^n r_2^n \dots r_{\frac{p-1}{\delta}-1}^n \pmod{p}. \quad (\text{III})$$

E congruentia jobboldalán álló kifejezés második tagjáról most már könnyen kimutatható, hogy -1 -gyel kongruens. Ha ugyanis az I. fejezet 3. §-ában szereplő (T) táblázat összes számainak egymással szorozzuk és figyelembe vesszük, hogy e táblázat számai az

$$1, 2, 3, \dots, p-1$$

redukált maradéksor számaitól — melyeknek szorzata Wilson tételének értelmében -1 -gyel kongruens — csak sorrendben különbözök, a következő congruenciát kapjuk:

$$r_1^{\delta} r_2^{\delta} \dots r_{\frac{p-1}{\delta}}^{\delta} (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{\delta})^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Itt

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\delta}$$

az

$$x^{\delta} - 1 \equiv (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_{\delta}) \equiv 0 \pmod{p}$$

congruentia gyökeit jelentik. Ennek következtében

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\delta} \equiv (-1)^{\delta-1} \pmod{p}$$

és így

$$r_1^{\delta} r_2^{\delta} \dots r_{\frac{p-1}{\delta}}^{\delta} (-1)^{(\delta-1) \frac{p-1}{\delta}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Ha a congruentia mindkét oldalát az $\frac{n}{\delta}$ hatványra emeljük, lesz:

$$r_1^n r_2^n \dots r_{\frac{p-1}{\delta}}^n (-1)^{(\delta-1) \frac{n}{\delta} \frac{p-1}{\delta}} \equiv (-1)^{\frac{n}{\delta}},$$

a honnan

$$(-1)^{\frac{p-1}{\delta}} r_1^n r_2^n \dots r_{\frac{p-1}{\delta}}^n \equiv (-1)^K,$$

a hol

$$K = \frac{p-1}{\delta} \left[1 + \frac{n}{\delta} (\delta-1) \right] + \frac{n}{\delta}.$$

K -ről most már közvetlenül világos, hogy mindig páratlan szám. Ugyanis, mivel δ az n és $p-1$ számok legnagyobb közös osztója, $\frac{n}{\delta}$ és $\frac{p-1}{\delta}$ egymáshoz képest relatív primszámok; ha tehát

$$\frac{n}{\delta} \equiv 0, \pmod{2},$$

akkor

$$\frac{p-1}{\delta} \equiv 1, \pmod{2},$$

és így

$$K \equiv \frac{p-1}{\delta} \equiv 1 \pmod{2};$$

ha pedig

$$\frac{p-1}{\delta} \equiv 0 \pmod{2},$$

akkor

$$\frac{n}{\delta} \equiv 1 \pmod{2},$$

de akkor ismét

$$K \equiv \frac{n}{\delta} \equiv 1 \pmod{2};$$

ha végül

$$\frac{n}{\delta} \equiv 1 \pmod{2},$$

és

$$\frac{p-1}{\delta} \equiv 1 \pmod{2},$$

akkor, mivel $p-1$ páros szám és $\frac{p-1}{\delta}$ páratlan, a δ -nak okvetlenül párosnak kell lennie, de akkor ismét

$$K \equiv 1 \cdot [1 + 1(\delta - 1)] + 1 \equiv \delta + 1 \equiv 1, \pmod{2}.$$

A K tehát minden lehetséges esetben páratlan lévén, csakugyan azt találjuk, hogy

$$(-1)^{\frac{p-1}{\delta}} r_1^n r_2^n \dots r_{\frac{p-1}{\delta}}^n \equiv -1 \pmod{p}.$$

Ezt az értéket a (III) alatti kifejezésbe helyettesítvén, lesz:

$$(-1)^{\frac{p-1}{\delta}} P \equiv D^{\frac{p-1}{\delta}} - 1 \pmod{p}$$

és így végül

$$C \equiv \prod_{j=1}^{p-1} f(j) \equiv P^{\delta} \equiv (D^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^{\delta} \pmod{p}.$$

C ennek következtében zérussal tehát akkor és csak akkor kongruens a p törzsszám-modulusra nézve, ha

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

De ezzel ki van mutatva, hogy az

$$x^n \equiv D \pmod{p}$$

binom congruentia megoldhatóságának szükséges és elegendő feltételét a

$$D^{\frac{n-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}$$

congruentia fejezi ki.

Végül még könnyen kimutathatjuk, hogy e feltétel teljesülése esetében az

$$x^n = D \pmod{p}$$

gyökeinek pontos száma δ .

Ha e feltétel teljesül, akkor az

$$x^k \equiv D \pmod{p}$$

congruentiának az előbb bebizonyított tétel értelmében legalább egy gyöke létezik. Legyen ez x_0 , úgy hogy

$$x_0^n \equiv D \pmod{p}.$$

Közvetlenül belátható, hogy ekkor az

$$x_0\xi_1, x_0\xi_2, \dots, x_0\xi_\delta \quad (\text{IV})$$

számok, a melyekben

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\delta$$

az

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}$$

congruentia gyökeit jelentik, egymástól különbözők és hogy mindannyian kielégítik az

$$x^n \equiv D \pmod{p}$$

congruentiát. E congruentiának tehát legalább δ számú különböző gyöke van. Hogy több gyöke nem lehet, az a következő megfontolásból derül ki. Ha x_i egyik tetszőszerinti gyöke, akkor az

$$x_i^n \equiv D \pmod{p}$$

és az

$$(x_0^{p-2})^n \equiv D^{p-2} \pmod{p}$$

congruentiák állanak fenn. Ezeket egymással szorozván, az

$$(x_i x_0^{p-2})^n \equiv D^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

congruentia adódik, mely világosan mutatja, hogy $x_i x_0^{p-2}$ az

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}$$

congruentia valamelyik gyöke. Legyen ez például ξ_i , akkor

$$x_i x_0^{p-2} \equiv \xi_i \pmod{p},$$

a honnan FERMAT tétele folytán

$$x_i \equiv x_0 \xi_i \pmod{p},$$

mely congruentia világosan elárulja, hogy a tetszésszerint választott x_i gyök már a (IV) alatti sorozatban bennfoglaltatik; úgy hogy a (IV) alatti sorozat már az összes gyököket szolgáltatja, melyeknek száma e szerint pontosan δ -val lesz egyenlő.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916. április 10.-én tartott üléséből.)

KISÉRLET A FUNCTIONÁLSZÁMÍTÁS RENDSZERES MEGALAPOZÁSÁRA.

DIENES PÁL-tól.

Második rész: Functionális derivált.

Bevezetés.

1. Előző közleményünkben általánosítottuk az integrál fogalmát oly módon, hogy minden E halmazon, például (a, b) számközben, értelmezett egyértékű korlátolt, különben pedig tetszőszerinti $f(x)$ függvényhez és bármelyik $\alpha(e)$ lineáris halmazfüggvényhez tartozott egy számérték: az $f(x)$ függvény E halmazon $\alpha(e)$ szerint vett integrálja

$$\int_E f(x) d\alpha(e).$$

A STIELTJES és LEBESGUE-féle integráloknak ezt az együttes általánosítását kiterjesztettük többszörös integrálokra is. Minden egyértékű korlátolt, különben tetszőszerinti $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvénycsoporthoz és $\alpha(e^1, e^2, \dots, e^n)$ n változós polylineáris halmazfüggvényhez tartozik egy szám, az $f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$ függvény-szorzatnak E_1, E_2, \dots, E_n halmazcsoporton $\alpha(e^1, e^2, \dots, e^n)$ szerint vett integrálja

$$\int_{E_1} \int_{E_2} \dots \int_{E_n} f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) d\alpha(e^1, e^2, \dots, e^n).$$

Az integrálfogalomnak ezt az általánosítását arra használtuk, hogy az elméleti physika szükségletei által előtérbe jutott, úgynevezett functionál-operatiók matematikai szerkezetét tanulmányozzuk. Olyan matematikai műveletek ezek, melyeknél a függvény egész számköznvi (vagy végtelen halmaznyi) értéke

együttesen határoz meg egyetlen számértéket, mint például a határozott integrálnál. Ilyen egymáshoz rendelés lehet függvény és függvény között is, hol minden függvényhez függvény tartozik ugyan, de az utóbbinak minden egyes értéke az előbbinek egész halmaznyi értéke által van együttesen meghatározva; ilyen például a határozatlan integrál. Ebben az irányban elért főeredményünk rövid foglalatja a következő.

Minden $P_n(f)$ úgynevezett n -ed fokú functionál-polynomhoz tartozik n , az egyes halmazváltozókban lineáris symmetrikus halmazfüggvény $\alpha_1(e)$, $\alpha_2(e^1, e^2), \dots, \alpha_n(e^1, e^2, \dots, e^n)$ azzal a tulajdonsággal, hogy minden E halmazon, például (a, b) számközben, értelmezett $f(x)$ függvényre

$$P_n(f) = \alpha_0 + \int_E f(x) d\alpha_1 + \int_E \int_E f(x_1) f(x_2) d\alpha_2 + \dots + \\ + \int_E \int_E \dots \int_E f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) d\alpha_n,$$

hol α_0 constans szám. Továbbá minden, E halmaz függvényeire értelmezett, folytonos $U(f)$ functionál előállítható mint ilyen $P_n(f)$ sorozat lime.

Jelen dolgozatunkban az új integrál jelzésére, kezelésének egyszerűsítése céljából, symbolismust vezetünk be s az integrált magát az $f(x)$ és $\alpha(e)$, illetve $f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$ függvény-szorzat és $\alpha(e^1, e^2, \dots, e^n)$ «belső szorzat»-ának hívjuk. Az elnevezés jogosult, mert az új szorzásművelet eleget tesz a közönséges szorzás formális törvényeinek és czélszerű is, mert a functionálokra adandó összes alapvető tételakat kizárólag integrálunk formális tulajdonságaiból fogjuk levezetni.

Az új symbolismus első nagy teljesítménye az, hogy a LAGRANGE-féle eljárás átvitelével lehetővé teszi a functionálok deriválásának általános értelmezését olyformán, hogy az új deriválás formális szabályai semmit sem különböznek a közönséges függvényderiválásnak megfelelő szabályaitól. *Ilyformán kezünkbe kerül az eddigi, számon operáló matematikát lényegesen általánosító, függvényeken operáló calculus, mondjuk functionálszámítás, a régihez teljesen hasonló formalismussal, s ez a*

calculus a physikai problémák természetéhez hasonlíthatatlanul jobban simul, mint a régi.

Már itt hangsúlyozzuk azonban, hogy az új calculus nem egy-két physikai példához készült önkényes jelrendszer, hanem a differentiál-számításnak módszeres formális általánosítása, illetőleg kiterjesztése, a mennyiben e számítást speciális esetként foglalja magában. A szám- és a függvény-fogalom közül ugyanis formálisan a függvény az általánosabb, mert minden szám tekinthető oly függvénynek, melynek értéke állandóan ugyanaz, ellenben a különböző értékeket felvevő függvények nem tekinthetők számnak. Ha már most az új calculus formuláiba mindegyik ilyen egyetlen számból álló értékészletű függvényeket, úgynevezett «állandó»-kat gondolunk, a műveletszabályok azonos-sága folytán a régi differentiál-calculus összefüggéseit kapjuk. Ezzel az általánosítás logikai feltétele ki van elégítve. Nincs kizárva természetesen, hogy hasonló rendszeres általánosítás más úton is volna végezhető.

Első fejezetünkben — a deriválás fogalmának és szabályainak megállapítása után — az új számítás főbb tételeit adjuk, mint a ROLLE-tétel analogonját, mely a véges TAYLOR-sorhoz — TAYLOR-formulához — vezet, a functionál hatványsorok tagonként végzett deriválhatóságának tételét, majd ennek segítségével bevezetjük az analitikai függvény WEIERSTRASS-féle fogalmának megfelelően az *analitikai functionál* fogalmát s az erre vonatkozó alaptételeket, például a MITTAG-LEFFLER-féle előállítás megfelelőjét a csillagtartományhoz hasonló függvénytartományban.

A második fejezetben, $f(x, y) = 0$ és $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ egyenletek analógiájára, azt a kérdést vetjük fel, mily függvényrelációk mily feltételek között határoznak meg a függvények között functionál viszonyt, azaz felvetjük az *implicit functionálok és a functionálderiváltú egyenletek existentia-problémáját* s mindegyikre adunk egy-egy tételt, a mik a lehetőséghez képest megfelelnek az $f(x, y) = 0$ és $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ egyenletekre vonatkozó existentiatételeknek. Rámutatunk végül arra, hogy a szám-calculus ez általánosítása függvény-calculussá maga után

vonja épen a functionálderiváltú egyenletek problémáján át ennek a calculusnak újabb általánosítását. Ezek a *functionál-integrálok* vagy általában *2-od osztályú functionálok*; és így tovább. Bebizonyítjuk azonban, hogy módszerünk és symbolismusunk szószerint átvihető bármilyen osztályú functionálra is; a calculus maga egy és ugyanaz marad, csak a jelek jelentése változik.

I. FEJEZET.

Functionál deriválása.

2. *Belső szorzat.* Előző tanulmányunkban ¹ általánosítottuk az integrál fogalmát oly módon, hogy a functionálpolinom s általában a folytonos functionál bárminő függvényhez rendelt értékét elő tudtuk vele állítani.

Az újonnan értelmezett integrál főbb tulajdonságait ² átírjuk új, egyszerűsítő symbolumokba. Integrálunkat a_n halmazfüggvény és $f(x)$ «belső szorzat»-ának minősítjük

$$\int_E f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) da_n = [a_n(e^1, e^2, \dots, e^n) \cdot f_1(x_1) \dots f_n(x_n)],$$

$$\int_E f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) da = [a \cdot f^n], \quad f^n = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)$$

definiáló egyenletek alapján. A belső szorzat elnevezést a physikában vektorokra használt $u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ belső szorzat analogiájára választottuk. Az analogia leginkább szembetűnő $n=1$ esetben. A szorzat-kifejezés használatára egyébként az is jogosít, hogy integrálunknak több formális tulajdonsága egyezik az ax^n szorzat tulajdonságaival.

A belső szorzat kezelési szabályai.

$$1. [(a_1 + a_2) \cdot f^n] = [a_1 \cdot f^n] + [a_2 \cdot f^n];$$

¹ DIENES PÁL: Kísérlet a functionálszámítás rendszeres megalapozására. Első rész, második fejezet. Math. és Term. Tud. Értesítő. XXXIV. kötet, 154. lap. 1916.

² U. o. 173. és 177. ll.

$$2. \quad [a.(f_1 + f_2)^n] = [a.f_1^n] + \binom{n}{1} [a.f_1^{n-1}f_2] + \dots + \\ + \binom{n}{i} [a.f_1^{n-i}f_2^i] + \dots + [a.f_2^n];$$

3. $[ca.(kf)^n] = c.k^n [a.f^n]$; c, k állandó mennyiségek.

4. Minden n -ed fokú functionál-polynom minden $f(x)$ függvényre nézve

$$P_n(f) = a_0 + [a_1 f] + [a_2 f^2] + \dots + [a_n f^n]$$

explicit alakban írható.

5. Minden

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot f^n]$$

functionál-hatványsor convergens minden oly $f(x)$ függvénynél, mely eleget tesz a

$$[f(x)] < \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}$$

feltételnek, hol A_n az $a_n(e^1, e^2, \dots, e^n)$ halmaz-függvényhez tartozó variáció-függvény felső korlátja, [positiv halmaz-függvény esetében $A_n = a(E)$] és hol a baloldal az $|f(x)|$ értékkészletének felső korlátját jelzi a vizsgált számközben vagy halmazon.

Az új szorzás két specziális tulajdonsága:

$$6. \quad [a(e^1, e^2).f(x_1)\varphi(x_2)] = [[a.f].\varphi] = [[a.\varphi].f],$$

hol $[a.f]$, valamint $[a.\varphi]$ egyváltozós halmaz-függvény s így jelzésünknek van értelme. Általában

$$[a(e^1, e^2, \dots, e^n).f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n)] = [[a.f_{i_1}f_{i_2}\dots f_{i_k}].f_{i_{k+1}}\dots f_{i_n}],$$

hol $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n$ az $1, 2, \dots, n$ számok permutációja. Itt azonban lényeges, hogy a különválasztandó függvények más-más független változó függvényei, csak ez esetben végezhető el az integrálás külön-külön s akármilyen sorrendben.

6a. Ha az összes $f_i(x)$ függvények helyébe ugyanazt az $f(x)$ függvényt teszszük (más-más független változóval), kapjuk, hogy

$$[[a.f^n] = [a.f^k].f^{n-k}]. \quad .$$

$$7. [a(e_2).[\varphi(x, e_1).f]] = [[a(e_2).\varphi(x, e_1)].f],$$

hol a $[\varphi(x, e_1).f]$ jel úgy értendő, hogy φ első argumentuma az integrálásra nézve idegen paraméter, a φ csak mint halmazfüggvény szerepel. Az eredmény tehát az x paraméter függvénye:

$$[\varphi(x, e_1).f] = \chi(x).$$

Ezt a $\chi(x)$ függvényt tovább szorozhatjuk $a(e_2)$ halmazfüggvény-nyel. Másrészt

$$[a(e_2).\varphi(x, e_1)]$$

úgy értendő, hogy φ a közönséges függvény és a a halmazfüggvény, azaz φ függvényben e_1 a szorzásra nézve idegen paraméter.

Mindezek a tulajdonságok közvetetlenül kiolvashatók az értelmező integrál formális tulajdonságaiból, csak az utolsónál kell visszamennünk magának az integrálnak, mint összeg-limesnek értelmezésére, melynek segítségével ez is minden nehézség nélkül átlátható.

Az új symbolismus általánosítása a régiek. Ugyanis, ha a constans függvények osztályára szorítjuk a függvényváltozót, hol tehát minden x -nél $f(x) = c$, akkor $[af^n] = a(E).c^n$ s így a functionálpolinom redukálódik a c mennyiség közönséges polinomjára a megfelelő kezelési szabályokkal.

3. *A functionál deriválása.* Több kísérlet történt a functionál-számitás differentiaal-hányados fogalmának megalkotására. A természetes analógiákon kívül főleg két követelmény lép előtérbe: először hogy ez a deriválásnak nevezendő művelet legalább a legegyszerűbb functionálokra alkalmazható legyen, azaz rájuk alkalmazva jól meghatározott functionálokra vezessen, másodszor, hogy a függvényváltozó constansfüggvényekre való korlátozásakor visszajussunk a közönséges deriválásra. Eddig leginkább a VOLTERRA-féle definitióval¹ igyekeztek boldogulni, de könnyű belátni, hogy ez még a legegyszerűbb

¹ Legrészletesebben VOLTERRA: Leçons sur les équations intégrales etc. (Collection Borel), Paris. Gauthier-Villars, 1913. Első fejezet. VOLTERRA: Leçons sur les fonctions de lignes (Collection Borel). Paris, Gauthier-Villars, 1913. Második fejezet.

$[a.f]$ functionál esetében sem vezet általában határozott eredményre (voltaképen semmit sem ad), még akkor sem, ha az $f(x)$ változót a folytonos függvények osztályára szorítjuk. Nagyön speciális $a(e)$ esetében lehet csak végrehajtani. A legelső physikai alkalmazásokban maga VOLTERRA kénytelen volt már az $U(f+h) - U(f)$ különbséget h függvény oly alakú kifejezésének venni, a mi egyenesen kizárja $U(f)$ VOLTERRA-féle deriváltjának létezését. De a deriválás e fogalma logikai szempontból sem kifogástalan, mert úgy van értelmezve, hogy a constans-függvények osztályán belől egyáltalán nem hajtható végre s így nem hozható vonatkozásba a közönséges deriválással, tehát annak nem is általánosítása.

Természetes volt ez a kereső állapot addig, míg a legegyszerűbb funteionáloknak, a funteionál-polynomoknak sem volt meghatározva a tipikus formája. Mi megadtuk ezt a meghatározást s ebből kiindulólólag kísértjük meg most a közönséges differentiálás analogonját a functionál-számítás igényeihez képest megalkotni.

Legyen e végből először $U(f) = a_0 + [a_1.f]$. Ekkor

$$U(f(x) + h(x)) = a_0 + [a_1.f] + [a_1.h];$$

s így

$$U(f+h) - U(f) = [a_1.h].$$

Állapodjunk itt meg s vegyük $U(f) = [a_2.f^2]$ functionált.

$$U(f+h) = [a_2.(f+h)^2] = [a_2.f^2] + 2[a_2.fh] + [a_2.h^2];$$

a hatodik szabályt alkalmazva

$$U(f+h) - U(f) = [2a_2.f.h] + [a_2.h^2].$$

A kettőt egyesítve legyen $U(f) = a_0 + [a_1.f] + [a_2.f^2]$. Ekkor

$$U(f+h) - U(f) = [a_1.h] + [2a_2.f.h] + [a_2.h^2],$$

azaz

$$U(f+h) - U(f) = [(a_1 + 2[a_2.f]).h] + [a_2.h^2].$$

Mindegyik esetben kapunk h -ban functionál-polynomot. Legtermészetesebb tehát deriválnak hívni h első «hatvány»-ának

«szorzó»-ját. Ilyenformán a 2. és 6. szabály alkalmazásával n -ed fokú functionál-polynom esetében is

$$U(f+h) - U(f) = P_n(h),$$

hol h első hatványának szorzója

$$a_1 + 2[a_2 \cdot f] + \dots + n[a_n \cdot f^{n-1}]$$

kifejezés, mely azonkívül hogy $f(x)$ függvény functionálja, még halmazfüggvény is: $U'(f, e)$, azaz

$$(a_0 + [a_1 \cdot f] + [a_2 \cdot f^2] + \dots + [a_n \cdot f^n])' = a_1 + 2[a_2 \cdot f] + \dots + n[a_n \cdot f^{n-1}] = U'(f, e).$$

Mivel pedig

$$|[a_n \cdot f^{n-k} h^k]| \leq A_n [f]^{n-k} [h]^k,$$

lehet tehát korlátolt $f(x)$ esetében $[h]$ számot oly kicsinynek választani, hogy n -edfokú functionál esetében

$$|U(f+h) - U(f) - [U'(f, e) \cdot h]| < \varepsilon \cdot [h], \quad (1)$$

hol ε előre adott tetszésszerű kis szám. Jegyezzük még meg, hogy $U'(f, e)$ szükségképen lineáris halmaz-függvény.

Általában a functionál deriváltját az utolsó egyenlet fogja számunkra definiálni, azaz $U(f)$ functionálnak akkor van szerinti deriváltja, ha van olyan $U'(f, e)$ a halmaz-változóban lineáris, különben tetszésszerű functionálja az $f(x)$ függvény-változónak, hogy az (1) egyenlőtlenségnek elég van téve, mihelyt $[h]$ bizonyos értéknél kisebb.

Abban az esetben, mikor VOLTERRA-féle derivált van, a mi értelmezésünk szerint is van és megegyezik a VOLTERRA-félével.

Az (1) egyenlőtlenséget írhatjuk

$$U(f+h) - U(f) = [U'(f, e) \cdot h] + [h] 0(h) \quad (2)$$

egyenlőség alakjában, hol $0(h)$ az argumentumának oly kifejezése, mely 0 érték felé tart $[h]$ -val.

Összehasonlítva definíciókat a FRÉCHET-adta functionál-differenciál fogalmával,¹ tüstént látható, hogy a mikor az ő értelmezése szerint $U(f)$ -nek van differentiálja, akkor van deri-

¹ M. FRÉCHET, Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne. Transactions of the American Math. Society 1914. Vol. 15, p. 135—161.

váltja is a mi értelmezésünk szerint. Viszont $[U'(f, e).h]$ nem egyéb, mint FRÉCHET-féle differentiál, mihelyt $U'(f, e)$ van. FRÉCHET tehát annyira megközelítette a functionál-derivált természetes fogalmát, a mennyire csak az előállítás-problémának előző tanulmányunkban adott általános megoldása nélkül lehetséges volt. Tudjuk azonban, hogy a differentiál fogalma egy-
magában a differentiálhányadosé nélkül mily nehézkes eszköz, sőt a magasabbrendű differentiálhányadosok és a differentiálegyenletek esetében mennyire elégtelen eszköz; nélkülözhetetlen szükség volt tehát a differentiálhányadosnak megfelelő fogalom megállapítására a funkcionálszámításban is.

Fontosnak tartjuk megjegyezni itt, hogy a független (függvény-) változót a constans függvények osztályára szorítva, definíciónk átmegy a közönséges deriválás (LAGRANGE-féle) definíciójába s így az egész functionálszámítás a közönséges függvények rendes értelemben vett differentiálszámításába.

4. *A functionálderivált néhány tulajdonsága.* A most értelmezett functionálderivált főbb tulajdonságai teljes mértékben igazolják bevezetését és elnevezését, mint az a következő pontokból kiviláglik.

1. $(u(f) + v(f))' = u'(f, e) + v'(f, e).$
2. $(c.u(f))' = c.u'(f, e), \quad c \text{ állandó szám.}$
3. $(u(f).v(f))' = u'(f, e)v(f) + u(f)v'(f, e).$
4. $\left(\frac{u(f)}{v(f)}\right)' = \frac{u'(f, e)v(f) - u(f)v'(f, e)}{v^2(f)}; \text{ mihelyt } v(f) \neq 0.$

5. Legyen $F(x)$ közönséges függvénye x -nek.

$$(F(u(f)))' = F'_u(u(f)).u'_f(f, e),$$

hol F'_u az $F(x)$ közönséges függvény x -szerinti közönséges differentiálhányadosa.

6. $(V(u(f; x)))' = V'_u(u(f; x), e).u'_f(f; x, e),$

hol $u(f; x)$ kifejezésben x mint paraméter értendő s így az eredményben is előjön, azaz $U(f; x)$ minden $f(x)$ függvényhez nem számot, hanem x változó egyik függvényét rendeli:

$u(f, x) = \varphi(x)$. Így azután erre megint alkalmazhatunk másik, $V(\varphi)$ functionáloperatiót.

A négy első pont bizonyítása oly egyszerű s menetében annyira megegyezik a közönséges függvények megfelelő differenciálás-szabályainál használt eljárással, hogy feleslegesnek tartjuk kiírni.

Az 5. bizonyítása a következő: Adott $f(x)$ esetében kifejezendő

$$F'(U(f+h)) - F'(U(f))_i^*$$

mint a $h(x)$ functionálja s keresendő h első hatványának szorzója. Ámde (2) folytán

$$u(f+h) = u(f)_i^* + [u'(f, e).h] + [h] 0(h).$$

Másrészt F közönséges függvény lévén

$$F(x+\delta) = F(x) + F'(x).\delta + \delta.0(\delta). \quad (3)$$

Legyen

$$x = u(f), \quad \delta = [u'(f, e).h] + [h] 0(h),$$

akkor

$$F(u(f+h)) = F(u(f) + [u'(f, e).h] + [h] 0(h)),$$

azaz (3) képletből

$$F(u(f+h)) = F(u(f)) + F'_u(u(f))([u'(f, e).h] + [h] 0(h)) + \delta.0(\delta);$$

s így

$$F(u(f+h)) - F(u(f)) = F'_u(u(f)).[u'(f, e).h] + F'_u(u(f))[h] 0(h) + \delta.0(\delta).$$

De $F'_u(u(f))$ fix szám s így a 3. műveletszabály szerint

$$F(u(f+h)) - F(u(f)) = [F'_u(u(f)) u'(f, e).h] + [h] 0(h),$$

azaz h első hatványának szorzója tényleg $F'_u(u(f))$, ha a változók hangsúlyozása kedvéért $u'(f, e)$ helyett $u'_f(f, e)$ -t írunk.

A 6. bizonyítása analog módon történik.

$$u(f+h; x) = u(f; x) + [u'(f; x, e).h] + [h] 0(h, x).$$

Jelöljük a jobboldal első tagját $\varphi(x)$ -szel, a másik két tagjának összegét $k(x)$ -szel.

$$u(f+h; x) = \varphi(x) + k(x).$$

Igy tehát

$$V(u(f+h; x)) = V(\varphi+k) = V(\varphi) + [V'_\varphi(\varphi, e).k] + \lceil k \rceil 0(k).$$

Azaz

$$\begin{aligned} V(u(f+h; x)) - V(u(f; x)) &= V(\varphi+k) - V(\varphi) = \\ &= [V'_\varphi(\varphi, e).k] + \lceil k \rceil 0(k); \end{aligned}$$

vagy φ és k értékét betéve

$$\begin{aligned} V(u(f+h; x)) - V(u(f; x)) &= [V'_u(u(f; x), e_2).u'_f(f; x, e_1).h] + \\ &+ \lceil h \rceil 0(h), \end{aligned}$$

hol a két halmazváltozót indexszel megkülönböztettük félreértés kikerülése végett. (A 7. műveletszabályt alkalmazva (mivel V'_u kizárólag halmazfüggvény)

$$\begin{aligned} V'_u(u(f+h; x)) - V'_u(u(f; x)) &= [\lceil V'_u(u(f; x), e_2).u'_f(f; x, e_1) \rceil .h] + \\ &+ \lceil h \rceil 0(h), \end{aligned}$$

hol a belső zárójelben az első functionál kizárólag halmazfüggvény, a másik pedig kizárólag mint x változó közönséges függvénye szerepel s így a belső zárójel symboluma által jelzett művelet eredménye csak az u'_f functionálban szereplő e_1 halmazváltozótól fog függeni. Ezek szerint utolsó egyenletünk éppen a 6. részletes kiírása.

5. *Véges növekmények tétele functionálokra.* Legyen $h(x)$ a növekményfüggvény, θ pedig pozitív valódi tört. $U(f+\theta h)$ megadott $f(x)$ és $h(x)$ -nél közönséges függvénye θ numerikus változónak s differentiálhányadosa θ szerint

$$\frac{dU(f+\theta h)}{d\theta} = [U'(f+\theta h, e).h].$$

Ugyanis ha U -nak van deriváltja, akkor

$$\frac{U(f+(\theta+\Delta\theta)h) - U(f+\theta h)}{\Delta\theta} = \frac{\Delta\theta [U'(f+\theta h, e).h] + \lceil \Delta\theta.h \rceil 0(\Delta\theta.h)}{\Delta\theta}.$$

Másrészt adott $f(x)$ és $h(x)$ esetében

$$\begin{vmatrix} U(f) & f & 1 \\ U(f+h) & f+h & 1 \\ U(f+\theta h) & f+\theta h & 1 \end{vmatrix}$$

determináns folytonos függvénye θ numerikus változónak és $\theta=0$, $\theta=1$ értékénél 0, kell tehát, hogy a θ szerinti differenciálhányadosa eltűnjön valamelyik közbeeső értéknél, azaz kell, hogy egyik θ -nál 0 és 1 között

$$\begin{vmatrix} U(f) & f & 1 \\ U(f+h) & f+h & 1 \\ [U'(f+\theta h, e).h] & h & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

mit az utolsó sor elemei szerint felbontva kapjuk, hogy

$$U(f+h) - U(f) = [U'(f+\theta h, e).h];$$

s így az analogia teljes.

6. *Holomorph functionál deriválása.* Alkalmazzuk a deriválról adott értelmezésünket holomorph functionálok deriválására.

Legyen adva

$$U(f) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot f^n]$$

holomorph functionál ρ convergentia-sugárral:

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{A_n}}.$$

Tehát csak oly $f(x)$ függvényeket veszünk figyelembe, melyekre $\lceil f(x) \rceil < \rho' < \rho$, azaz melyekre nézve a sor convergentiája egyenletes.

Legyen $\lceil \delta(x) \rceil$ oly kicsiny, hogy

$$\lceil f(x) \rceil + \lceil \delta(x) \rceil < \rho'' < \rho.$$

Ekkor

$$U(f+\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot (f+\delta)^n],$$

azaz

$$\begin{aligned} U(f+\delta) - U(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cdot (f^{n-1} \delta)] = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot (f+\delta)^n] - \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot f^n] - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cdot f^{n-1} \delta] = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot ((f+\delta)^n - f^n - n f^{n-1} \delta)], \end{aligned}$$

mert mindegyik sor absolut convergens.

Másrészt *folytonos functionálok A korlátolt függvénytartományban egyenletesen convergens sora ismét folytonos functionált ad.*

Bizonyítás. Legyen

$$U(f) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(f) = u_1(f) + u_2(f) + \cdots + u_n(f) + R_n(f),$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

úgy hogy minden A -ból való függvényre

$$|R_n(f)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

és legyen $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$, hol f_k és f az A -ból való függvények. Ekkor

$$U(f) - U(f_k) = s_n(f) - s_n(f_k) + R_n(f) - R_n(f_k)$$

és oly messzire mehetünk k -val, hogy

$$|s_n(f) - s_n(f_k)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

azaz

$$|U(f) - U(f_k)| < \varepsilon.$$

Ezt a tételt alkalmazva

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{|\delta|} \cdot ((f+\delta)^n - f^n - n f^{n-1} \delta) \right]$$

functionálsorra, hol minden egyes tag $\delta(x)$ -nek folytonos functionálja és a sor a vizsgált $\delta(x)$ függvényekre egyenletesen convergens, látjuk, hogy a vizsgált sor összege folytonos functionálja $\delta(x)$ függvényváltozónak. Ha pedig $\delta(x)$ a 0 függvény felé tart, mindegyik tag limese 0 s így a sor által definiált functionál értéke is 0 a határon. A 6_a műveletszabály szerint azonban

$$\sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cdot f^{n-1} \delta] = \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cdot f^{n-1}] \right) \cdot \delta \right]$$

s így a derivált

$$U'(f, e) = \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cdot f^{n-1}].$$

A formális deriválási szabály teljesen fedi tehát a holomorph függvények deriválás-szabályát, sőt a convergentia-feltételek is

megfelelnek, tudniillik a derivált sor convergentia-tartományát ugyanaz a szám jellemzi, mint az eredetiét.

Legfontosabb s közvetlenül látható következménye az eddigieknek az összefüggés a különböző rendű functionális deriváltak és a functionális TAYLOR-sor együtthatói között:

$$\begin{aligned} a_0 &= U(0), \quad a_1(e) = U'(0; e), \dots, \quad a_n(e^1, e^2, \dots, e^n) = \\ &= \frac{U^{(n)}(0; e^1, e^2, \dots, e^n)}{n!}. \end{aligned} \quad (4)$$

7. Az együtthatók e törvényszerűségéből folyik, hogy

$$U(f) = \sum [a_n \cdot f^n] \quad (5)$$

functionál kifejezhető bármelyik f_0 körül, mely az eredeti convergentiatartomány belső függvénye, azaz mely eleget tesz az

$$|f_0| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{A_n}}$$

egyenlőtlenségnek. Ugyanis

1. az (5) sor deriválásával nyert $U'(f_0, e)$, $U''(f_0, e^1, e^2), \dots$, $U^{(n)}(f_0, e^1, e^2, \dots, e^n)$ mennyiségekből alkotott

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{U^{(i)}(f_0)}{i!} \cdot (f - f_0)^i \right] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} [\beta_n \cdot (f - f_0)^n] \quad (6)$$

sor convergens minden

$$|f - f_0| < \rho - |f_0|$$

egyenlőtlenségnek eleget tevő $f(x)$ függvényre. Ezt a következőképen látjuk be. Legyen B_n a β_n halmazfüggvényhez tartozó majoráns függvény.

$$\begin{aligned} [B_n] &\leq [A_n] + (n+1) [A_{n+1}] [f_0] + \dots + \\ &+ (n+k)(n-k-1) \dots (k+1) [A_{n+k}] [f_0]^k + \dots \end{aligned}$$

Másrészt az (5) sor convergentia-sugara ρ , tehát elég nagy indexen túl

$$\sqrt[n]{A_n} < \frac{1}{\rho - \epsilon}$$

s így

$$\begin{aligned} \lceil B_n \rceil &\leq \left(\frac{1}{\varrho - \varepsilon}\right)^n + (n+1) \left(\frac{1}{\varrho - \varepsilon}\right)^{n+1} \lceil f_0 \rceil + \dots + \\ &+ (n+k)(n+k-1) \dots (k+1) \left(\frac{1}{\varrho - \varepsilon}\right)^{n+k} \lceil f_0 \rceil^k + \dots \\ &+ \frac{1}{(\varrho - \varepsilon)^n} \left(\frac{1}{1 - \frac{\lceil f_0 \rceil}{\varrho - \varepsilon}}\right)^{n+1} = \frac{\varrho - \varepsilon}{(\varrho - \lceil f_0 \rceil - \varepsilon)^{n+1}} \end{aligned}$$

azaz

$$\limsup \sqrt[n]{\lceil B_n \rceil} \leq \frac{1}{\varrho - \lceil f_0 \rceil - \varepsilon}$$

hol ε tetszősszerűen kicsi szám, tehát a (6) sor convergentia-sugara

$$\varrho_1 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\lceil B_n \rceil}}$$

eleget tesz

$$\varrho_1 \geq \varrho - \lceil f_0 \rceil$$

egyenlőtlenségnek.

2. Nevezzük a (6) sor összegét, melynek létezését éppen most láttuk be, $V(f)$ functionálnak. Bebizonyítandó, hogy (5) és (6) közös convergentia-tartományába eső $f(x)$ függvényre

$$V(f) = U(f)$$

Ekkor (6) tényleg az (5) által értelmezett functionált ábrázolja. Ezt az egyenlőséget a következőképpen állapíthatjuk meg. Legyen $V_m(f)$ és $U_n(f)$ az első m , illetőleg n tag összege. Az $U_n(f)$ functionál mint véges számú tag összege átrendezhető $f - f_0$ «hatványai» szerint haladó kifejezéssé, mint a közönséges polinomok $x - x_0$ hatványai szerint. Legyen tehát

$$U_n(f) = \sum_{i=0}^n [\gamma_{ni} \cdot (f - f_0)^i],$$

hol γ_{ni} éppen úgy keletkezik $U_n(f)$ -ből, mint β_i az $U(f)$ -ből. Jelöljük ki az $\lceil f \rceil \leq \varrho' < \varrho$, illetőleg az $\lceil f \rceil \leq \varrho' - \lceil f_0 \rceil < \varrho - \lceil f_0 \rceil$ tartományt, melyben az $U(f)$, illetőleg a $V(f)$ sora abszolút és egyenletesen convergál. Adott ε számhoz rendeljünk olyan N indexet, hogy mihelyt $n > N$,

$$|U(f) - U_n(f)| < \varepsilon,$$

bárminő függvény is $f(x)$ a ϱ' tartományból és

$$|V(f) - V_m(f)| < \varepsilon,$$

bárminő függvény is $f(x)$ a $\varrho - \lceil f_0 \rceil$ tartományból. Elég tehát azt bizonyítani, hogy jól választott n és m indexen túl a vizsgált függvényekre nézve $U_n(f)$ és $V_m(f)$ tetszészerinti kicsiny mennyiséggel különböznek. Világos azonban, hogy $V_m(f)$ minden együtthatója $\beta_i = \gamma_{ni} + \delta_{ni}$, hol

$$\delta_{ni} = \binom{n+1}{i} [a_{n+1} \cdot f_0^{n-i+1}] + \binom{n+2}{i} a_{n+2} \cdot f_0^{n-i+2} - \dots,$$

azaz

$$|\delta_{ni}| \leq \left(\frac{\lceil f_0 \rceil}{\varrho - \varepsilon} \right)^{n-i+1} \cdot R_{ni},$$

hol R_{ni} az

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\lceil f_0 \rceil}{\varrho - \varepsilon} \right)^{i+1}}$$

kifejezés $\frac{\lceil f_0 \rceil}{\varrho - \varepsilon}$ szerint haladó kifejezésének n -edik maradéka. Látjuk tehát, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{ni} = 0$, azaz bárhogyan fixáljuk is m -t, $V_m(f)$ együtthatói elég nagy n esetében mind kevesebb-bel különböznek a megfelelő γ_{ni} -től, mint ε s így $V_m(f)$ és $U_n(f)$ -től, mert a functionál-polynom az együtthatóinak folytonos functionálja.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $U(f)$ a ϱ tartomány belsejébe eső akármelyik hely környezetében TAYLOR-sorba fejthető, azaz e tartomány minden helyén holomorph.

8. Megeshetik azonban, hogy az f_0 körüli sor olyan függvényekre nézve is convergens, melyekre az eredeti sor már divergált. Az előbb bebizonyított tétel folytán tekinthetjük ezt az új sor által definiált functionált az $U(f)$ functionál analitikai folytatásának s így az összes lehetséges folytatások egyesítésével az *analitikai functionál* fogalmához jutunk, mely egészen analog az analitikai függvény fogalmával. Az így elemről-elemre lánczolatosan meghatározott analitikai functionál kifejezése egyetlen formulával megfelel az analitikai függvények előállítás-

problémájának, a mi, tudjuk, még megoldatlan. Csak a csillagtartomány belső pontjaihoz rendelt értékeket tudjuk egy formula alá hozni valamelyik MITTAG-LEFFLER¹-féle eljárással. *Ez az eljárás átvihető az analitikai functionál előállítására a csillagtartománynak pontosan megfelelő függvénytartományban.*

Legyen ugyanis f_0 az eredeti convergenttartomány egyik belső függvénye és nézzük az $U(f)$ értékét $f = cf_0$ függvényekre, hol c pozitív szám. Ezekre a függvényekre nézve

$$U(f) = U(cf_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot f_0^n \cdot c^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$$

a c változó közönséges, TAYLOR-sorban előállított függvénye, melynek convergentiasugara nagyobb, mint 1. Kifejtve 1 körül kapjuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (c-1)^n$$

sort, hol

$$\begin{aligned} b_n &= a_n + (n+1) a_{n+1} + \dots \\ &= [a_n \cdot f_0]^n + [n+1] [a_{n+1} \cdot f_0^{n+1}] + \dots; \end{aligned}$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (c-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} ([a_n \cdot (cf_0 - f_0)^n] + (n+1) [a_{n+1} \cdot (cf_0 - f_0)^{n+1}] + \dots).$$

Másrészt $U(f)$ functionált kifejtve f_0 körül

$$U(f) = \sum_{n=0}^{\infty} [\beta_n \cdot (f - f_0)^n];$$

hol

$$\beta_n = \frac{U_f^{(n)}(f_0)}{n!},$$

azaz, ha $f = cf_0$,

$$U(f) = \sum_{n=0}^{\infty} [\beta_n \cdot f_0^n] (c-1)^n;$$

és rögtön látható, hogy

¹ G. MITTAG-LEFFLER: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Notes 1—5. Acta Mathematica, Tomes 23—29.

$$[\beta_n f_0^n] = b_n,$$

s így a kétféle kifejtés egy eredményre vezet.

Ugyanígy volna, ha most meg a $c_1 > 1$ számot vennők az új sor convergenttartományából és c_1 körül, illetőleg $c_1 f_0$ körül fejtenénk ki c változónak $U(cf_0)$ függvényét, illetőleg $f = cf_0$ változónak functionálját. Megkapom tehát az $U(f)$ kívánt analitikai folytatását, ha mint c függvényét fejtem ki folytatólagoosan. Így minden belső f_0 függvényhez tartozik egy c_0 szám olyfélekép, hogy $U(f)$ definiálva van minden cf_0 függvényre, melynél $c < c_0$; $c_0 f_0$ tehát a csillagtartomány cf_0 irányba eső csúcsa. Ennek a csillagtartománynak a belsejébe eső tartományban $U(f)$ előállítható egyetlen formulával a MITTAG-LEFFLER-féle eljárás segítségével.

Nagyobb határozottság kedvéért vegyük az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ függvénynek például

$$f(x) = a_0 + \lim_{\sigma=0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma n}} x^n$$

egész-függvényes előállítását¹ s képezzük ennek mintájára a 0 körül holomorph

$$U(f) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot f^n]$$

functionálhoz az

$$U_{\sigma}(f) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma n}} [a_n \cdot f^n] \quad (7)$$

transcendens egész functionálokat. Vegyük szemügyre elsőbben is a cf_0 függvényekhez tartozó functionálértékeket. Ezekre nézve a fentiek szerint — mivel c változó közösleges analitikai függvényeinek tekintendők az analitikai folytatás képzésénél —

$$\lim_{\sigma=0} U_{\sigma}(f) = U(f), \quad (8)$$

mihelyt

$$c < c_0.$$

¹ E. LINDELÖFF: Calcul des résidus (Collection Borel). Paris, Gauthier-Villars, 1905. 123. lap.

Ez az okoskodás elvégezhető azonban bármily f_0 esetére is, ha a megfelelő c_0 számmal végezzük, mert az előállítás módja független az együtthatók tényleges értékétől. A (7), (8) előíltó egyenletünk érvényes tehát minden $f(x)$ függvényre, mely a csillagtartomány belsejébe esik. Ugyanígy okoskodhatunk végül bármelyik fajtájú MITTAG-LEFFLER-féle előállítás segítségével is és így mindezek szószerint átvihetők a functionálok előállítására.

II. FEJEZET.

Existentiátételek functionálrelatiókra. Magasabb osztályú functionálok.

9. *Implicit functionál.* Eddigi vizsgálatainkban explicite megadott functionálok tulajdonságaival foglalkoztunk. Tudjuk azonban mily fontosságú a mennyiségek egymás meghatározására rájuk szabott feltétel, egyenlet alapján. A fizikai törvény például mindig ilyen kölcsönös meghatározódás kifejezése, csak véletlen, ha néha egyik mennyiségre explicite megfogalmazható, pontosabban a fizikai törvény matematikai formája mindig két vagy több mennyiség között fennálló összefüggés kijelentése, tehát egyenlet, még pedig leggyakrabban nem is közönséges, hanem differentiálegyenlet. Kikerülhetetlen matematikai probléma tehát pontosan körülvonalozni azokat a feltételeket, melyek alatt a közönséges vagy differentiálegyenletnek van, még pedig az előre megállapított függvényosztályba tartozó, például folytonos vagy analitikai megoldása. Ezeket a megoldás-megállapításokat hívjuk existentiátételeknek.

Az ezeknek megfelelő functionálproblémák természetesen jelentkeztek már a legelső fizikai alkalmazásoknál, de eddig egyikre sem kaptunk feleletet. Még VOLTERRA¹ foglalkozott leg-többet az $f(x, y) = 0$ egyenletnek megfelelő

$$F(f, \varphi; x) = 0$$

funcionálegyenlet megoldásával φ -re, midőn f -et adottnak vesz-

¹ VOLTERRA: Fonctions de ligne. Negyedik fejezet.

szük, de az ő bizonyítása egészen illusorius, mert olyan feltevést tesz F' differentiáljának alakjára, a mi, mint látni fogjuk, az adott esetben éppen ki van zárva. De nemcsak a bizonyítás, hanem maga az eredmény is helytelen.

A differentialegyenletnek megfelelő functionál-deriváltú egyenlet existencia-kérdését jóformán csak HADAMARD¹ és főleg tanítványa LÉVY² érinti, bevallva, hogy az előálló sor convergentiáját nem tudja bizonyítani, pedig éppen physikai alkalmazásban lenne nagy fontossága. Mind a két hiány onnan ered, hogy egyrészt nem állott a kutatók rendelkezésére a functionál pontos és részletes előállítása, másrészt a functionál-derivált fogalma nem volt kellőképen tisztázva, az új calculushoz mértelen kiszabva.

Látni fogjuk, hogy az előzőekben adott szabatos előállítás és derivált fogalom segítségével ezek az existenciaproblémák megoldása semmi különös nehézséget nem okoz, a szokott módon elintézhető, bár az eredményben lesz is eltérés a régihez képest.

Elsőbben is fontos általánosítást kell eszközölnünk a functionál eddigi fogalmán. Eddig is már láttuk elvétele, például a functionál functionáljánál a deriválási szabályok között, hogy czélszerű néha a függvény összes értékéhez egyetlen számot rendelő művelet helyébe a függvényhez másik függvényt rendelő műveletet is tekintetbe venni, hol azonban a meghatározandó függvény minden egyes értékét a meghatározó függvény összes értéke határozza meg (például a határozatlan integrál), jelben: $U(f; x)$. Az x a functionál érték meghatározásában mint paraméter szerepel. De látni fogjuk, hogy még tovább kell mennünk, mert például míg

$$a(x, e).f] = g(x)$$

egyenletnek, az elsőfajú integrálegyenlet általánosításának, adott $g(x)$ és $a(x, e)$ mellett általában nincs megoldása f -re, az

¹ HADAMARD: Équilibre de plaques encastrées. Mémoires présentés à l'Académie des Sciences d. Paris. I. 33.

² M. LÉVY: Sur les équations intégral-différentielles. Thèses, Paris 1911, Journal de l'École Polytechnique, 1912.

$$f + [\alpha(x, e) \cdot f] = g(x)$$

egyenletnek meg éppen általában van. Olyan functionálformákat is tekintetbe kell vennünk tehát, melyben az f közöséges módon is szerepel, azaz, hol $U(f; y, x)$ két paraméteres functionál y változója helyébe f -et írunk:

$$U(f; f, x).$$

A pontosvessző a functionálváltozókat elválasztja a közöséges változóktól. Az $f(x)$ -et megadva, az eredmény megint függvény. Két változóra felírva kapjuk

$$U(f, \varphi; f, \varphi, x)$$

formát, mely két függvényhez rendel harmadikat. Még a kétféle f (és a kétféle φ) szerinti deriváltat kell jellel megkülönböztetni.

$U(f; f, x)$ f forma szerint vett functionál-deriváltjának jele $\frac{DU}{Df}$, mely úgy képezendő, hogy a második f helyébe y -t gondolva, azt nem változtatjuk. Az eredményben mindig megjelenik e halmazváltozó, és pedig a derivált annak mindig lineáris függvénye. Másrészt a második, a közöséges f változó szerint vett derivált úgy képezendő, hogy $U(f; y, x)$ formát deriváljuk y szerint közöségesen s az eredményben y helyett ismét f -et teszünk: jele $\frac{dU}{df}$. Ugyanígy két vagy több változó esetében. Azt, hogy a deriválás «partiális» történik, külön nem jelöljük, mert igazában mindig ehhez sok tekintetben hasonló az eljárás. Jegyezzük meg, hogy az így értelmezett functionál-deriváltra a 3. összes szabályai érvényesek, mert a többi változó mint paraméter szerepel, azaz a deriválásra nézve a functionálforma egyváltozós. Sőt a véges növekmények tételével az egymást követő deriváltaknak a deriválás sorrendjétől való függetlenségét is könnyű belátni, általános folytonossági feltételeket szabva a functionálra. Ha pedig $U(f; f, x)$ mindkét f változóban polynom, vagy azoknak holomorph formája, tüstént látható, hogy a kétféle f szerinti deriválás is bármilyen sorrendben történhetik.

Ezek előrebocsátásával megfogalmazhatjuk az első existenciaproblémát. Adva lévén

$$U(f, \varphi; f, \varphi, x) = 0 \quad (9)$$

egyenlet, milyen feltételek mellett tartozik adott $f(x)$ függvényhez másik $\varphi(x)$ függvény úgy, hogy minden x értéknél eleget tesznek a fenti egyenletnek? Az utolsó kikötés lényeges, mert, ha x s így a második f és φ sem fordul elő (9) egyenletben, akkor végtelen sok, egymáshoz semmikép sem tartozó megoldás van: például

$$\int_a^b \varphi dx - \int_a^b f dx = 0,$$

azaz

$$\int_a^b \varphi dx = c$$

egyenletnek.

10. *Implicit functionál existenciátétele.* Legyen f_0, φ_0 a (9) egyenletnek elegettevő függvénytér, azaz legyen minden x -re nézve

$$U(f_0, \varphi_0; f_0, \varphi_0, x) = 0.$$

Tegyük fel másrészt, hogy U az f_0 és φ_0 környezetében, azaz elég kicsiny η mellett minden

$$\|f - f_0\| < \eta, \quad \|\varphi - \varphi_0\| < \eta$$

feltételnek eleget tevő függvényekre, folytonos functionálja a két dupla függvény-változónak. Egyenlőtlenségeink baloldala felső korlátját jelzi a $\lceil \rceil$ jel közé vett matematikai kifejezés érték-készletének. Behozzuk továbbá a

$$\frac{dU}{d\varphi} = A(f, \varphi; f, \varphi, x),$$

$$\frac{DU}{D\varphi} = \beta(f, \varphi; f, \varphi, x, e), \quad A(f_0, \varphi_0; f_0, \varphi_0, x) = A_0(x),$$

$$\beta(f_0, \varphi_0; f_0, \varphi_0, x, e) = \beta_0(x, e)$$

jelöléseket. Tegyük még fel, hogy

$$\lfloor A_0(x) \rfloor = \delta > 0, \quad (I)$$

és hogy

$$\left| \frac{\varphi_0(x, e)}{A_0(x, e)} \right| \leq B < 1. \quad (\text{II})$$

A bizonyítás menetében, az írás egyszerűsítése céljából, felteszszük, hogy $f_0 \equiv 0$, $\varphi_0 \equiv 0$.

Tétel. A kijelölt feltételek mellett az $f_0(x)$ minden $\eta' < \eta$ környezetéből való $f(x)$ függvényhez tartozik a $\varphi_0(x)$ függvény η környezetéből egy és csak egy $\varphi(x)$, úgy hogy

$$U(f, \varphi; f, \varphi, x) = 0; \quad (10)$$

s az így értelmezett $\varphi = \Phi(f; f, x)$ az $f(x)$ folytonos functionálja.

Bizonyítás. Legyen $\lceil \Psi(x) \rceil = M$ és $\lceil a(x, e) \rceil = A$ és nézzük

$$f(x) + \lambda [a(x, e).f] = \Psi(x) \quad (11)$$

integrálegyenletet (az integrál szót az I. Rész 2. fejezetében adott általános értelmében használva). Igyekezzünk neki eleget tenni az

$$f(x) = f_0(x) + \lambda f_1(x) + \dots + \lambda^n f_n(x) + \dots$$

sorral. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \Psi(x); \\ f_1(x) &= -[a(x, e).f_0]; \\ f_2(x) &= -[a(x, e).f_1]; \\ &\vdots \\ f_n(x) &= -[a(x, e).f_{n-1}]; \\ &\vdots \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \lceil f_0 \rceil &= M; \\ \lceil f_1 \rceil &= \lceil f_0 \rceil \leq MA; \\ \lceil f_2 \rceil &= \lceil f_1 \rceil \leq MA^2; \\ &\vdots \\ \lceil f_n \rceil &= \lceil f_{n-1} \rceil \leq MA^n; \\ &\vdots \end{aligned}$$

s így, ha $\lambda A < 1$, sorunk abszolút és egyenletesen convergál. Ha tehát $A < 1$, akkor $\lambda = 1$ esetre is fennáll a convergentia s így a (11) integrál-egyenletnek van egy megoldása.

Azonban csak egy lehet. Ugyanis

$$f'(x) + [a(x, e).f] = 0$$

homogén egyenletben az $f - f_n$ függvényre nézve éppen azokat az egyenlőtlenségeket nyerjük, mint fent az $f_n - f_{n-1}$ függvényekre, mihelyt az

$$f + [a(x, e).f] = \Psi$$

egyenletből az

$$f_n + [a(x, e).f_{n-1}] = \Psi$$

egyenletet levonjuk:

$$\overline{f - f_n} \leq MA^n$$

és $A < 1$; tehát bármilyen x -nél

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f - f_n} = 0,$$

azaz csakugyan f összeesik az előbbi megoldással.

11. Nézzük most

$$\begin{aligned} A_0(x) \varphi(x) + [\beta_0(x, e). \varphi] &= \\ &= A_0(x) \varphi(x) + [\beta_0(x, e). \varphi] - U(f, \varphi; f, \varphi, x) \end{aligned}$$

egyenletet. Ha f_0 környezetéből való adott $f(x)$ -hez ez az egyenlet rendel egy és csak egy $\varphi_0(x)$ környezetéből való $\varphi(x)$ -et, akkor (10) egyenlet is és fordítva. Legyen

$$\varphi(x) + \left[\frac{\beta_0(x, e)}{A_0(x)} \cdot \varphi \right] - \frac{U(f, \varphi; f, \varphi, x)}{A_0(x)} = V(f, \varphi; f, \varphi, x);$$

vizsgáljuk tehát

$$\varphi(x) + [a_0(x, e). \varphi] = V(f, \varphi; f, \varphi, x)$$

egyenletet, hol

$$a_0(x, e) = \frac{\beta_0(x, e)}{A_0(x)},$$

s hol $f(x)$ megadott függvény az $f_0(x)$ környezetéből, $\varphi(x)$ pedig az ismeretlen.

Legelőször is megállapítjuk, hogy az U -ra és φ szerinti első deriváltjaira vonatkozó feltevésünkben folyólag V functio-

nálnak φ szerinti deriváltjai az f_0, φ_0 helyen zérusok s így elég kicsiny η' környezetet választva f - és φ -re,

$$|V(f, \varphi_1; f, \varphi_1; x) - V(f, \varphi_2; f, \varphi_2; x)| < K [\varphi_1 - \varphi_2], \quad K < 1 - B; \quad (12)$$

minden η' -ből való f és φ_1, φ_2 függvényekre nézve.

Legyen tehát adva $f(x)$ a most megállapított környezetből és nézzük a

$$\varphi(x) + [a_0(x, e) \cdot \varphi] = V(f, 0; f, 0, x)$$

integrál-egyenletet. A (II) alatti feltétel szerint az előbbi §-ban jelzett okoskodás alapján ennek van megoldása, még pedig csak egyetlenegy: $\varphi_1(f; f, x)$.

Vegyük most a

$$\varphi(x) + [a_0(x, e) \cdot \varphi] = V(f, \varphi_1; f, \varphi_1, x)$$

integrál-egyenletet. Ennek is van egyetlenegy $\varphi_2(x)$ megoldása és így tovább,

$$\varphi_n(x) + [a_0(x, e) \cdot \varphi_n] = V(f, \varphi_{n-1}; f, \varphi_{n-1}, x) \quad (13)$$

általános formula szerint.

E formulák képzése értelmében

$$|\varphi_n - \varphi_{n-1}| \leq |[a_0(\varphi_n - \varphi_{n-1})]| + \\ + |V(f, \varphi_{n-1}; f, \varphi_{n-1}, x) - V(f, \varphi_{n-2}; f, \varphi_{n-2}, x)|;$$

azaz (12) folytán

$$[\varphi_n - \varphi_{n-1}] \leq B [\varphi_n - \varphi_{n-1}] + K [\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}],$$

vagyis

$$[\varphi_n - \varphi_{n-1}] (1 - B) \leq K [\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}];$$

s így végül

$$[\varphi_n - \varphi_{n-1}] \leq \left(\frac{K}{1-B} \right)^{n-1} [\varphi_1]. \quad (14)$$

A

$$\Sigma (\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \varphi(x), \quad (15)$$

tehát abszolút és egyenletesen konvergens sor.

Ugyancsak (14) egyenlőtlenség folytán akármelyik n indexre az első n tag összege, φ_n , eleget tesz

$$\|\varphi_n\| \leq \frac{1}{1 - \frac{K}{1-B}} \|\varphi_1\|$$

egyenlőtlenségnek. Mivel pedig φ_1 , az f dupla változónak folytonos formája, f -fel együtt a 0 függvény felé tart, lehet olyan η' számot kijelölni, hogy ha $\|f\| < \eta'$, valamennyi $\|\varphi_n\| < \eta''$ (η'' előre adott tetszésszerinti szám) s így φ is a 0 függvény környezetéből való.

Másrészt az $n = \infty$ határon (13) egyenlet átmegy

$$\varphi + [a.\varphi] = V(f, \varphi; f, \varphi, x) \quad (16)$$

egyenletbe, a mit éppen meg akarunk oldani. Pontosan kiírva a határátmenetet, mivel φ_n egyenletesen tart φ felé, oly messze mehetek n -nel, hogy azontúl

$$\|\varphi + [a.\varphi] - \varphi_n - [a.\varphi_n]\| < \varepsilon,$$

valamint

$$\|V(f, \varphi; f, \varphi, x) - V(f, \varphi_n; f, \varphi_n, x)\| < \varepsilon;$$

s így (16) egyenlet 2ε pontossággal ki van elégítve; ε azonban tetszésszerinti, tehát pontosan ki van elégítve.

Van tehát megoldás és a fentebb használt okoskodásmód értelmében csak egyetlenegy.

Az így megállapított functionál $\varphi = \Phi(f; f, x)$ folytonos, mert mindegyik φ_n folytonos formája f dupla változónak és a (15) sor egyenletesen convergens.¹

12. *Holomorph U esetében* ugyanígy bizonyítjuk holomorph $\varphi = \Phi(f; f, x)$ létét. A gondolatmenet marad a régiben, csak annyit kell még hozzátennünk, hogy φ_1 a feltételek szerint holomorph functionál, mert a 11. szakasz meggondolása szerint holomorph functionálok egyenletesen homogen sora gyanánt áll elő és hogy φ_2 is az, mert $V(f, \varphi_1; f, \varphi_1, x)$ úgy keletkezik, hogy holomorph functionálba teszünk holomorph functionált,

¹ Bizonyításunkban a PICARD-féle approximáló módszert vettük mintául, még pedig a GOURSAT feldolgozásában. Lásd E. GOURSAT: Sur la théorie des fonctions implicites. Bulletin de la Soc. math. France 1903. Vol. 31, p. 184.

azaz TAYLOR-sorban helyettesítünk függvényváltozót TAYLOR-sorral, a mi megengedett művelet a functionálok körében éppúgy, mint a függvényeknél, s ha V holomorph, akkor a φ_1 -re végzett okoskodás szerint φ_2 is az és így tovább. A megoldás tehát holomorph functionálok egyenletesen convergens sora.

Nézzük meg most, miben állott VOLTERRA tévedése. Az $U(f, \varphi, x) = 0$ alakú egyenletből indul, hol tehát f és φ csak mint functionálváltozó szerepel. Ilyenkor, mint láttuk, U differentiálja

$$[U'_f \cdot \delta f] + [U'_\varphi \cdot \delta \varphi]$$

alakú, azaz φ csak mint összes értékükkel determináló változók lépnek fel, külön az f vagy φ függvénytől közönségesen függő tag nincs. VOLTERRA azonban (72. l.) így folytatja: számítsuk ki U differentiálját és tegyük fel, hogy ez tartalmaz f és φ -től közönségesen függő tagot is, még pedig oly formában, hogy $\delta \varphi$ (vagy δf) együtthatója az egység. Ez a fentiek szerint megvalósíthatatlan feltevés. Sőt maga a tétel sem áll fenn, mert $A_0(x, e) \equiv 0$ s az elsőfajú integrálegyenletből vett példán rögtön megmutatható, hogy ez esetben általában nincs mindig megoldás. VOLTERRA különben abban a hitében is tévedett, hogy az általa példakép adott differentiál-formának komplikálásával eljutunk az általános esethez. Ez lehetetlen, mert az általános és könnyen meg is valósuló esetben a közönséges integrál felmondja a szolgálatot; még folytonos függvények feltételezésével is legalább STIELTJES-féle integrált kell használnunk (lásd RIESZ tételét az első fejezetben). Minde félreértések közös forrása a functionál matematikai formájának és az új calculus-hoz mért derivált functionál fogalmának hiányossága volt.

13. *Alkalmazás a functionál-algebrára.* Az egyváltozós n -ed fokú algebrai egyenletnek megfelel az

$$a_n(x) f^n + [a_n(x, e) \cdot f^n] + a_{n-2}(x) f^{n-1} + [a_{n-1}(x, e) \cdot f^{n-1}] + \dots + a_1(x) f + [a_1(x, e) \cdot f] + a_0(x) = 0 \quad (17)$$

functionálegyenlet. Nézzük előbb

$$a_n(x) f^n + [a_n(x, e) \cdot f^n] + a_0(x) = 0 \quad (18)$$

egyenletet, $a_n x^n + a_0 = 0$ egyenletnek megfelelőleg. Ha

$$[a_n(x)] = \delta > 0$$

a tekintetbe jövő E halmazon, akkor $f^n = \Psi$ helyettesítéssel, Ψ -ben másodfajú integrálegyenlettel állunk szemben s arról látjuk, hogy van megoldása, legalább is mikor

$$\frac{[\tilde{A}_n]}{[a_n]} < 1,$$

ekkor azonban $f = \sqrt[n]{\Psi}$ eleget tesz (18) egyenletnek s így általában n különböző megoldás van, amelyek az x valós változónak általában komplex függvényei. Valos változó komplex függvényére $[a \cdot (f_1 + i f_2)] = [a \cdot f_1] + i[a \cdot f_2]$ a belső szorzat értelme. Magasabb hatványoké ennek megfelelően.

Az általános esetben nézzük

$$a_n(x) f^n + [a_n(x, e) \cdot f^n] + \lambda(a_{n-1} f^{n-1} + [a_{n-1} \cdot f^{n-1}] + \dots + a_1 f_1 + [a_1 \cdot f_1] + a_1) = 0 \quad (19)$$

egyenletet, mely $\lambda = 0$ értéknél átmegy az előbbi speciális egyenletbe. Ámde az implicit functionál existentiá-tételben a független függvényváltozó, mely különben semmi szerephez sem jut a bizonyítás menetében, lehet $f(x) \equiv c = \lambda$ függvény is, azaz lehet az U functionál $U(\varphi; \varphi, \lambda, x)$ alakú is. Jelen esetben φ helyébe f -et írunk s így megint $f^n = \Psi$ helyettesítést végezve (19) egyenletben, az (I) feltétel nem egyéb, mint $[a_n] = \delta > 0$ valóban igazolt egyenlőtlenség. (II) pedig

$$\frac{[A_n]}{[a_n]} < 1$$

alakú, a mit szintén feltételeztünk, a végett, hogy (18) speciális egyenletnek legyen megoldása. A tétel alkalmazható tehát, és pedig a Ψ -ben felírt egyenletben Ψ -t tenni ugyanaz lévén, mint (19) egyenletbe $\sqrt[n]{\Psi} = f$ -et tenni, a (19) egyenletnek van n különböző gyöke s ezek a λ bizonyos határan alul maradó értékeinek folytonos függvényei. Ha tehát λ elég kicsiny, akkor (19) egyenletnek n különböző komplex gyöke van, a melyek $\lambda = 0$ esetben átmennek az $\sqrt[n]{\Psi}$ által jelzett n különböző függvénybe. A λ kicsinységét kimondó feltételt természetesen helyettesíthet-

jük az $a_{n-1}(x, e), \dots, a_1, a_1, a_0$ együttthatók kicsinységével s így a jelzett jelentékeny megszorítások mellett az algebra alaptételének analogonját kaptuk meg. Teljessé válna az analogia, ha a FREDHOLM-tételeket kiterjesztve az új integrálokban (azaz belső szorzat alakjában) írt egyenletekre, λ bizonyos értékektől eltekintve, bárminő lehetne; ez ugyanis azt jelentené, hogy az a, a együttthatók általában bárminők lehetnek.

Okvetetlenül fennmarad azonban két fontos különbség. Először is, hogy a változó két lényegesen különböző hatványozásnak van alávetve s az egyik vagy másik hiánya egészen megváltoztatja a problémát; másodszor pedig bizonyos λ értékek kivételes helyzetet teremtenek, mint a másodfajú integrálegyenletek mutatják. Azaz bárminők is az együttthatók, bizonyos számmal szorozva őket oly egyenlethez juthatnak, melynek általában nincs megoldása. A functionálegebrának tehát a régieken kívül vannak saját, még pedig meglehetősen komplikált problémái is.

14. Existencia-tétel functionális deriváltú egyenletre. Rövidség kedvéért egyetlen egyenletre, és pedig a legegyszerűbbre szorítkozunk

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x) \quad (20)$$

differentiálegyenletnek megfelelően. Az általánosságot csak annyiban tartjuk fenn, hogy függvényhez függvényt rendelő functionálokat adunk meg és keresünk. Láttuk, hogy ez feltétlenül szükséges, mert különben egészen kivételes esetben vagyunk.

Legyen tehát adva $V(\varphi, f; x, e)$ két függvényváltozós functionál és keressünk olyan $U(f; x)$ functionált, mely minden x -re nézve eleget tesz

$$\frac{DU}{Df} = V(U(f; f, x), f; x, e) \quad (21)$$

egyenletnek az x és az e változó bármelyik értékére az E halmazból, például az (a, b) számközből. A (21) egyenlet úgy értendő, hogy adott f esetében $U(f, x) = \varphi(x)$ közösleges függvény s így V functionál értéke erre és f függvényre meghatározott függvénye x és e változónak. A baloldal szintén, mert azt $U(f; x)$

explicit alakból gondoljuk képezve. Az e halmazváltozó behozatala elkerülhetetlen, mert minden derivált functionál halmazfüggvény is, még pedig lineáris.

A functionálderivált fogalma teljes mértékben fedvén a közönséges függvényderiváltét, a differenciálegyenletre vonatkozó existenciabizonyítások közül legegyszerűbben átvihető a functionálderiváltú egyenletre a CAUCHY-féle második módszer, az úgynevezett calcul des limites. Tegyük tehát fel, hogy $V(\varphi, f; x, e)$ analitikai functionálja a φ, f változóknak, azaz hogy

$$V(\varphi, f; x, e) = \sum_{n, m=0}^{\infty} [a_n(x, e) \cdot \varphi^n] [\beta_m(x, e) \cdot f^m]; \quad (22)$$

és pedig hogy

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} A_n B_m [\varphi]^n [f]^m \quad (23)$$

sor convergens, mihelyt $[\varphi] < r'$, $[f] < r$. Keressünk olyan functionált, mely $f \equiv 0$ esetben azonosan eltűnik:

$$U(0; x) \equiv 0. \quad (24)$$

Tüstént látható, hogy (23) közönséges kétváltozós hatványsor convergentiája folytán van olyan A szám, hogy

$$[A_n] [B_m] < \frac{A}{r'^n r^m};$$

s így a

$$W = \frac{A}{\left(1 - \frac{\varphi}{r'}\right) \left(1 - \frac{f}{r}\right)}$$

majoráns függvénye V functionálnak oly értelemben, hogy a W megfelelő együtthatója nagyobb a V -t már majoráló (23) sor megfelelő együtthatójánál. Pontosabban

$$\left(\frac{d^{n+m}W}{d\varphi^n df^m}\right)_0 \geq [A_n] [B_m] \geq \left[\frac{D^{n+m}V}{D^n\varphi \cdot D^mf^m}\right]_0.$$

Vegyük most szemügyre

$$\frac{d\varphi}{df} = \frac{A}{\left(1 - \frac{\varphi}{r_1}\right)\left(1 - \frac{f}{r}\right)}$$

közönséges differenciálegyenletet (φ és f helyébe gondolhatunk y és x betűket is). Mint tudjuk, ennek van $\varphi = \Phi(f)$, az f -fel 0 felé tartó, 0 körül holomorph megoldása. Azonban Φ TAYLOR-sorának minden együtthatója pozitív és nagyobb, mint az $U(f; x)$ formálisan (21) egyenletből kiszámított sorában a megfelelő együttható felső korlátja. Evidens ez, mert a deriválási szabályok azonosak, tehát például

$$\frac{D^2 U}{Df^2} = \left[\frac{DV}{DU} \cdot \frac{DU}{Df} \right] + \frac{DV}{Df};$$

és

$$\left(\frac{DU}{Df} \right)_0 = V(0, 0; x, e)$$

esetére az egyenlőtlenség be van bizonyítva; úgyszintén V -nek partiális deriváltjaira, tehát a hasonlóképp alkotott szorzatokra és összegükre is fennáll. És így tovább a rendes CAUCHY-féle eljárás szerint.

Van tehát a 0 körül holomorph $U(f, x)$ megoldás és könnyen láthatólag csak egy, mely a kezdő feltételeknek, (24) egyenletnek is megfelel; kifejtésének convergentia-sugara ϱ eleget tesz

$$\varrho \geq r \left(1 - e^{-\frac{r}{2Ar}} \right)$$

egyenlőtlenségnek, mely minimumáról ad felvilágosítást.

Minden lényegesebb módosítás nélkül kiterjeszthető ez az okoskodás egyenletrendszerre is. Adva lévén

$$\begin{aligned} \frac{DU_1}{Df} &= V_1(U_1, U_2, \dots, U_n, f; x, e); \\ \frac{DU_2}{Df} &= V_2(U_1, U_2, \dots, U_n, f; x, e); \\ &\vdots \\ \frac{DU_n}{Df} &= V_n(U_1, U_2, \dots, U_n, f; x, e); \end{aligned}$$

egyenletrendszer, hol a V functionálok a 0 körül holomorphak, van tehát egy és csak egy $U_1(f; x)$, $U_2(f; x) \dots U_n(f; x)$ megoldásrendszer, mely $U_i(0; x) = a_i(x)$ kezdő feltételeknek eleget tesz. És pedig, ha a $V_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, f; x, e)$ hatványsorának $/$ -ben convergentiasugara r , a φ függvényekben pedig r' , akkor a megoldó functionálok hatványsorainak convergentiasugarai ϱ_i közösen eleget tesznek

$$\varrho_i \geq r \left(1 - e^{-\frac{r'}{(n+1)Ar}}\right)$$

rájuk minimumot szabó egyenlőtlenségnek.

15. Nem kell sokat változtatnunk okoskodásainkon, ha egyenletünk jobb oldala, V , függ a U és f változóktól közön­ ségesen is, azaz ha

$$\frac{DU}{Df} = V(U, f; U, f, x, e) \quad (25)$$

egyenletet vizsgáljuk. Leglényegesebb különbség, hogy ekkor a keresett, 0 körül holomorph $U(f; f, x)$ functionálnak

$$U(0; f, x) = a(f, x), \quad a(0, x) = 0$$

kezdő értéke adható meg szabadon. Ebből ugyanis meghatározható közvetlenül $\left(\frac{d^m U}{df^m}\right)_0$ bármilyen m -re s így (25) egyenlettel együtt meghatározzák az összes

$$\left(\frac{D^{n+m}U}{D^n f D^m f}\right)_0$$

értékeket, feltéve természetesen, hogy V holomorph a 0 körül, azaz hogy

$$V(\varphi, f; \varphi, f, x) = \sum_{n, m, k, l=0}^{\infty} [a_{nkl}e(x, e) \cdot \varphi^n] [\beta_{mkl}e(x, e) \cdot f^m] \varphi^k f^l$$

r és r' számok jellemezte convergentiatartományú sorba fejthető. A V majoráns függvénye ugyanis ez esetben

$$\frac{A}{\left(1 - \frac{f_1 + f_2}{r}\right) \left(1 - \frac{2\varphi}{r'}\right)}.$$

Legyen az $a(f, x)$ függvényé meg

$$\frac{B}{1 - \frac{f}{r}} - B;$$

és nézzük

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f} = \frac{A}{\left(1 - \frac{f_1 + f_2}{r}\right) \left(1 - \frac{2\varphi}{r'}\right)}, \quad f = f_1 + f_2 \quad (26)$$

differentiálegyenletet, oly $\varphi(f_1, f_2)$ megoldását keresve, hogy $\varphi(0, f_2)$ majoránsa legyen

$$b(f_2) = \frac{B}{1 - \frac{f_2}{r}} - B$$

függvénynek. Ekkor ugyanis $\varphi(0, f_2)$ majoránsa $a(f, x)$ függvénynek, s az összehasonlítás a szokott eljárással folytatható. A -t úgy választjuk, hogy nagyobb legyen 1-nél, valamint $\frac{B}{r}$ -nél, amit mindig megtehetünk, mert felső határa nincs megszorítva.

A (26) egyenlet megoldása azonban

$$\varphi(f_1, f_2) = r - r \sqrt{1 + A \log \left(1 - \frac{f_1 + f_2}{r}\right)},$$

mint tudjuk, tiszta pozitív együtthatókkal. Bebizonyítandó még tehát, hogy

$$B(f_2) = \varphi(0, f_2) = r - r \sqrt{1 + A \log \left(1 - \frac{f_2}{r}\right)}$$

majoránsa $b(f_2)$ függvénynek. Tüstént látható azonban, hogy

$$B'(f_2) = \frac{A}{1 - \frac{f_2}{r}} \cdot \left[1 + A \log \left(1 - \frac{f_2}{r}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = U(f_2) \cdot V(f_2);$$

s így a LEIBNIZ-szabályt alkalmazva

$$B^{(n)}(f_2) = U^{(n-1)}V + \binom{n-1}{1} U^{(n-2)}V^{(1)} + \dots$$

De

$$U^{(i)}(0) = i! \frac{A}{r^i},$$

másrészt pedig

$$V^{(k)}(0) = k! \frac{A^k}{r^k} + \text{positiv tagok};$$

tehát

$$\begin{aligned} B^{(n)}(0) &\geq \frac{A \cdot (n-1)!}{r^{n-1}} + \binom{n-1}{1} \frac{A \cdot (n-2)! \cdot 1! \cdot A}{r^{n-2}} + \\ &+ \binom{n-2}{2} \frac{A \cdot (n-3)! \cdot 2! \cdot A^2}{r^{n-3}} + \dots < \frac{A}{r^{n-1}} (n-1)! n. \end{aligned}$$

Másrészt

$$b^{(n)}(0) = \frac{n! B}{r^n};$$

s így

$$B^{(n)}(0) \geq b^{(n)}(0),$$

a mit bizonyítani kellett. A két probléma összevetése most már a szokott módon eszközölhető, tehát nem ismételjük.

16. *Magasabb osztályú functionálok.* A functionál-deriváltú egyenletnek van egy nevezetes általános tulajdonsága, a mi nem jut kellőképp kifejezésre az előbbi tárgyalásban. Könnyebb érthetőség végett megtárgyaljuk előbb a közönséges differenciálegyenlet megfelelő sajátosságát, azt tudniillik, hogy az

$$y' = f(x, y)$$

egyenletet megoldó $y = \varphi(x)$ függvényt az $f(x, y)$ egész számköznvi értéke együttesen határozza meg. Nyomban látható ez $y' = f(x)$ még egyszerűbb egyenleten, melynek megoldása $y = \int f(x) dx$ s így állításunk evidens. Az általánosabb $y' = f(x, y)$ egyenletre nézve legszembetűnőbb ez a CAUCHY-féle első existencia-bizonyításnál, de a priori is belátható, mert a differenciálegyenlet a függvényt úgy határozza meg, hogy kijelenti milyen a változása, a mint egyik pontból haladunk a másikba. A függvény tehát általában csak akkor lesz tökéletesen meghatározva, ha az összes átmenetet számításba vesszünk. Az egyenletet megoldó $\varphi(x)$ igazában functionálja tehát az egyenlet függvény-

együtthatóinak. A differentialegyenlet formailag ugyan kizárólag egyes pontokra (pontosabban azok infinitesimális környezetére) vonatkozó adatok megadásában álls így az általa eszközölt függvény-meghatározás egyes pontokban történő, lokális meghatározásnak látszik, ez azonban csak látszat, mert a megoldó függvény egy bizonyos helyhez tartozó értékét befolyásolják a többi helyhez kijelölt meghatározásfeltételek is, éppen, mert e feltételek átmeneget, változásmódot szabnak meg. A differentialegyenlet, mondjuk, genetikus meghatározásmódjával csak látszólag szabadulunk, tehát az összes adatok együttes szereplésétől a függvény meghatározásában, lényegben éppen ezek az egyenletek azok — a közönséges integrált is ide értve —, a melyek kikerülhetetlenül rávezetnek a functionál fogalmára.

Ezzel szemben az analitikai függvények épp abban különböznek a többi, még folytonos függvényektől is, hogy meghatározásuk szigorúan lokális: egyetlen pont infinitesimális környezetére vonatkozó (megszámlálhatóan végtelen sok) adathalmaz, tudniillik a differentiálhányadosok értéke, abban a pontban az odatartozó TAYLOR-sor együtthatóinak meghatározása által, a maga egészében determinálja már a függvényt. Innen van, hogy ha mindent analitikainak teszünk fel a differentialegyenletben, a megoldó függvény meghatározása szigorúan lokális, tudniillik a differentialegyenlet bizonyos helyre kijelölt adatai elegendőek a függvény teljes meghatározására.

Szóról-szóra ez a helyzet a functionálegyenletnél. S az előbb adott existencia-bizonyításban is éppen ilyen okokból kerülhettük el az integrálnak megfelelő fogalom használatát. Oly művelet lenne ez, mely számot vagy függvényt a functionálnak egész függvénymezőben felvett összes értékéből határozná meg. Tehát nem functionál functionálja $V(U(f; x))$, mint a milyen dolgozatunkban is már előfordult, hol $U(f; x)$ egyetlen függvéynél felvett értéke (jelen esetben függvény, nem szám) már meghatározza a V értékét az f függvéynél.

Ha a functionál-deriváltú egyenletet nemcsak analitikai functionál esetében akarjuk tárgyalni, kikerülhetetlen ennek az újabb műveletnek a bevezetése, s pedig megint a közönséges differentialegyenletre nézve részletesen elmondott okokból. Tudni-

illik a functionál-deriváltú egyenlet functionált igyekszik meghatározni a functionálnak függvényről függvényre menet történő változása, mondjuk átmenete segítségével. Ezek lennének a másodosztályú functionálok, szemben az eddig tárgyaltakkal, a melyeket első osztályúaknak mondhatunk. Nos hát, jelrendszerünket, a függvény-calculust, úgy készítettük, hogy functionál-calculus is lehessen belőle a jelek megfelelő átértelmezésével; még pedig akárhányadik osztályú functionál-calculus.

Rendeljünk minden, korlátolt függvényekből álló E halmazból vett e függvényhalmazhoz számot (vagy függvényt vagy functionált), például a $\lceil f \rceil$ számok felső korlátját s jelöljük ezt $\alpha(e)$ jellel. Tegyük fel, hogy $\alpha(e_1 + e_2) = \alpha(e_1) + \alpha(e_2)$, például ha $\alpha(e) = 1$ mihelyt f_0 benn van a halmazban s $\alpha(e) = 0$ mihelyt nincs benne s legyen $l_0, l_1, l_2, \dots, l_n$ az adott $U(f)$ functionál értékkészletének ε -os beosztása, végül e_i ama függvények halmaza, melyekre nézve $l_i \leq U(f) < l_{i+1}$. A

$$\sum_{i=0}^n l_i \alpha(e_i)$$

összegnek megint van bármilyen korlátolt $U(f)$ esetében, még pedig a beosztásoktól független limese, mit jelölhetünk

$$[[\alpha(e), U(f)]] = A((U(f)))$$

belső szorzásjellel. Így minden korlátolt functionálhoz rendelünk számot s ez a hozzárendelés szemmel láthatólag lineáris:

$$A(U_1 + U_2) = A(U_1) + A(U_2).$$

Viszont minden ilyen A másodosztályú lineárfunctionálhoz tartozik olyan $\alpha(e)$ halmazfüggvény, hogy

$$A(U) = [[\alpha, U]].$$

A derivált definitiója szóról-szóra átvihető szintén s így az egész calculus. Az első osztályú $U(f)$ -re képezett $A(U(f))$ mondható functionálintegrálnak is; az analogia ugyanis a közönséges integrállal teljes.

Innen pedig a genetikus meghatározás, a mi meg a deri-

vált fogalmának egyenes következménye, kikényszeríti az átmenetet egygyel magasabb osztályú functionálhoz s így tovább akármeddig. Látjuk azonban, hogy ezek formailag nem különböznek egymástól, a belső szorzásnak nevezett művelet szerkezetében megvan a kulcsunk az így előálló mennyiségi összefüggésmódok kimerítő leírására és tárgyalására. Logikailag érdekes probléma gyanánt marad fenn a kérdés, vajjon a most bevezetett, egymást lánczolatosan tovább definiáló mennyiségi kapcsolatokon kívül lehet e még ezektől lényegesen különböző mennyiségi meghatározásmódot pontosan definiálni.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 decz. 13.-án tartott üléséből.)

MEREV RENDSZEREK KINEMATIKÁJA.

SUTÁK JÓZSEF-től.

Előszó.

A vektorelméleti módszerek alkalmazásával a merev rendszerek kinematikájának alapproblémáit oldják meg a következő sorok.

A sebesség alaptétele alapján különösen a momentán nyugalomban maradó pontok problémája nyert teljes megvilágítást s a kinematikai polárrokonság teljes kifejtést.

A gyorsulások alapproblémái tudtommal a jelen sorokban nyernek először teljes elintézést. A momentán gyorsulással nem bíró pontok problémájának teljes megoldása után egy új fogalmat, a leírt módon definiált ponthalmazok gyorsulási centrumának a fogalmát vezettem be, melynek segítségével teljesen sikerült az elsőrendű gyorsulások eloszlási problémáját megvilágítani; evvel kapcsolatban aztán a gyorsulási centrumok alakzatának egyenletét is megállapítottam.

A merev rendszerhez kapcsolt pontok mozgásának leírása a kinematika általános problémáinak módszertani megoldását tartalmazza. A bemutatott általános jellegű feladatok megoldása alkalmával rámutattam a természetes geometria forrására is.

Hasonló irányú vizsgálatokkal találkozunk BURALI-FORTI e Marcolongo «Elementi di calcolo vettoriale» 1909-ben megjelent munkálatában. Azonban az egyes síkokra bevezetett operatoraik nemcsak megzavarják a vektorelméletben uralkodó harmoniát, hanem az alkalmazások elé is akadályt gördítenek. Másféle tárgyalással eljutnak ugyan a sebességi tételhez s a Mozzi-féle tengely fogalmához, azonban a síkra vonatkozó kutatásaik ré-

szint a főtebb említett okból módszertani szempontból esnek kifogás alá, részint pedig a physikai látás fogyatékosága folytán válnak értéktelenné. Így a további differentiálási folyamatnak alávetett képletből kihagyják az olyan pont differentiálhányadosát, melynek momentán sebessége nulla, mely eljárás aztán a jelenségeknek eltorzított képéhez vezetett (115--116. l.).

Végül megjegyzem, hogy a merev rendszerek kinematikájának a régi klasszikus módszerekkel való teljes és önálló felépítése megtalálható Fröhlich I. 1892-ben megjelent «Kinematiká»-jában.¹

1. Bevezetés.

1. A vektorokat általában felülről vízszintes vonallal ellátott kis betűkkel jelöljük; így pl. az \bar{a} symbolumot így mondjuk ki: a vektor.

Az \bar{a} és \bar{b} vektorok skaláris szorzatát így jelöljük:

$$\bar{a} \cdot \bar{b},$$

a vektoralis szorzatát meg így:

$$\bar{a} \times \bar{b}.$$

Mindkét művelet distributív művelet, melyekre érvényesek a következő formulák:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}), \quad \text{(I)}$$

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{a} \cdot \bar{c} & \bar{b} \cdot \bar{c} \\ \bar{a} & \bar{b} \end{vmatrix}. \quad \text{II.}$$

2. A Q pontból P pontig terjedő vektort PQ -val jelöljük.

3. Ha P pont t parameter függvénye, akkor P -nek t szerinti differentiálhányadosai szintén vektorok, melyeket a szokásos P' , P'' ... symbolumokkal jelölünk.

4. HAMILTON i , j , k betűivel ebben a sorrendben jobbraforgó rendszert alkotó reális egységvektorokat jelölünk, melyekre nézve:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad \text{(1)}$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0; \quad \text{(2)}$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j. \quad \text{(3)}$$

¹ Math. és Phys. Lapok II. k. 1893. 188. l.

5. Ha \bar{u} oly tetszésszerű vektor, melyre nézve:

$$\bar{u}.i=x, \bar{u}.j=y, \bar{u}.k=z, \quad (4)$$

akkor

$$\bar{u}=xi+yj+zk. \quad (5)$$

Ha tehát \bar{u} egységvektor, akkor x, y, z éppen az i, j, k -ra vonatkoztatott irányecsinusai.

6. Ha

$$u_n=x_ni+y_nj+z_nk,$$

akkor

$$\bar{u}_1.\bar{u}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \quad (III)$$

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (IV)$$

$$\bar{u}_1.(\bar{u}_2 \times \bar{u}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (V)$$

7. Ha i, j, k t parameter függvényei, akkor az 1. és 2. alapján:

$$\begin{aligned} i.i' &= 0, & k.j' &= -j.k' = p, \\ j.j' &= 0, & i.k' &= -k.i' = q, \\ k.k' &= 0, & j.i' &= -i.j' = r. \end{aligned} \quad (VI)$$

8. A

$$P = P(s)$$

görbe $P(s)$ pontjához tartozó egységérintőt, egységfőnormálist, egységbinormálist, görbületet és torziót a görbe $P(s)$ pontjához tartozó fundamentális mennyiségeknek nevezzük s rendre a következő symbolumokkal jelöljük: \bar{e} , \bar{n} , \bar{b} , $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\tau}$.

\bar{e} , \bar{n} , \bar{b} ebben a sorrendben jobbra forgó rendszert alkotnak és

$$\bar{e} = \frac{dP}{ds}; \quad (VII)$$

$$\frac{d\bar{e}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \bar{e} - \frac{1}{\tau} \bar{b}, \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{1}{\tau} \bar{n}. \quad (VIII)$$

A (VIII) alatt levő formulákat SERRET-FRENET-féle formuláknak nevezzük.¹

2. A mozgó merev rendszer sebességi tétele.

Ha az i, j, k vektorok a merev rendszer részét alkotják, akkor bármily két pontja legyen is a merev rendszernek P és Q , a

$$(P-Q).i=x, \quad (P-Q).j=y, \quad (P-Q).k=z$$

mennyiségek a rendszer mozgása közben invariánsul maradnak. Ennélfogva a merev rendszer mozgása közben csak a rendszer pontjai s a rendszerrel merev rendszert alkotó vektorok lesznek az időnek, t -nek, a mozgást leíró függvényei. Ennélfogva a

$$P-Q = xi + yj + zk \quad (1)$$

vektor t szerint vett differentiálhányadosa

$$P' - Q' = xi' + yj' + zk'.$$

Ámde az előbbi fejezet VI. alatt levő egyenletei alapján

$$\begin{aligned} (P' - Q').i &= qz - ry, \\ (P' - Q').j &= rx - pz, \\ (P' - Q').k &= py - qx, \end{aligned}$$

következőleg:

$$P' - Q' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Ha tehát $\bar{\omega}$ -val jelöljük a következő vektort:

$$\bar{\omega} = pi + qj + rk, \quad (2)$$

akkor

$$P' - Q' = \bar{\omega} \times (P - Q) \quad (I)$$

Ezt a tételt nevezzük a *mozgó merev rendszer sebességi tételének*, e szerint:

¹ SERRET: *Liouville Journal* t. XVI. 1851. FRENET: *Liouville Journal* t. XVII. 1852.

A merev rendszer P pontjának Q -ra vonatkoztatott sebessége két részből áll, úgymint Q' -ből és az $\bar{\omega} \times (P-Q)$ -ből, az elsőt **translatiónak**, az utóbbit pedig **rotatiónak** nevezzük; a Q ponton átmenő $\bar{\omega}$ irányú egyenest pedig a **rotatio momentán tengelyének** mondjuk.

A rotatio tehát merőleges $\bar{\omega}$ és $P-Q$ síkjára s velük jobbraforgó rendszert alkot.

Ha P rajta van a Q -n átmenő momentán forgási tengelyen, akkor:

$$\bar{\omega} \times (P-Q) = 0,$$

következően

$$P' = Q',$$

azaz: A momentán forgási tengelyen levő pontoknak nincs rotatiója, hanem mindegyiknek ugyanaz a sebessége.

Ha tehát P -ből a Q -n átmenő momentán forgási tengelyre vont merőleges talppontját C -nek nevezzük, akkor a

$$\begin{aligned} P' - C' &= \bar{\omega} \times (P-C); \\ C' &= Q' \end{aligned}$$

egyenletek alapján a rotatio valószínű értéke

$$\bar{\omega} \times (P-Q) = \bar{\omega} \times (P-C),$$

abszolút értéke pedig

$$|\bar{\omega} \times (P-Q)| = |\bar{\omega}| |P-C|.$$

$|\bar{\omega}|$ -t a szögsebesség abszolút értékének, vagy a szabatosság mellőzésével egyszerűen csak szögsebességnek mondjuk.

3. Következtetések a sebességi tételből.

A sebességnek az előbbi fejezetben megállapított

$$P' - Q' = \bar{\omega} \times (P-Q) \quad (1)$$

alaptételéből nyilvánvaló a következő két egyenlet:

$$(P' - Q') \cdot (P - Q) = 0, \quad (2)$$

$$(P' - Q') \cdot \bar{\omega} = 0, \quad (3)$$

vagy

$$|P'| \cos (P', P-Q) = |Q'| \cos (Q', P-Q), \quad (2')$$

$$|P'| \cos (P', \bar{\omega}) = |Q'| \cos (Q', \bar{\omega}). \quad (3')$$

A (2') értelmében :

1. Bármily merevrendszerbeli egyenesen levő pontok sebességeinek vetülete az egyenesre konstans; ha tehát egy pontban a vetület nulla, azaz a sebesség merőleges az egyenesre, akkor minden pontban az.

A (3') szerint pedig:

2. A merev rendszer bármely pontja sebességének a vetülete a momentán forgási tengelyre ugyanaz; ha tehát csak egy pontnak a sebessége is merőleges a momentán forgási tengelyre, akkor minden ponté az.

Ezt a tételt a *sebességek vetületi tételének* nevezzük.

Legyen \bar{n} az $\bar{\omega}$ irányára nem merőleges egységvektor s Q a merev rendszer egy tetszőszerinti pontja, akkor a Q -n átmenő s \bar{n} -re normális síknak van oly P pontja, melyre nézve

$$P' \parallel \bar{n}, \quad P' \times \bar{n} = 0.$$

Ugyanis az (1) egyenletünk s az 1. fejezet (II) egyenlete alapján ily P és Q pontokra nézve az a föltétel következik, hogy

$$-Q' \times \bar{n} = [\bar{\omega} \times (P-Q)] \times \bar{n} = (\bar{\omega} \cdot \bar{n}) (P-Q),$$

honnan

$$P = Q - \frac{1}{\bar{\omega} \cdot \bar{n}} Q' \times \bar{n}. \quad (II)$$

Minthogy ily P ponton átmenő momentán forgási tengely minden pontjában a sebesség párhuzamos \bar{n} -nel, azért kimondhatjuk a következő tételt:

3. Van az általános mozgásban oly momentán forgási tengely, melynek pontjaiban a sebesség egy előre adott, de $\bar{\omega}$ irányára nem merőleges \bar{n} vektorral párhuzamos.

Azt a momentán forgási tengelyt, melynek pontjaiban a sebesség $\bar{\omega}$ -val egyirányú, momentán eltolódási-, vagy *Mozzási tengelynek* nevezzük.

4. Ha a merev rendszer tetszőszerinti Q pontjából a Mozzi-féle tengelyre vont merőleges talppontja M , akkor

$$M = Q - \frac{1}{\omega^2} Q' \times \bar{\omega}. \quad (\text{II}')$$

A Mozzi-féle tengely pontjaira vonatkoztatva sebességi tételünket, a következő formulához jutunk:

$$P' - M' = \bar{\omega} \times (P - M), \quad (\text{I}')$$

azaz:

5. A merev rendszer bármely pontjának a sebessége a Mozzi-féle tengelymenti eltolódásból s e tengely körüli elfordulásból ered.

A Mozzi-féle tengely pontjaira vonatkoztatva a sebességek vetületi tételét, az általánosságot nem érintő $(\bar{\omega}, M') = 0$ feltétel elfogadásával a következő képletet nyerjük:

$$|P'| \cos(P', \bar{\omega}) = |M'|, \quad (3'')$$

azaz:

6. A merev rendszer bármely pontja sebességének a vetülete a momentán forgási tengelyre egyenlő a Mozzi-féle tengelymenti eltolódás abszolút értékével.

Ha a merev rendszer egyik P_0 pontjának sebessége nulla, akkor a (3'') alapján

$$M' = 0,$$

az (I') alapján pedig

$$\bar{\omega} \times (P_0 - M) = 0,$$

ha tehát P_0 nincs a Mozzi-féle tengelyen, akkor

$$\omega = 0,$$

következőleg bármely P pontra nézve

$$P' = 0,$$

azaz:

7. Ha a merev rendszernek egyik, a Mozzi-féle tengely pontjaitól különböző pontjának a sebessége nulla, akkor a rendszerben momentán nyugalom uralkodik.

A (3'') alapján nyilvánvalók még a következő tételek:

8. Ha a Mozzi-féle tengely egy pontjában a sebesség nulla,

akkor minden pontjában az, és a rendszer többi pontjában a sebesség merőleges a Mozzi-féle tengelyre; és megfordítva: ha a rendszer egy pontjában a sebesség merőleges a Mozzi-féle tengelyre, akkor a többiben is az s a Mozzi-tengely mentén nyugalom van.

9. Ha a Mozzi-féle tengely egy pontjában a sebesség nullától különböző, akkor a rendszer többi pontjában is az, s a sebesség egy pontban sem lehet merőleges a Mozzi-féle tengelyre; s megfordítva: ha a rendszer egy pontjában a sebesség nem merőleges a Mozzi-féle tengelyre, akkor a többiben sem az s a rendszer egyik pontjában sem lehet a sebesség nulla.

Ha az (I')-ben M nem más, mint a P -ből a Mozzi-tengelyre vont merőleges talppontja, akkor az I'-ből

$$P'^2 = M'^2 + \bar{\omega}^2 (P - M)^2, \quad (\text{I}'')$$

azaz:

10. A Mozzi-féle tengelytől egyenlő távolságban levő pontok sebessége ugyanakkora.

P_0 pont kinematikai polársíkja alatt értjük a

$$P'_0 \cdot (P - P_0) = 0 \quad (\text{III})$$

síkot, P_0 pontot pedig a sík kinematikai pólusának nevezzük.

A 1. tétel alapján tehát:

11. A sík kinematikai pólusán c síkban átmenő egyenesek pontjaiban a sebesség merőleges az illető egyenesekre.

A definitióból, illetőleg 11.-ből meg nyilvánvaló a következő tétel:

12. Bármely momentán forgási tengelyen levő pontok polársíkjai párhuzamosak s ezeket a síkokat a momentán forgási tengelyen átmenő bármely sík oly párhuzamos egyenes rendszerben metszi, melynek bármely egyenesének pontjaiban a sebesség merőleges az egyenesre, tehát c párhuzamosak definiálta végtelen távoli pont lesz a momentán forgási tengelyen átmenő síkunknak a kinematikai pólusa.

Mivel a (II) egyenlet alapján minden oly síknak a kinematikai pólusa meghatározható, melynek normálisa nem merőleges $\bar{\omega}$ -ra, az utóbbi tételünk értelmében pedig az $\bar{\omega}$ iránynyal pár-

huzamos síkok végtelenben levő kinematikai polusai is meghatározhatók, azért:

13. Ha a merev rendszer egyik pontjában sem nulla a sebesség, akkor minden pontnak van kinematikai polársíkja s minden síknak van kinematikai polusa.

Ha egy síkban két egyenes pontjaiban a sebesség merőleges az illető egyenesre, akkor találkozási pontjuk éppen a sík pólusa; ennél fogva, ha egy egyenes pontjaiban a sebesség merőleges az egyenesre, akkor a 13. és 11. tétel értelmében rajta átmenő síkok kinematikai polusai beleesnek az egyenesbe, következésképp egy adott sík kinematikai polusán átmenő síkok kinematikai polusai beleesnek az adott síkba s mivel ezenkívül a (III) egyenlet a (2) alapján maga után vonja a

$$P'. (P_0 - P) = 0$$

egyenletet is, hol P a P_0 kinematikai polársíkjának tetszőleges, de fix pontja, s melyben ha a P_0 -t változónak tekintjük, akkor ez a P pont kinematikai polársíkjának az egyenlete, azért:

14. A pontmező pontjainak kinematikai polársíkjai egy síksíllagot alkotnak, melynek tartója a pontmező tartójának kinematikai polusa; és megfordítva: egy síksíllag kinematikai polusai egy pontmezőt alkotnak, melynek tartója a síksíllag tartójának kinematikai polársíkja.¹

Ebből következik, hogy minden pontmezőhöz tartozik egy síksíllag, mely vele kinematikai polárviszonyban van, az ilyen összetartozó pontmezőket és síksíllagokat konjugáltaknak nevezzük; e definitio alapján aztán evidens a következő tétel.

15. Két pontmező közös pontsorának kinematikai polársíkjai a két konjugált síksíllag közös síksorát alkotják s viszont.

Két pontmező közös pontsorának tartóját s a konjugált

¹ A sík pontjainak halmazát pontmezőnek, egyeneseknek halmazát sugármezőnek, a síkot pedig a pont-, illetőleg sugármező tartójának mondjuk. A ponton átmenő síkok halmazát síksíllagnak, a pontot meg a síksíllag tartójának nevezzük. A ponton átmenő egyenesek alkotják a sugársíllagot, melynek tartója a pont. KLUG: Projektív Geometria p. 19. BERZOLARI: Geometria analitica I. p. 1.

síksíllagok közös síksorának tartóját konjugált egyeneseknek nevezzük.

Két egysíkban fekvő egyenes közös síkjának kinematikai polusa rajta van a két egyenes konjugáltjainak mindegyikén, tehát csak ebben a pontban találkoznak, következésképpen:

16. Egy sugármező egyenesének konjugáltjai egy sugárcsíllagot alkotnak, melynek tartója a sugármező tartójának kinematikai polusa.

Egy sugármezőt és egy sugárcsíllagot, melyek az imént kimondott kinematikai polárviszonyban vannak egymással, konjugáltaknak mondunk. A 11. tételünkből és a 14. tétel előtt lévő gondolatmenetből következik, hogy:

17. Egy konjugált sugármező s sugárcsíllag közös egyenesi önmaguknak konjugáltjai.

Ennélfogva :

18. Egy egyenesnek konjugáltjával vagy nincs közös pontja, vagy pedig minden pontja közös.

Ha a Mozzi-féle tengelyen momentán nyugalom van, akkor

$$P' = \bar{\omega} \times (P - M), \quad (I'')$$

$$|P'| \cos (P', \bar{\omega}) = 0, \quad (3'')$$

$$|P'| \cos (P', P - M) = 0, \quad (2'')$$

azaz :

19. Ha a Mozzi-féle tengelyen momentán nyugalom van, akkor 1. a Mozzi-féle tengelyen átmenő bármely síknak minden pontja a sík kinematikai polusa, s a Mozzi-féle tengely bármely pontjának a tengelyen átmenő síkok mindegyike kinematikai polársíkja; 2. a Mozzi-féle tengelylyel párhuzamos bármely sík végtelen távoli egyenesének minden pontja a sík kinematikai polusa, s bármely végtelen távoli pont kinematikai polusa azoknak a síkoknak, melyek párhuzamosak e pont s a Mozzi-féle tengely meghatározta síkkal; 3. a Mozzi-féle tengelylyel nem párhuzamos sík kinematikai polusa a síknak a Mozzi-féle tengelylyel való metszéspontja s egy végesben, de nem a Mozzi-féle tengelyen levő pont kinematikai polársíkja e pont s a Mozzi-féle tengely meghatározta sík.

Legyenek Q_1 és Q_2 oly pontok, melyekben a sebesség rendre \bar{n}_1 és n_2 vektorokkal párhuzamos. A

$$Q'_1 - Q'_2 = \bar{\omega} \times (Q_1 - Q_2)$$

alapján

$$[\bar{\omega} \times (Q_1 - Q_2)] \cdot [\bar{n}_1 \times \bar{n}_2] = 0.$$

Ha tehát a $Q_1 Q_2 \bar{\omega}$ sík egy tetszésszerű pontja

$$P = Q_1 + \lambda (Q_1 - Q_2) + \nu \bar{\omega},$$

akkor az előbbi s a

$$P' - Q'_1 = \omega \times (P - Q_1) = \lambda \bar{\omega} \times (Q_1 - Q_2)$$

egyenlet alapján világos, hogy

$$P' \cdot (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) = 0,$$

azaz:

20. Ha Q_1 és Q_2 oly pontok, melyekben a sebességek rendre adott \bar{n}_1 és \bar{n}_2 vektorokkal párhuzamosak, akkor a

$$P = Q_1 + \lambda (Q_1 - Q_2) + \nu \bar{\omega} \quad (4)$$

sík pontjainak sebessége párhuzamos az

$$(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) \cdot (P - P_0) = 0 \quad (5)$$

síkkal, hol P_0 tetszésszerű pont; ennek a két síknak metszésvonalát az utóbbi karakterisztikájának nevezzük.

A 13. tételből következik, hogy:

21. Ha a merev rendszer egyik pontjának a sebessége sem nulla, akkor minden síknak van egy, de csakis egy karakterisztikája.

Ha pedig a Mozzi-féle tengelyen nyugalom van, akkor nyilvánvaló a következő tétel:

22. Ha a Mozzi-féle tengelyen nyugalom van, akkor a Mozzi-féle tengelyre merőleges síkok minden egyenese a sík karakterisztikája, minden más sík karakterisztikája pedig az az egyenes, melyet belőle a Mozzi-féle tengelyen átmenő s rá merőleges sík metsz ki.

Például ha merev rendszerünk Q pontja a

$$Q = Q(s)$$

görbén úgy mozog, hogy az i vektor állandóan egybeesik a görbe $Q(s)$ pontbeli érintőjével \bar{e} -vel, j és k pedig a

$$\begin{aligned} j &= \bar{n} \cos \alpha + \bar{b} \sin \alpha, \\ k &= -\bar{n} \sin \alpha + \bar{b} \cos \alpha \end{aligned}$$

vektorokkal, hol \bar{n} és \bar{b} a görbe $Q(s)$ pontjához tartozó főnormálisát, illetőleg binormálisát jelöli, akkor a merev rendszer tetzészerinti P pontja pályájának egyenlete:

$$P = Q + x\bar{e} + (y \cos \alpha - z \sin \alpha) \bar{n} + (y \sin \alpha + z \cos \alpha) \bar{b}.$$

Ha már most az egyszerűség kedvéért

$$t = s,$$

akkor az 1. fejezet VIII. képletei értelmében

$$\begin{aligned} i' &= \frac{\bar{n}}{\varrho}, \\ j' &= -\frac{\cos \alpha}{\varrho} \bar{e} - \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) \sin \alpha \bar{n} + \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) \cos \alpha \bar{b}, \\ k' &= \frac{\sin \alpha}{\varrho} \bar{e} - \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) \cos \alpha \bar{n} - \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) \sin \alpha \bar{b}; \end{aligned}$$

következőleg:

$$\begin{aligned} p &= k \cdot j' = \alpha - \frac{1}{\tau}, \\ q &= i \cdot k' = \frac{\sin \alpha}{\varrho}, \\ r &= j \cdot i' = \frac{\cos \alpha}{\varrho}; \\ \bar{\omega} &= \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) i + \frac{\sin \alpha}{\varrho} j + \frac{\cos \alpha}{\varrho} k, \end{aligned}$$

vagy

$$\bar{\omega} = \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) \bar{e} + \frac{1}{\varrho} \bar{b}.$$

A Mozzi-féle tengelynek a Q -n átmenő s $\bar{\omega}$ -ra merőleges síkban levő pontja:

$$M_0 = Q - \frac{1}{\bar{\omega}^2} Q' \times \bar{\omega},$$

de

$$Q' = e = i$$

$$Q' \times \bar{\omega} = -\frac{\cos \alpha}{\varrho} j + \frac{\sin \alpha}{\varrho} k = -\frac{\bar{n}}{\varrho},$$

következésképpen

$$M_0 = Q + \frac{\cos \alpha}{\omega^2 \varrho} j - \frac{\sin \alpha}{\omega^2 \varrho} k,$$

vagy

$$M_0 = Q + \frac{1}{\omega^2 \varrho} \bar{n}.$$

A Mozzi-féle tengely egyenlete tehát

$$M = M_0 + \lambda \bar{\omega},$$

vagy

$$M = Q + \frac{1}{\omega^2 \varrho} \bar{n} + \lambda \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) \bar{e} + \frac{\lambda}{\varrho} \bar{b}.$$

Továbbá

$$M'_0 = Q' + \bar{\omega} \times (M_0 - Q),$$

honnan

$$M'_0 = \frac{1}{\omega^2} \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) \left[\left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) \bar{e} + \frac{1}{\varrho} \bar{b} \right].$$

Ennélfogva a Mozzi-féle tengelytől R távolságban levő P pontra nézve:

$$P'^2 = \frac{1}{\omega^2} \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right)^2 + \bar{\omega}^2 R^2.$$

A feladatunkban tárgyalt mozgást *sikló mozgásnak* nevezzük.

4. Az elsőrendű gyorsulások alaptétele.

Ha a sebességi alaptételt kifejező egyenletet (2. Fejezet (I)) t szerint differenciáljuk, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$P''' - Q'' = \bar{\omega}' \times (P - Q) + \bar{\omega} \times (P' - Q').$$

Ha ebbe az egyenletbe $P' - Q'$ értékét behelyettesítjük s

aztán a vektoriális szorzást az 1. fejezet (II) képlete szerint végrehajtjuk, akkor a következő formulához jutunk:

$$I''' - Q'' = \bar{\omega}' \times (P - Q) + [\bar{\omega} \cdot (P - Q)] \bar{\omega} - \bar{\omega}^2 (P - Q), \quad (\text{IV})$$

melyet az *elsőrendű gyorsulások alaptételének* nevezünk; e szerint a merev rendszer bármely P pontjának a szintén tet-szésszerinti Q pontra vonatkoztatott gyorsulása a következő há-rom részből áll:

1. Q gyorsulásából Q'' -ből,
2. a Q -n átmenő $\bar{\omega}'$ irányú tengely körüli forgásból, $\bar{\omega}' \times (P - Q)$ -ből, melyet *forgási gyorsulásnak* nevezünk és
3. végül $[\bar{\omega} \cdot (P - Q)] \bar{\omega} - \bar{\omega}^2 (P - Q)$ -ből, melyet *centripetális gyorsulásnak* mondunk.

A forgási gyorsulás $\bar{\omega}'$ és $P - Q$ vektorokkal jobbra forgó rendszert alkot. Ha továbbá a Q -n átmenő $\bar{\omega}'$ irányú egyenesre, melyet *momentán forgási forgástengelynek* nevezünk, a P -ből vont merőleges talppontját C -nek nevezzük, akkor

$$P - Q = (P - C) + (C - Q)$$

alapján a forgási gyorsulás abszolút értéke

$$|\bar{\omega}' \times (P - Q)| = |\bar{\omega}'| |P - C|; \quad (1)$$

$|\bar{\omega}'|$ -t a *szöggyorsulás abszolút értékének*, vagy csak röviden *szöggyorsulásnak* nevezzük.

Ha pedig P -ből a Q -n átmenő momentán forgási tengelyre vont merőleges talppontját C_1 -nek nevezzük, akkor a

$$P - Q = (P - C_1) + (C_1 - Q)$$

egyenlet alapján

$$[\bar{\omega} \cdot (P - Q)] \bar{\omega} = [\bar{\omega} \cdot (C_1 - Q)] \bar{\omega} - \bar{\omega}^2 (C_1 - Q),$$

következőleg

$$[\bar{\omega} \cdot (P - Q)] \bar{\omega} = \bar{\omega}^2 (P - Q) + \bar{\omega}^2 (C_1 - P), \quad (2)$$

azaz: a *centripetális gyorsulás abszolút értéke*

$$\bar{\omega}^2 (C_1 - P)$$

s *iránya megegyezik a $C_1 - P$ vektor irányával.*

5. Következtetések az elsőrendű gyorsulások alaptételéből.

Ha van oly P pont, melyben a gyorsulás nulla, akkor erre nézve

$$Q'' + \bar{\omega}' \times (P - Q) + [\bar{\omega} \cdot (P - Q)] \bar{\omega} - \omega^2 (P - Q) = 0, \quad (1)$$

hol a (2) fejezet fejtegetései értelmében:

$$\bar{\omega}' = p'i + q'j + r'k + \bar{\omega} \times \bar{\omega},$$

azaz:

$$\bar{\omega}' = p'i + q'j + r'k. \quad (2)$$

(1) alatt levő egyenletünknek mindig van egy, de csakis egy megoldása, ha

$$D = \begin{vmatrix} -(q^2 + r^2) & pq - r' & pr + q' \\ pq + r' & -(p^2 + r^2) & qr - p' \\ pr - q' & qr + p' & -(p^2 + q^2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ámde

$$D = -[(qr' - r'q')^2 + (rp' - p'r')^2 + (pq' - qp')^2];$$

azaz:

$$D = -(p^2 + q^2 + r^2)(p'^2 + q'^2 + r'^2) \sin^2(\bar{\omega}, \bar{\omega}'),$$

ennélfogva:

1. A merev rendszernek egy, de csakis egy oly pontja van, melyben a gyorsulás nulla, ha

$$\bar{\omega} \neq 0, \bar{\omega}' \neq 0,$$

és $\bar{\omega}$ nem párhuzamos $\bar{\omega}'$ -el.

Ha

$$\bar{\omega} \neq 0, \bar{\omega}' \neq 0,$$

de

$$\bar{\omega} \parallel \bar{\omega}',$$

akkor a (IV) alatt levő formulánk értelmében

$$P'' \cdot \bar{\omega} = Q'' \cdot \bar{\omega},$$

a mi azt mondja ki, hogy ebben az esetben csak akkor lehet valamely pontban a gyorsulás nulla, ha a többiben moróleges a momentán forgási tengelyre. Ha ez a feltétel teljesül, akkor az

(1) alatt levő egyenlet megoldható. Jelöljük ugyanis a Q -n átmenő $\bar{\omega}$ illetőleg $\bar{\omega}'$ irányú tengelyre P -ből vont merőleges talppontját C -vel, akkor az előbbi fejezet fejtegetései alapján (1) egyenletünk a következő alakban írható:

$$Q'' + \bar{\omega}' \times (P - C) - \bar{\omega}^2 (P - C) = 0,$$

honnan

$$Q'' \times \bar{\omega} + \bar{\omega}'^2 (P - C) - \bar{\omega}^2 (P - C) \times \bar{\omega}' = 0,$$

melyből az előbbi egyenlet $\bar{\omega}^3$ -szorosának kivonásával a következőt nyerjük:

$$Q'' \times \bar{\omega}' - \bar{\omega}^2 Q'' + (\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4) (P - C) = 0.$$

Tehát

$$P - C = \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} (\bar{\omega}' \times Q'' + \bar{\omega}^2 Q''), \quad (3)$$

mely képlet egy $\bar{\omega}$ -val párhuzamos tengelyt határoz meg, melynek pontjaiban a gyorsulás nulla, ennél fogva:

2. Ha

$$\bar{\omega} \parallel \bar{\omega}',$$

de

$$\bar{\omega} \neq 0, \bar{\omega}' \neq 0,$$

akkor általában nincs oly pont, melyben a gyorsulás nulla, de ha a gyorsulás minden pontban merőleges a momentán forgási tengelyre, akkor egy momentán forgási tengely minden pontjában nulla a gyorsulás.

Ha

$$\bar{\omega} = 0, \bar{\omega}' \neq 0,$$

akkor a (IV)-ből

$$I'' - Q'' = \bar{\omega}' \times (P - Q); \quad (IV')$$

következőleg a gyorsulásokra érvényesek lesznek csekély módosítással mindazok a fejtegetések, melyeket az előbbi fejezetben a sebességekre vonatkozólag végeztünk. Így például az előbbi fejezet (II') képletének a jelen esetben megfelel az

$$M = Q - \frac{1}{\bar{\omega}'^2} Q'' \times \bar{\omega}', \quad (3')$$

a mi azt mondja ki, hogy az M ponton átmenő «momentán gyorsulási forgástengely» mentén a gyorsulás minden pontban párhuzamos a tengellyel, ha tehát egy pontban nulla, akkor minden pontban az; a részletesebb fejtegetésre különben irányadó az előbbi fejezet.

Ha pedig

$$\bar{\omega} \neq 0, \bar{\omega}' \neq 0,$$

akkor az (1) egyenlet $C - Q \parallel \bar{\omega}$ és $P - C \perp \bar{\omega}$ miatt így módosul

$$Q'' + \bar{\omega}^2 (P - C) = 0,$$

honnan

$$P - C = \frac{1}{\bar{\omega}^2} Q''. \quad (3'')$$

Mivel a (3') és (3'') alatti képletek a (3)-nak csak speciális esetei, azért a (2) alatti tétel a két utóbbi esetben is érvényben marad, ha $\bar{\omega}$ -t akkor is párhuzamosnak mondjuk $\bar{\omega}'$ -lel, midőn az egyik közülük nulla.

3. Ha $\bar{\omega} = \bar{\omega}' = 0$, akkor

$$P'' = Q'',$$

tehát a mozgás csak transzlációs gyorsulást tartalmaz; következésképp a gyorsulás vagy minden pontban nulla, vagy egy pontban sem az.

Ha

$$P' - Q \parallel \bar{\omega},$$

tehát a sebességi tétel szerint

$$P' - Q' = 0,$$

akkor a IV. előtt írt egyenlethől

$$P'' - Q'' = \bar{\omega}' \times (P - Q), \quad (IV'')$$

azaz:

4. A merev rendszer bármely pontján átmenő momentán forgási tengely az ugyanazon a ponton átmenő momentán gyorsulási forgástengely körül ($\bar{\omega}'$) szöggyorsulással forog s forgási iránya az $\bar{\omega}'$ és $P - Q$ vektorokkal jobbraforgó rendszert alkot.

Ha pedig

$$P - Q \parallel \bar{\omega},$$

akkor a IV. előtt írt egyenletből s a sebességi tételből $Q - C_1 \parallel \bar{\omega}$ miatt

$$P'' - Q'' = \bar{\omega} \times (P' - Q') = \bar{\omega}^2 (C_1 - P), \quad (\text{IV}''')$$

azaz:

5. *A merev rendszer momentán gyorsulási tengelyén lévő pontoknak nincs szöggyorsulása, hanem csak transzlációs és centripetális gyorsulása.*

6. Gyorsulási centrumok.

Jelöljük a MOZZI-féle tengely egy tetszőszerinti pontját M_0 -val, akkor minden más M_1 pontjára nézve:

$$M_1 = M_0 + \lambda \bar{\omega}. \quad (1)$$

Legyen továbbá a rövidség kedvéért

$$\eta = (\bar{\omega} \times \bar{\omega}') \times \bar{\omega}; \quad (2)$$

és

$$Q_{1v} = M_1 + v\bar{\eta}. \quad (3)$$

A Q_{1v} -n átmenő s $\bar{\omega} \times \bar{\omega}'$ -vel párhuzamos egyenes egyik tetszőszerinti pontja legyen P_{1v} , akkor a P_{1v} ponton átmenő momentán forgástengely pontjaira nézve

$$P_{1v} = P_{0v} + \lambda \bar{\omega},$$

következőleg az előbbi fejezet (IV'') alatt levő képlete alapján:

$$P'_{1v} - P'_{0v} = \lambda (\bar{\omega}' \times \bar{\omega}). \quad (4)$$

A definitio értelmében

$$(P_{1v} - Q_{1v}) \cdot \bar{\omega} = (P_{1v} - Q_{1v}) \cdot \bar{\omega}' = 0, \quad (5)$$

következőleg a (IV) szerint

$$P''_{1v} - Q''_{1v} = \bar{\omega}' \times (P_{1v} - Q_{1v}) - \bar{\omega}^2 (P_{1v} - Q_{1v}), \quad (\text{IV}^{(4)})$$

ebből az (5) alatt lévő relatio alapján

$$\bar{\omega}' \times (P''_{1v} - Q''_{1v}) = -\bar{\omega}'^2 (P_{1v} - Q_{1v}) - \bar{\omega}^2 \bar{\omega}' \times (P_{1v} - Q_{1v}).$$

Ha ehhez az egyenlethez hozzáadjuk a (IV⁽⁴⁾)-nek az $\bar{\omega}^2$ -szorosát, akkor csekély rendezéssel a következő relációhoz jutunk:

$$\begin{aligned} P_{\lambda\nu} + \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} (\bar{\omega}' \times P_{\lambda\nu}' + \bar{\omega}^2 P_{\lambda\nu}'') &= \\ = Q_{\lambda\nu} + \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} (\bar{\omega}' \times Q_{\lambda\nu}' + \bar{\omega}^2 Q_{\lambda\nu}'') &= C_{\lambda\nu}. \end{aligned} \quad (\text{V})$$

Ebből az egyenlethől látható, hogy $C_{\lambda\nu}$ pont független $P_{\lambda\nu}$ pontnak az 5. értelmében a

$$P_{\lambda\nu}' = Q_{\lambda\nu}' + k \bar{\omega} \times \omega' = P_{\lambda\nu}(k) \quad (6)$$

egyenesen elfoglalt helyzetétől.

A $P_{\lambda\nu}(k)$ egyenesre nézve az (V) egyenlettel definiált $C_{\lambda\nu}$ pontot a $P_{\lambda\nu}^k$ egyenes gyorsulási centrumának nevezzük.

A (4) egyenlet figyelembevételével az (V)-ből

$$(C_{\lambda\nu} - P_{\lambda\nu}) \cdot \bar{\omega}' = \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} P_{\lambda\nu}'' \cdot \bar{\omega}' = \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} P_{0\nu}'' \cdot \bar{\omega}', \quad (7)$$

következőleg a

$$c_\nu = |C_{\lambda\nu} - P_{\lambda\nu}| \cos(C_{\lambda\nu} - P_{\lambda\nu}, \bar{\omega}') = \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} |P_{\nu}''| \cos(P_{\nu}'', \bar{\omega}') \quad (\text{VI})$$

szám értéke független a λ parametertől, de független $P_{\lambda\nu}$ pontnak a $P_{\lambda\nu}(k)$ egyenesen elfoglalt helyzetétől is, a mennyiben a (6) alapján

$$(C_{\lambda\nu} - P_{\lambda\nu}) \cdot \bar{\omega}' = (C_{\lambda\nu} - Q_{\lambda\nu}) \cdot \bar{\omega}' = c_\nu |\bar{\omega}'|, \quad (\text{VI}')$$

azaz: c_ν nem más, mint a $C_{\lambda\nu}Q_{\lambda\nu}$ segmentumnak a momentán gyorsulási forgástengelyre való vetülete.

Az (V) alatt levő egyenlet alapján

$$(P_{\lambda\nu} - C_{\lambda\nu})^2 = \frac{P_{\lambda\nu}'^2}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} - \frac{\bar{\omega}'^2 P_{\lambda\nu}'' \cos^2(P_{\lambda\nu}'', \bar{\omega}')}{(\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4)^2},$$

honnan tekintettel c_ν definíciójára

$$\frac{P_{\lambda\nu}'^2}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} = \frac{c_\nu^2 \bar{\omega}'^2}{\bar{\omega}^4} + (P_{\lambda\nu} - C_{\lambda\nu})^2, \quad (\text{VII})$$

azaz:

1. $P_{\lambda\nu}(k)$ egyenesnek gyorsulási centrumától egyenlő távolságban levő pontjainak gyorsulása abszolút értékre nézve ugyanaz.

$P_{\lambda\nu}$ gyorsulását így határozzuk meg: Az (V) alatt levő egyenletből:

$$(C_{\lambda\nu} - P_{\lambda\nu}) \times \bar{\omega}' = \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} [\bar{\omega}'^2 P_{\lambda\nu}'' - (\bar{\omega}' \cdot P_{\lambda\nu}'') \bar{\omega}' + \bar{\omega}^2 (P_{\lambda\nu}'' \times \bar{\omega}')],$$

$$(C_{\lambda\nu} - P_{\lambda\nu}) \bar{\omega}^2 = \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} [\bar{\omega}^2 (\bar{\omega}' \times P_{\lambda\nu}'') + \bar{\omega}^4 P_{\lambda\nu}''];$$

ezeknek az egyenleteknek az összeadása, c_ν substitutiója s csekély rendezés a gyorsulás számára a következő formulát szolgáltatja:

$$P_{\lambda\nu}'' - \frac{c_\nu |\bar{\omega}'|}{\bar{\omega}^2} \bar{\omega}' = [\bar{\omega}' \times (P_{\lambda\nu} - C_{\lambda\nu}) - \bar{\omega}^2 (P_{\lambda\nu} - C_{\lambda\nu})]. \quad (\text{VIII})$$

Ebből a formulából skaláris négyzetreemeléssel a (VII) alatt levő képlet szintén leszarmaztatható.

A gyorsulási centrumok alkotta alakzat egyenletét így határozzuk meg:

Az elsőrendű gyorsulások alaptétele értelmében

$$P_{\lambda\nu}'' - M_{\lambda}'' = \bar{\omega}' \times (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda}) + [\bar{\omega}' \cdot (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda})] \bar{\omega} - \bar{\omega}^2 (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda}).$$

Ámde $P_{\lambda\nu} - M_{\lambda}$ merőleges $\bar{\omega}$ -ra, azért a középső tag nulla, következőleg:

$$(P_{\lambda\nu}'' - M_{\lambda}'') \times \bar{\omega}' = \bar{\omega}'^2 (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda}) - [\bar{\omega}' \cdot (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda})] \bar{\omega}' - \bar{\omega}^2 (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda}) \times \bar{\omega}',$$

$$- \bar{\omega}^2 (P_{\lambda\nu}'' - M_{\lambda}'') = - \bar{\omega}^2 \bar{\omega}' \times (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda}) + \bar{\omega}^4 (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda});$$

ezeknek az egyenleteknek összeadása s csekély rendezése a következőhöz vezet:

$$P_{\lambda\nu} + \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} (\bar{\omega}' \times P_{\lambda\nu}'' + \bar{\omega}^2 P_{\lambda\nu}'') =$$

$$= M_{\lambda} + \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} (\bar{\omega}' \times M_{\lambda}'' + \bar{\omega}^2 M_{\lambda}'') + \frac{\bar{\omega}' \cdot (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda})}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} \bar{\omega}' = C_{\lambda\nu}.$$

Ámde a (3) és (6) szerint

$$\bar{\omega}' \cdot (P_{\lambda\nu} - M_{\lambda}) = \nu \bar{\omega}' \cdot \bar{\eta},$$

következőleg az előbbi egyenletből

$$C_{\lambda\nu} = C_{\lambda 0} + \nu \frac{\bar{\omega}' \cdot \bar{\eta}}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} \bar{\omega}'. \quad (\text{IX})$$

De a (4) képlet értelmében

$$M_{\lambda}' = M_0'' + \lambda (\bar{\omega}' \times \bar{\omega}),$$

következőleg $C_{\lambda\nu}$ és M_{λ} vonatkozásából

$$C_{\lambda 0} = C_{00} + \lambda \left[\bar{\omega} + \frac{\bar{\omega}' \times (\bar{\omega}' \times \bar{\omega}) + \bar{\omega}^2 (\bar{\omega}' \times \bar{\omega})}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} \right];$$

ennélfogva, minthogy

$$C_{\lambda\nu} - C_{0\nu} = C_{\lambda 0} - C_{00};$$

$$C_{\lambda\nu} = C_{0\nu} + \lambda \left[\bar{\omega} + \frac{\bar{\omega}' \times (\bar{\omega}' \times \bar{\omega}) + \bar{\omega}^2 (\bar{\omega}' \times \bar{\omega})}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} \right]. \quad (\text{IX}')$$

A (IX) és (IX') alatt levő egyenletekből nyilvánvaló, hogy

2. A gyorsulási centrumok alakzata oly sík, melyen a

$$\nu = \text{const.}$$

és

$$\lambda = \text{const.}$$

egyenesek alkotják a parametervonalak két seregét.

Mivel az általános mozgás esetében van oly $P_{\lambda_0\nu_0}$ pont, melynek gyorsulása nulla, azért az (V) alapján

$$P_{\lambda_0\nu_0} = C_{\lambda_0\nu_0},$$

azaz:

3. Ha a $P_{\lambda_0\nu_0}(k)$ egyenes valamelyik pontjában a gyorsulás nulla, akkor erre az egyenesre ez a pont lesz a gyorsulási centrum.

A (VI) alapján, mivel c_{ν} független λ -tól,

$$c_{\nu_0} = 0,$$

$$\cos(P_{\lambda_0\nu_0}'', \bar{\omega}') = 0,$$

azaz:

4. Ha $P_{\lambda_0\nu_0}$ pontban a gyorsulás nulla, akkor a $P_{\lambda_0\nu_0}(k)$ egyenes és az $\bar{\omega}$ irány meghatározta sík pontjainak gyorsulása merőleges a momentán gyorsulási forgástengelyre.

Ugyancsak a (VI) alapján

$$(C_{\lambda\nu_0} - P_{\lambda\nu_0}) \cdot \bar{\omega}' = 0,$$

azaz

5. Ha $P_{\lambda_0\nu_0}$ pontban a gyorsulás nulla, akkor a $P_{\lambda\nu_0}(k)$ egyenesek gyorsulási centruma benne van az ezen az egyenesen átmenő $\bar{\omega}'$ -re merőleges síkban.

Végül a (VII) és (VIII) alapján kimondhatjuk a következő tételt:

6. Ha $P_{\lambda_0\nu_0}$ pontban a gyorsulás nulla, akkor a $P_{\lambda\nu_0}^{(k)}$ egyenesek pontjaira nézve a (3) tétel értelmében

$$\frac{P_{\lambda\nu_0}^{\prime 2}}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} = (P_{\lambda\nu_0} - C_{\lambda\nu_0})^2,$$

$$P_{\lambda\nu}^{\prime} = \bar{\omega}' \times (P_{\lambda\nu_0} - C_{\lambda\nu_0}) - \bar{\omega}^2 (P_{\lambda\nu_0} - C_{\lambda\nu_0}).$$

Mivel a gyorsulási centrumok között megvan a

$$C_{\lambda_0\nu_0} = P_{\lambda_0\nu_0}$$

pont is, azért ennek bevezetésével a gyorsulási centrumok felületének az egyenlete a (IX) és (IX') alkalmazásával következő alakúvá lesz:

$$C_{\lambda\nu} = P_{\lambda_0\nu_0} + (\lambda - \lambda_0) \left[\bar{\omega} + \frac{\bar{\omega}' \times (\bar{\omega}' \times \bar{\omega}) + \bar{\omega}^2 (\bar{\omega}' \times \bar{\omega})}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} \right] +$$

$$+ (\nu - \nu_0) \frac{\bar{\omega}' \cdot \bar{\eta}}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} \bar{\omega}'. \quad (\text{IX''})$$

Tárgyalásunk illusoriussá válik abban az esetben, melyben

$$\bar{\omega}' \parallel \bar{\omega}.$$

Ha ebben az esetben az M_λ -n átmenő s $\bar{\omega}$ -ra merőleges σ_λ sík tetszésszerű pontját P_λ -val jelöljük, akkor

$$(P_\lambda - M_\lambda) \cdot \bar{\omega} = (P_\lambda - M_\lambda) \cdot \bar{\omega}' = 0;$$

következőleg a (IV)-ből

$$P_\lambda' - M_\lambda'' = \bar{\omega}' \times (P_\lambda - M_\lambda) - \bar{\omega}^2 (P_\lambda - M_\lambda), \quad (\text{IV}^{(5)})$$

honnan az (V) levezetési módszerével a következő eredményt nyerjük:

$$\begin{aligned}
 P_\lambda + \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} (\bar{\omega}' \times P_\lambda'' + \bar{\omega}^2 P_\lambda'') &= \\
 = M_\lambda + \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} (\bar{\omega}' \times M_\lambda'' + \bar{\omega}^2 M_\lambda'') &= C_\lambda; \quad (V')
 \end{aligned}$$

C_λ -t a σ_λ síkon levő pontmező gyorsulási centrumának nevezzük.

$$|C_\lambda - P_\lambda| \cos(C_\lambda - P_\lambda, \bar{\omega}') = \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} |P_\lambda''| \cos(P_\lambda'' \bar{\omega}') = c, \quad (VI')$$

hol c nem más, mint a C_λ pontnak a σ_λ síktól való merőleges távolsága, ennél fogva:

7. Bármely σ_λ sík pontmezőjének gyorsulási centruma a σ_λ síktól ugyanolyan távolságra van.

Ugyanis $P_\lambda - P_0 \parallel \bar{\omega} \parallel \bar{\omega}'$ lévén, a (IV) egyenlet alapján

$$P_\lambda'' = P_0'',$$

a mi azt is elárulja, hogy:

8. Ha $\bar{\omega} \parallel \bar{\omega}'$, akkor bármely momentán forgási tengely pontjaiban ugyanaz a gyorsulás.

Ez alapon s az (V') alapján

$$C_\lambda = C_0 + \lambda \bar{\omega}.$$

Ezt a momentán forgási tengelyt nevezzük a gyorsulási centrumok egyenesének.

A 3. fejezet (II') formulája alapján, ha a C_λ -n átmenő $\bar{\omega}$ -ra merőleges sík a Mozzi-féle tengelyt M_{λ_1} pontban metszi, akkor

$$M_{\lambda_1} = C_\lambda - \frac{1}{\bar{\omega}^2} C_\lambda' \times \bar{\omega}.$$

Ha

$$c = 0,$$

akkor (VI') és (V') szerint C_λ beleesik a σ_λ síkba, tehát

$$\lambda_1 = \lambda,$$

továbbá

$$P_\lambda'' \perp \bar{\omega},$$

de akkor az 5. fejezet fejtegetései értelmében σ_λ -nak van oly

P_λ pontja, melyben a gyorsulás nulla; erre a P_λ pontra nézve az (V') ily alakot vesz fel: $P_\lambda = C_\lambda$, tehát

$$C_\lambda'' = 0;$$

megfordítva is, ha a σ_λ sík valamely pontjában a gyorsulás nulla, akkor ez a pont egybeesik C_λ -val, vagy ha P_λ'' csak egy helyen is merőleges $\bar{\omega}$ -ra, már akkor $c=0$, ennél fogva

9. Ha $\bar{\omega} \parallel \bar{\omega}'$ és egy σ_λ sík gyorsulási centruma beleesik σ_λ -ba, akkor 1. a többi gyorsulási centrum is beleesik hozzátartozó síkjába, 2. a gyorsulási centrumok tengelyének minden pontjában a gyorsulás nulla, 3. minden más pontban a gyorsulás merőleges a momentán forgási tengelyre; és megfordítva: a 2. és 3. pontban foglalt feltételek egyikének teljesülése az összes feltételek teljesülését vonja maga után.

C_λ beleesik a Mozzi-féle tengelybe, ha

$$C_\lambda' \times \bar{\omega} = 0,$$

azaz, ha

$$C_\lambda' \parallel \bar{\omega},$$

a mi a Mozzi-féle tengely definíciója alapján nyilvánvaló, tehát új tulajdonságot nem tartalmaz.

7. Feladatok.

1. *Síkmozgás.* A merev rendszer oly mozgását, melyben az egyik síkban fekvő pontok mindig ugyanabban a síkban maradnak, síkmozgásnak nevezzük.

Ha tehát az invariánsul maradó síkunk normálisát választjuk k vektorul, akkor k független lévén az időtől,

$$p = q = 0; \quad p' = q' = 0. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= rk, \\ \bar{\omega}' &= r'k, \end{aligned} \quad (2)$$

következően

$$\bar{\omega} \parallel \bar{\omega}' \parallel k. \quad (3)$$

Mivel az invariáns sík pontjaira nézve

$$k \cdot P' = k \cdot P'' = 0, \quad (4)$$

azért az előbbi fejezet jelöléseit alkalmazva:

$$c = 0, \quad M'_\lambda = 0, \quad C''_\lambda = 0,$$

következőleg az előző fejtegetések alapján felírhatjuk a következő formulákat:

$$\begin{aligned} P'_\lambda &= P'_\lambda = \bar{\omega} \times (P_\lambda - M_\lambda), \\ P'^2_0 &= P'^2_\lambda = \bar{\omega}^2 (P_\lambda - M_\lambda)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P''_0 &= P''_\lambda = \bar{\omega}' \times (P_\lambda - C_\lambda) - \bar{\omega}^2 (P_\lambda - C_\lambda), \\ P''^2_0 &= P''^2_\lambda = (\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^2) (P_\lambda - C_\lambda)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

$$C_\lambda = M_\lambda + \frac{1}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^2} (\bar{\omega}' \times M''_\lambda + \bar{\omega}^2 M''_\lambda), \quad (8)$$

$$M_\lambda = C_\lambda - \frac{1}{\bar{\omega}^2} C'_\lambda \times \bar{\omega}.$$

$$\begin{aligned} C_\lambda &= C_0 + \lambda \bar{\omega}, \\ M_\lambda &= M_0 + \lambda \bar{\omega}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$(M_\lambda - C_\lambda)^2 = \frac{1}{\bar{\omega}^2} C'^2_\lambda. \quad (10)$$

2. *Hengermozgás.* Merev rendszerünk oly mozgását, melyben egy pontsor önmagához mindig párhuzamos marad, hengermozgásnak nevezzük.

Ha az önmagával párhuzamosan eltolódó egyenessel párhuzamos egységvektort választjuk k vektorul, akkor az előbbi fejezet fejtegetéseihez hasonló módon találjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= r'k, \quad \bar{\omega}' = r'k; \\ \bar{\omega} \parallel \bar{\omega}' \parallel k; \\ P'_\lambda &= P''_\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

A jelen esetben általában

$$c \neq 0, \quad M'_\lambda \neq 0,$$

tehát az $\bar{\omega} \parallel \bar{\omega}'$ esetre az előbbi fejezetben megállapított tételek a jelen esetben is érvényesek.

3. *Gömbi mozgás.* Merev rendszerünknek oly mozgását, melyben egyik pontja nyugalomban marad, gömbi mozgásnak nevezzük.

A 3. fejezet (II') képlete értelmében a nyugalomban maradó pont a Mozzri-féle tengely pontja, ha tehát azt M_0 -val jelöljük, akkor a Mozzri-féle tengely egyenlete:

$$M_\lambda = M_0 + \lambda \bar{\omega}. \quad (12)$$

Mivel a Mozzri-féle tengelyen állandóan nyugalom van, az előbbi fejezet általános esetre vonatkozó jelöléseit megtartva

$$P'_{\lambda\nu} \perp \bar{\omega}. \quad (13)$$

Mivel

$$P_{\lambda_0\nu_0} = M_0 = P_{00},$$

azért a gyorsulási centrumok mértani helye:

$$C_{\lambda\nu} = M_0 + \lambda \left[\bar{\omega} + \frac{\bar{\omega}' \times (\bar{\omega}' \times \bar{\omega}) + \bar{\omega}^2 (\bar{\omega}' \times \bar{\omega})}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} \right] + \nu \frac{\bar{\omega} \cdot \bar{\eta}}{\bar{\omega}'^2 + \bar{\omega}^4} \bar{\omega}. \quad (14)$$

A sebességi tétel:

$$P'_{\lambda\nu} = \bar{\omega} \times (P_{\lambda\nu} - M_0). \quad (15)$$

A Mozzri-féle tengely pontjaira nézve

$$M'_\lambda = \lambda (\bar{\omega}' \times \bar{\omega}). \quad (16)$$

Ha P az M_0 ponton átmenő gyorsulási forgástengely egy pontja s a Mozzri-tengelyre való vetülete C_1 , akkor az 5. fejezet (IV'') képlete értelmében

$$P'' = \bar{\omega}^2 (C_1 - P). \quad (17)$$

Egyebekben az előbbi fejezet általános fejtegetéseiben megállapított tételek a jelen esetben is érvényesek.

Ha

$$\bar{\omega} \parallel \bar{\omega}',$$

akkor az

$$M''_0 = 0$$

következtében érvényes lesz az előbbi fejezet 9. tétele, azzal a kibővítéssel, hogy a jelen esetben a Mozzri-féle tengely s a gyorsulási centrumok tengelye egybeesik.

4. *Cyklikus mozgás.* Merev rendszerünknek oly mozgását, melyben két pontja állandóan nyugalomban marad, ciklikus mozgásnak nevezzük.

Ha a két fixponton átmenő egyenessel párhuzamos egységvektort választjuk k vektorul, akkor

$$\bar{\omega} = rk, \quad \bar{\omega}' = r'k; \quad (18)$$

$$\bar{\omega} \parallel \bar{\omega}' \parallel k;$$

$$C_\lambda = M_\lambda = M_0 + \lambda \bar{\omega}, \quad (19)$$

hol M_0 az egyik nyugalomban maradó pont.

$$C'_\lambda = M'_\lambda = C''_\lambda = M''_\lambda = 0; \quad (20)$$

$$P'_\lambda \perp \bar{\omega}, \quad P''_\lambda \perp \omega.$$

$$P'^2_\lambda = r^2 (P_\lambda - C_\lambda)^2, \quad (21)$$

$$P''^2_\lambda = (r'^2 + r^4) (P_\lambda - C_\lambda)^2.$$

Ha $r' = 0$, akkor

$$P'' = r^2 (C - P), \quad (22)$$

$$P''^2 = r^2 P'^2.$$

Ehben az esetben a ciklikus mozgást egyenletesnek mondjuk.

8. A merevrendszerrel kapcsolt pontok mozgása.

Valamely pontrendszert a merevrendszerhez kapcsoltnak mondunk, ha a merevrendszerben történő mozgása folytán beálló merevrendszerbeli relatív helyzetét a merev rendszer mozgása nem befolyásolja.

Legyen P_0 és Q_0 egy ily merevrendszerhez kapcsolt pontpár; a merevrendszerben történő mozgásuk folytán leírt pályák egyenletei legyenek rendre:

$$P_0 = P_0(s_1), \quad Q_0 = Q_0(s_0).$$

Ha a merevrendszerben mozgó pontjaink t időpontban, pályáinknak éppen $P_0(s_1)$, illetőleg $Q_0(s_0)$ pontjában vannak, akkor a t idő pillanatban beálló relatív helyzetet a

$$P_0(s_1) = Q_0(s_0) + [P_0(s_1) - Q_0(s_0)],$$

vagy a

$$P_0(s_1) = Q_0(s_0) + x\bar{e}_0 + y\bar{n}_0 + z\bar{b}_0 \quad (X)$$

egyenlet szemlélteti, hol

$$x = x(s_1, s_0), \quad y = y(s_1, s_0), \quad z = z(s_1, s_0); \quad (1)$$

és \bar{e}_0 , \bar{n}_0 , \bar{b}_0 pedig a $Q_0(s_0)$ görbére vonatkozó, már a bevezetésben definiált fundamentális mennyiségek.

Ha már most merevrendszerünk mozgása következtében $Q_0(s_0)$ pont t idő pillanatban a tér $Q(t)$ pontjával, az \bar{e}_0 , \bar{n}_0 , \bar{b}_0 vektorok pedig az $i(t)$, $j(t)$, $k(t)$ vektorokkal esnek egybe, akkor $P_0(s_1)$ a tér oly $P(t)$ pontjával esik egybe, melynek relativ helyzete a Q ponthoz és az i , j , k vektorokhoz ugyanaz, mint $P_0(s_1)$ -é $Q_0(s_0)$, \bar{e}_0 , \bar{n}_0 , \bar{b}_0 -hoz, következésképpen:

$$P = Q + xi + yj + zk, \quad (\text{XI})$$

hol x , y , z t -nek az (1) alatt levő egyenletekkel meghatározott függvényei.

A XI. egyenlet tehát a P_0 pontnak a maga abszolút mozgásával leírt pályájának egyenlete. P -nek az idő szerint vett első- és másodrendű differentiálhányadosai pedig a pont abszolút sebességét, illetőleg abszolút elsőrendű gyorsulását szolgáltatják.

Az

$$\begin{aligned} x' i + y' j + z' k &= \bar{v}, \\ x'' i + y'' j + z'' k &= \bar{a}, \end{aligned}$$

jelölések alkalmazásával s a 2. fejezet fejtegetéseinek figyelembevételével

$$P' - Q' = \bar{\omega} \times (P - Q) + \bar{v}, \quad (\text{XII})$$

$$P'' - Q'' = \bar{\omega}' \times (P - Q) + \bar{\omega} \times (P' - Q') + \bar{\omega} \times \bar{v} + \bar{a}. \quad (\text{XIII})$$

Ha $P' - Q'$ értékét az utóbbi egyenletbe behelyettesítjük, akkor a következő formulához jutunk:

$$\begin{aligned} P'' - Q'' &= \bar{\omega}' \times (P - Q) + [\bar{\omega} \cdot (P - Q)] \bar{\omega} - \bar{\omega}^2 (P - Q) + \\ &\quad + 2\bar{\omega} \times \bar{v} + \bar{a}. \end{aligned} \quad (\text{XIII})$$

Itt \bar{v} -t és \bar{a} -t P -nek Q -ra vonatkozó *relativ sebességének*, illetőleg gyorsulásának, $2\bar{\omega} \times \bar{v}$ -t CORIOLIS-féle *gyorsulásnak*, a sebesség, illetőleg gyorsulás többi, az i , j , k triplummal együttartó részét pedig *elszállító sebességnek* illetőleg *gyorsulásnak* nevezzük.

9. Feladatok.

1. *Általános sikló mozgás.* Ha \bar{M} merev rendszerünk Q_0 pontja a rendszerben helyét nem változtatja, akkor a

$$P_0(s_1) = Q_0 + x\bar{e}_0 + y\bar{n}_0 + z\bar{b}_0 \quad (1)$$

egyenletben \bar{e}_0 , \bar{n}_0 , \bar{b}_0 a merev rendszerhez kötött állandó irányú vektorok és

$$x = x(s_1), \quad y = y(s_1), \quad z = z(s_1). \quad (2)$$

Ha már most merev rendszerünk úgy mozog, hogy t időben Q_0 egybeesik a

$$Q = Q(s)$$

görbe $Q(s)$ pontjával, \bar{e}_0 pedig \bar{e} -vel, \bar{n}_0 és \bar{b}_0 pedig rendre az $\bar{n} \cos \alpha + \bar{b} \sin \alpha$ és $-\bar{n} \sin \alpha + \bar{b} \cos \alpha$ vektorokkal, tehát

$$\begin{aligned} i &= \bar{e}_0 = \bar{e}, \\ j &= \bar{n}_0 = \bar{n} \cos \alpha + \bar{b} \sin \alpha, \\ k &= \bar{b}_0 = -\bar{n} \sin \alpha + \bar{b} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

akkor merev rendszerünk mozgását általános sikló mozgásnak nevezzük. A P_0 pont pályájának egyenlete

$$P = Q + xi + yj + zk. \quad (4)$$

A pont sebességének és elsőrendű gyorsulásának meghatározására szolgáló képletekben

$$\bar{\omega} = \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) i + \frac{\sin \alpha}{\varrho} j + \frac{\cos \alpha}{\varrho} k, \quad (5)$$

vagy

$$\bar{\omega} = \left(\alpha' - \frac{1}{\tau} \right) \bar{e} + \frac{1}{\varrho} \bar{b}; \quad (5')$$

$$(x', y', z') = \left(\frac{dx}{ds_1}, \frac{dy}{ds_1}, \frac{dz}{ds_1} \right) \frac{ds_1}{dt}. \quad (6)$$

Például ha $P_0(s_1)$ az \bar{n}_0 , \bar{b}_0 síkjában levő O centrumú kör, akkor egyenlete:

$$P_0(s_1) = O + \varrho_1 \cos \frac{s_1}{\varrho_1} \bar{n}_0 + \varrho_1 \sin \frac{s_1}{\varrho_1} \bar{b}_0,$$

$Q(s)$ pedig a kör síkjára a centrumban merőleges egyenes, akkor

$$Q(s) = O + s\bar{e}_0,$$

akkor a P_0 pályájának egyenlete

$$P = O + si + \varrho_1 \cos \frac{s_1}{\varrho_1} j + \varrho_1 \sin \frac{s_1}{\varrho_1} k,$$

hol

$$\begin{aligned} i &= \bar{e}_0, \\ j &= \bar{n}_0 \cos \alpha + \bar{b}_0 \sin \alpha, \\ k &= -\bar{n}_0 \sin \alpha + \bar{b}_0 \cos \alpha. \end{aligned}$$

2. *Gördülő mozgás.* Ha merev rendszerünk P_0 pontja a rendszerben helyzetét nem változtatja, akkor

$$P_0 = Q_0 + x\bar{e}_0 + y\bar{n}_0 + z\bar{b}_0, \quad (7)$$

hol

$$x = x(s_0), \quad y = y(s_0), \quad z = z(s_0),$$

egyenletnek s_0 szerint vett differenciálhányadosa nulla, azaz

$$\left(\frac{dx}{ds_0} - \frac{y}{\varrho_0} + 1\right)\bar{e}_0 + \left(\frac{dy}{ds_0} + \frac{x}{\varrho_0} + \frac{z}{\tau_0}\right)\bar{n}_0 + \left(\frac{dz}{ds_0} - \frac{y}{\tau_0}\right)\bar{b}_0 = 0, \quad (\text{XIV})$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds_0} - \frac{y}{\varrho_0} + 1 &= 0, \\ \frac{dy}{ds_0} + \frac{x}{\varrho_0} + \frac{z}{\tau_0} &= 0, \\ \frac{dz}{ds_0} - \frac{y}{\tau_0} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{XIV'})$$

Ha már most merev rendszerünk $Q_0(s_0)$ görbéje úgy mozog a tér $Q(s)$ görbéjén, hogy azt folyton érinti, s a már érintkezésben volt ívek mindig egyenlők legyenek, akkor azt mondjuk, hogy merev rendszerünk *gördülő* mozgást végez.

Ha tehát úgy a $Q_0(s_0)$, mint a $Q(s)$ görbén a $t=0$ időnek megfelelő érintkezési ponttól számítjuk az ívhosszúságot s a t időpontban $Q_0(s_0)$, illetőleg $Q(s)$ pontban történik az érintkezés, akkor

$$s_0 = s.$$

A vektorösszefüggésekre nézve, valamint $\bar{\omega}$ értékének meghatározására a 3. és 5. alatt levő formulák a jelen esetben is érvényben maradnak, ellenben az érintkezés t időpontjára nézve:

$$x', y', z' = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \frac{ds}{dt}. \quad (8)$$

P_0 pontnak

$$P = Q + xi + yj + zk \quad (9)$$

pályáját *rulettának* nevezzük.

A

$$P' - Q' = \bar{\omega} \times (P - Q) + \bar{v}$$

egyenlet alapján

$$P' \cdot (P - Q) = Q' \cdot (P - Q) + \bar{v} \cdot (P - Q).$$

Ámde

$$Q' = \frac{ds}{dt} \bar{e} = \frac{ds}{dt} i,$$

$$Q' \cdot (P - Q) = x \frac{ds}{dt},$$

$$\bar{v} \cdot (P - Q) = \left(x \frac{ds}{ds} + y \frac{dy}{ds} + z \frac{dz}{ds} \right) \frac{ds}{dt}.$$

A (XIV') formulák alapján tehát, mivel

$$s_0 = s,$$

$$\bar{v} \cdot (P - Q) = -x \frac{ds}{dt},$$

következőleg:

$$P' \cdot (P - Q) = 0,$$

azaz: a rulettán mozgó pont sebessége mindig merőleges a mozgó pontból a gördülő görbe érintkezési pontjához vont radius-vektorra.

Például ha $Q_0(s_0)$ görbe egyenes, tehát

$$Q_0 = O + s_0 \bar{e}_0,$$

és P_0 ennek egy pontja, akkor

$$e_0^{-1} = 0; \quad y = z = 0, \quad x = -(s_0 + c),$$

következőleg P_0 pályájának egyenlete

$$P = Q - (s + c) \bar{e},$$

a mi nem más, mint O görbe evolvensse.

Ha már most Q egy tetszésszerű $P(s_1)$ görbe evolútája, tehát

$$Q = P(s_1) + \varrho_1 \bar{n}_1 + \varrho_1 \operatorname{tg} u \bar{b}_1,$$

hol

$$u = \int \frac{ds_1}{\tau_1} + c_1$$

akkor s_1 szerint differentiálva

$$\frac{d\dot{s}}{ds_1} \bar{e} = \left(\varrho'_1 + \frac{\varrho_1 \operatorname{tg} u}{\tau} \right) (\bar{n}_1 + \operatorname{tg} u \bar{b}_1),$$

tehát

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\cos u} \left(\varrho'_1 + \frac{\varrho_1 \operatorname{tg} u}{\tau_1} \right),$$

$$s + c = \frac{\varrho_1}{\cos u},$$

$$e = \cos u (\bar{n}_1 + \operatorname{tg} u \bar{b}_1),$$

következőleg

$$P = Q - (s + c) \bar{e} = P(s_1),$$

azaz: minden görbe ruletta.

Ezen az alapon aztán az előbbi fejezetnek a koordináta-rendszertől független (X) és (XI) alatt levő egyenletei a természetes geometria fundamentális egyenleteiül tekinthetők; hogy ezek mi módon tartalmazzák az egész természetes geometriát, azt más alkalommal fogom bemutatni.

3. Az általánosított gördülő mozgás. Ha az előbbi feladatban leírt mozgás föltételei közül P_0 -nak a merev rendszerben való mozdulatlanságára vonatkozót elvetjük, de a többit megtartjuk, akkor rendszerünk mozgását *általánosított gördülő mozgásnak*, P_0 pályáját pedig *általánosított rulettának* nevezzük.

Mivel a jelen esetben a (XIV) egyenlet nem érvényes, azért a ruletták alaptétele sem érvényes az általánosított rulettákra.

4. *Gördülően síkló mozgás.* Ha a két utóbbi feladatban bemutatott mozgások feltételei közül az

$$s_0 = s$$

feltételt elvetjük, de a többit megtartjuk, akkor rendszerünk mozgását *gördülően síkló mozgásnak* nevezzük.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 május 17.-én tartott üléséből.)

LÉGELEKTROMOS MEGFIGYELÉSEK KALOCSÁN.

RIEGL SÁNDOR S. J.-től.

A kalocsai főgymnasium physikatanárai körülbelül 15 esztendő óta foglalkoznak a légköri elektromosság megfigyelésével és az idevágó eredményeket időről-időre honi és külföldi szaklapokban törekedtek közzétenni. (Időjárás 1902, 1903, 1910; Atmoszféra 1903; Met. Zeitschrift 1902, 1910.) Az észleléseket azonban csak akkor kezdtük rendszeresen végezni, midőn 1909 aug. havában EBERT-féle ion-aspiratort WULF-féle elektrometerrel sikerült szereznünk. Ehhez járult 1910 februárban egy BENNDORF-féle potenciálregistrator, melynek költségeit a tudományos törekvésekért lelkesedő VÁROSSY GYULA, kalocsai érsek kegyeskedett viselni. Ez a registrator a főgymnasium egyik alkalmas termében nyert elhelyezést és 1910 április óta csekély megszakítással kifogástalanul működik. Beszerzésénél főleg az a cél lebegett szemünk előtt, hogy a magyar Alföld légelektromos viszonyairól, melyek mindeddig ismeretlenek voltak, hű képet nyerhessünk. A következő sorokban először is a Kalocsán megfigyelt évi és napi potenciálváltozásokról szándékozom értekezni, a mennyiben azok a registrator feljegyzéseiből meg voltak állapíthatók; azután pedig reátérek a pozitív és negatív ionok viszonyára, melyet másfél éven át az EBERT-féle aspirattal tanulmányoztunk nagy gonddal.

ELSŐ FEJEZET.

Légelektromos potenciálmérések Kalocsán.

Mielőtt tulajdonképeni feladatunkra reátérnénk, legyen szabad röviden azokat a műszereket ismertetni, melyek mérés-

seinknél rendelkezésünkre állottak. A BENDORF féle registrator lényegében tekintve nem egyéb, mint THOMSON-féle quadrans-elektrometer avval a módosítással, hogy a lemniskáta hosszú vékony aluminiumtűvel van ellátva, melyet elektromágneses emelő szorít perczenkint a festékszalagra. A festékszalag alatt egy óramű jelzőpapirost mozgat, melyre az aluminiumtű, midőn a kékszalagra szorul, mindenkori helyzetének megfelelő pontot ír le. Ha a lemniskáta földzárlatban van, akkor a leírt pontok egyenes egymásutánban sorakoznak a szalagon. Ez az egyenes az úgynevezett nullavonal, mely a diagramma leolvasásakor különös jelentőséggel bír. Ellenben, ha a lemniskáta töltve van, akkor a tű jobbra vagy balra tér ki a nullavonaltól a töltés előjele szerint és az egymásután leírt pontok hullámvonalat alkotnak, mely a potenciál időbeli változását híven feltünteti.

Az elektrometer segéd-töltésére 100 kis calomelelemet használtunk. Ennek alkatrészei a következők: egy köbcentimeter tiszta kéneső, mely egy kémlőcső alján foglal helyet. A kénesőre annyi calomelt öntünk, hogy felülete földve legyen. A calomel-réteg fölé 1:4 sűrűségű cinkchloridot öntünk, melybe vékony, 2 mm-es cinkpálcza merül. A cink a negatív, a kéneső a pozitív sark. A kémlőcső felső nyílására parafadugót szorítunk, melynek két fúrata van: az egyik a cinkpálczát fogadja be, a másikon egy czeruza vastagságú s kénesővel telt kémlőcsővecske vonul át, melynek aljába platinadrót van forrasztva. Ez utóbbi a pozitív sarkot alkotó kénesőbe merül. A calomelbatteria elég állandó, ha vegyileg tiszta alkatrészek állanak rendelkezésre; igen gondos kezelés mellett egy évig használható megújítás nélkül.

A légelektromosság gyűjtésére 1910- és 1911-ben polonium-elektrodot használtunk, a mely poloniummal aktivált platina-lemezből áll. A lemezt szigetelés végett borostyánkőhengerhez erősítettük. Ha az elektrodot szabad ég alá helyezzük, a polonium alfasugarai a szomszédos levegőt megionozzák, mi által a polonumelektrod a környező levegő potenciálját felveszi, melyet aztán vezetődrót segítségével a registrator lemniskátájával közlünk.

Sok gondot és fáradságot okozott a műszerek alkalmas és

ezélszerű felállítására. Ugyanis a légelektromos megfigyelések alapfeltétele az, hogy a légkör először füstmentes, másodszor pormentes legyen. A füstnek többnyire pozitív töltése van; hisz az égési gázok radio-activ hatással bírnak; azért gyárváros nem alkalmas légelektromos observatorium létesítésére. Kalocsa nem iparúzó város; 1910-ben csak egy gyártelepünk volt, a villamosági központ, a mely este felé ugyan egy-két órán át meglehetősen füsttömeget áraszt, de azok a füstfelhők csak ritkán veszik útjukat a gymnasium épülete felé, mivel a gyár a déli kültelken áll, Kalocsán pedig az északi széláramlat az uralkodó. Még a fűtési évad sem okozott komoly nehézséget. Hisz Kalocsa nagybárára csak alföldi, földszintes házakból álló nagyközség, melyből a főgymnasium épülettömbje mint egy magaspartú sziget emelkedik ki. Ennek tetején állandóan hol gyöngébb, hol erősebb széláramlat uralkodik, mely nagyobb füsttömeg vesztéglését meggátolja. Csakugyan nem is tapasztaltuk, hogy a téli fűtés a potenciálgörbére deformáló hatással lett volna.

Az elektromos mérések második ellensége a por, mely az alföldi levegőt több forró nap után mintegy telíti. S minthogy a por rendszerint negatív töltéssel bír, azért poros napokon az elektromos mező jókora deformációkat mutat fel. Jelen tanulmányban ezért csak pormentes napokat vettünk figyelembe.

Végre alapos megfontolás után meggyőződünk, hogy a registrator felállítására legalkalmasabb hely a főgymnasium tetejére épült csillagda. Ennek erkélyére 3 m hosszú, összetolható vasrúdat erősítettünk, mely a végén a poloniumelektrodot hordja. A faltól való távolság átlag másfél méter volt; de ezt a távolságot egyes esetekben a rúd összetolásával megrövidítettük. A csillagda vertikáltermének egyik ablakába 2 m magas, másfél méter széles és 1 m mély pormentes üvegszekrényt helyeztünk, melyben a registrator foglalt helyet. A kettős ablakon keresztül 2 dm hosszú, 5 cm széles és magas kénprisma volt fektetve, melynek tengelyén az elektrodhoz vonuló sodrony ment át. Később a kénprisma helyett paraffint használtunk, mert a kén külső lyukacsos felszíne nyirkos időben elvesztette szigetelő képességét. Forró nyáron azonban a paraffin használata bajos, mert a hőségben nagyon megpuhul. A szigetelés egy-

általában a légelektromos mérések legkényesebb oldala. Sok kellemetlenséget okoztak továbbá különösen a pókhálók, nevezetesen ősszel az úgynevezett bikanyál, egy ugró pók hálója, mely szeptember és október havában sűrűn röpköd a levegőben. Világos, hogy órákig tartó földzárlat támad, ha a pók finom szövete az elektrodba akad.

A registrator és az elektrod megfelelő elhelyezése után következik a második feladat: a reduktíós tényező megállapítása. Ugyanis általánosan ismert tény az, hogy a földgömböt elektromos mező környezi. A levegőnek potenciálja átlag nagyobb mint a földé és annál magasabb, minél távolabb esik a megfigyelés helye a földtől. Azt is megállapították, hogy a potenciál növekedése a szabad mezőn és mérsékelt magasságig egyenletes, lineáris. A légelektromos mező tehát homogen. E homogen elektromos mező intenzitását közmegegyezéssel az egy méternyi magasságkülönbségre eső potenciálváltozással mérik. Az összes légelektromos potenciálmérések lényege tehát abban áll, hogy két olyan pont között fennálló potenciálkülönbséget állapítsunk meg, melyek függőleges távolsága egy méter. Neve

gradiens. A gradienst a potenciálelmélet értelmében $\frac{\partial V}{\partial n}$ -nel jelöljük, hol V a potenciált, n a levegő felől a földre húzott normálist jelenti. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy ilyen gradienst csak sík földön, famentes mezőn lehet meghatározni, mert csak ilyen területen alakulnak szabályos nivófelületek. Az épület ablakában végzett mérés kisebb gradienst szokott szolgáltatni, mint az a mérés, melyet a szabad mezőn eszközölünk. Hisz a ház falai deformálják az æquipotentiális felületeket, melyek csak sík földön haladnak vízszintesen; de nagyobb tárgyak, épületek előtt tetemesen eltérnek ez iránytól, sőt a fal mentén majdnem függőlegesen felszállnak. Így érthető, hogy a légköri potenciál a fal mellett alacsonyabb, mint egy-két méterrel kijebb a faltól. Azonban az épület táján nyert adatok sem értéktelenek. A szabad mezőn nyert gradiens és az épületnél megfigyelt érték között szoros arányossági viszony létezik. Ha ezt a viszonyt egyidejű, simultan észlelésekkel megállapítottuk, módunkban áll az otthon nyert értéket a szabad

rónára átszámítani. Ez arányossági viszony neve *reductiós tényező*.

Mi a reductiós tényezőt olyformán állapítottuk meg, hogy a városon kívül, az observatoriumtól körülbelül 600 m távolságban elterülő nagy szántóföldek közepén simultan méréseket végeztünk. Ez alkalommal elektrodnak lángszívót használtunk, a potenciált WULF-féle kéthúros elektrometeren olvastuk le (mérési terjedelme 250 volt). Valahányszor otthon az elektrod elhelyezése körül valami változás történt, vagy a registrator érzékenysége némi módosítást szenvedett, újabb simultan mérést szoktunk végezni. De mivel újabb tapasztalatok szerint az évszakok változása is befolyással van a reductiós tényezőre, azért tavasszal, ősszel és télen külön összehasonlító megfigyeléseket eszközölünk.

Jelen dolgozatunk egész évet karol fel, még pedig 1910 májustól 1911 májusig. 1910 május 1.-től 27.-ig az elektrod másfél méter távolságban volt az observatorium falától. A simultan mérés szerint a reductiós tényező ez időszakban 4·8 volt. A végzett simultan észlelések száma 13. Szóval: a regisztráló papírszalagon egy-egy mm távolság a nullavonaltól 4·8 voltmétert jelent. Mivel azonban az elektrod jelen helyzetében a registrator a mérhetőség határát ismételten túllépte, kénytelenek voltunk érzékenységét csökkenteni. E célból az elektrodot hordó rúdat 50 cm-rel rövidebbre szabtuk; ezek után a reductiós tényezőt 10 simultan észlelés alapján 6·5-nek találtuk. Azonban ez a faktor csak két napra, május 27. és 28.-ára érvényes. Május 29.-én a registrator érzékenységét újból növeltük (reductiós tényező 5·5, simultan mérések száma 15). Október 15.-én 26 simultan észlelésből 5·8 adódott tényezőül. Deczember 29.-én az érzékenységet a magas téli potential miatt újból tetemesen le kellett szállítani (15 észlelés, reductiós tényező 8·7). Január 16.-án visszatértünk az előbbi helyzetre, de csak rövid időre; mert február elején a villamos feszültség ismét többször felszökött a mérhetőség határára: azért az elektrod rúdját megint egy félméterrel beljebb húztuk (reductiós tényező 7·7, simultan megfigyelések száma 15). Február 21.-én visszatértünk a régi állásba. A tavasz beálltával

a tényező kisebb lett; 30 összehasonlító mérés középértékül 4·2-et adott. Ez a tényező szerepel április 23.-a óta.

A diagrammák leolvasásakor a főkellék az, hogy a nullavonal körül kétség ne támadjon. E célból naponként kétszer, reggel és este a registratort a földdel kötöttük össze. A leolvasott értékek óráközepét úgy határoztuk meg, hogy az egész óraszámot megelőző és követő 30 perczet számtani középére egyesítettük; például 3^{ha} középértékét úgy nyerjük meg, hogy a potentialgörbének ordinátáit 2^{ha} 30^m-től 3^{ha} 30^m-ig egybevetjük. A középordinátát kezdetben CORADI-féle planiméterrel törekedtünk megállapítani. De csakhamar meggyőződünk arról, hogy ez az eljárás túlságosan körülményes és hosszadalmas. Sokkal egyszerűbben értünk célzt egy üveglappal, mely fekete és piros vonalakkal milliméteres közökre volt osztva.

Dolgozatunk adatai voltm. (voltméter)-ben vannak kifejezve és a szabad rónára redukálva.

Ezeket előre bocsátva, térjünk reá vizsgálódásunk igazi céljára. Szándékunk az, hogy a registrator nyomán kimutassuk, milyen változásoknak, milyen periodusoknak van alávetve a légelektromos potenciál Kalocsán először egy év leforgása alatt, másodszor egy 24 órás időközben. Keresnünk kell tehát először is a potenciálesésnek *évi periodusát*, mely az évszakok változásától függ; másodszor a *napi periodust*, mely 24 órás időközben ismétlődik. Mindkét esetben azonban csak oly napokat választottunk, melyeknek normális időjárásuk volt, vagyis olyanokat, melyek felhőtlenek vagy csekély felhőzetűek voltak és melyeken elektromos kisülésekre, villogásokra való hajlam nem volt tapasztalható. Egy-két esetben azonban oly napokat is vontunk tárgyalásunk körébe, melyeken szörványos cumulus- vagy cirrus-felhőzet mutatkozott, mely tapasztalat szerint az elektromos nivófelületeket nem deformálja.

1. tábla. A *potentiálesés évi periodusa*.

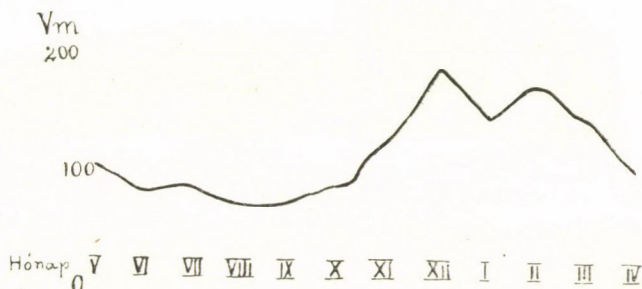
Év	Hónap	$\frac{\partial V}{\partial n}$ voltméter- ben	A használt napok száma
1910	május	111	4
"	június	85	7
"	július	87	10
"	augusztus	79	9
"	szeptember	78	5
"	október	89	7
"	november	131	2
"	december	187	1
1911	január	157	7
"	február	179	4
"	márczius	150	4
"	április	110	10
Összesen			70 nap

Az első táblázat röviden összegezi az évi periodus alkotó részeit. Ebből látjuk, hogy a periodus megállapításakor 70 napot használtunk fel, melyek az év minden szakára oszlanak el, de nem egyenletesen. Míg júliusban és április havában 10 normális napot találtunk, addig az 1910. év két utolsó hónapján az ég majdnem állandóan sűrű felhőkkel volt borítva. November havában legalább két normális, sőt valósággal ideális napunk volt (nov. 13., 14.); a decemberi jelzések között azonban egyetlen egy kifogástalan diagrammára sem akadtunk. Az első normális napra decz. 22.-én ébredtünk; de akkor a potential oly hirtelen szökött fel, hogy a registrator 24 óra alatt tizenegyszer túllépte a megmérhetőség határát. A napi középérték 187 voltméter, a mely érték bizonyosan magasabb, bár a regisztrálás minőségéből következtetve sokkal nagyobb nem lehetett. Ez utóbbi körülmény az oka annak, hogy december 22.-e is szerepel a felhasznált napok között.

A diagrammából kitetszik (1. rajz), hogy nyáron lapos minimum uralkodott. Június és július középértékei alig ütnek

el egymástól. Augusztusban a feszültség még tovább süllyedt; értéke majdnem egyezik szeptember feszültségével, mely hónapban a potenciál görbéje alsó szélső értékét éri el. Ettől kezdve a görbe gyorsan emelkedik, deczember havában éri el tetőpontját (legalább 187 voltm.), januárban leszáll, de februárban újra felszökik 179 voltméterre; innen gyorsan és állandóan süllyed. Az évi középérték e szerint 120 vm.

Ha ezt az eredményt más állomásokon nyert értékekkel összehasonlítjuk, ne téveszszük szem elől ama nagy különbséget, mely registratorral felszerelt observatorium jelentései és



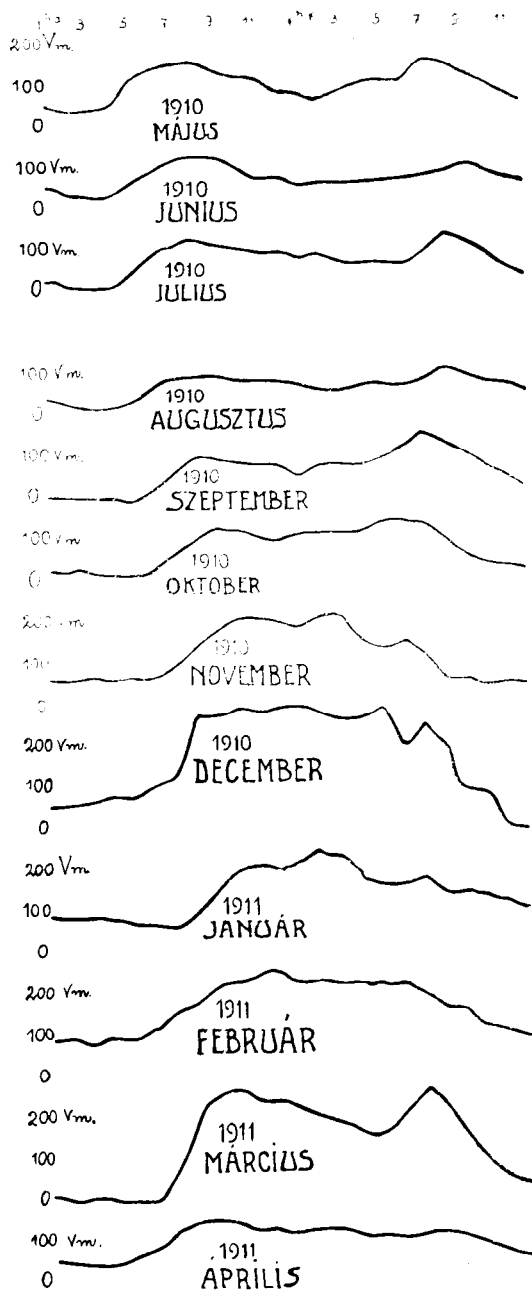
1. rajz. A légelektromos potenciál évi görbéje (1910. V.—1911. IV.)

puszta terminusmegfigyelések között van. Az utóbbi csak a napi órákat veszi figyelembe, mikor a potenciál nagyobb értéket ölt, míg a registrator a csekély feszültségű éjjeli órákat is felöleli. Világos, hogy az utóbbi középérték jóval alacsonyabb, mint az, melyet terminusmegfigyelésekből nyerünk. A registratorral dolgozó állomások között Kremsmünster évi középértéke kisebb (98 vm), azonban nagyobb mint Kalocsáé. Bamberg (125 vm), a lappföldi Karasjök (139 vm), Potsdam (242 vm). Ebből látjuk, hogy az a nézet, mely szerint a síksági potenciál nagyobb a hegyvidékinél, a kalocsai megfigyelésekben nem talál igazolást.

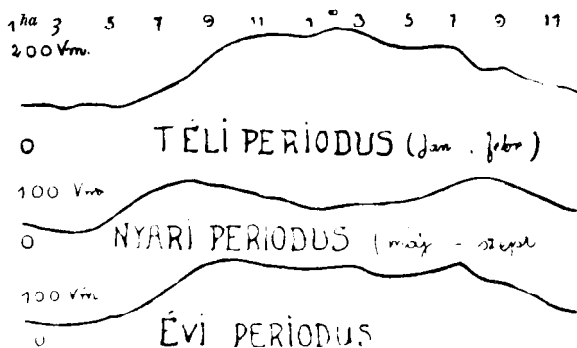
Az évi periodus lefolyása Kalocsán ugyanazt a képet nyújtja, mint egyéb középeurópai tájon. A téli maximum deczemberre esik, a nyári minimum azonban szeptemberre. Az utóbbi másutt június vagy júliusban szokott beállni, bár eltérések itt is előfordulnak, így például Potsdam (augusztus), Meiningen (május).

Óra	1910 május	június	július	augusztus	szeptember	október	november	december	1911 január	február	márczius	április	nyári V., VI., VII., VIII.	téli I., II,	Évi perio- dus
1 ^a	67	62	57	46	11	36	73	67	100	99	23	67	53	100	57
2	52	50	27	39	10	36	70	72	96	92	15	65	42	94	52
3	52	42	20	29	8	36	78	78	96	89	17	57	36	93	50
4	58	40	20	31	8	28	71	87	95	101	17	57	37	98	51
5	119	62	46	44	4	26	79	84	81	105	14	70	67	93	61
6	150	95	99	74	28	28	80	119	78	130	16	98	105	104	83
7	163	125	120	100	78	77	101	133	72	173	107	149	127	122	116
8	169	139	136	99	107	107	138	284	107	193	239	162	136	150	158
9	149	137	125	106	107	134	133	284	168	231	272	166	129	200	173
10	135	112	113	96	98	130	220	213	213	243	282	156	115	227	175
11	127	86	104	91	93	115	221	296	219	255	250	139	102	237	166
12	97	85	104	91	94	108	211	304	212	261	237	137	95	236	163
1 ⁿ	92	70	93	83	65	122	198	304	297	237	237	137	80	232	155
2	78	73	99	72	87	124	223	299	257	245	217	143	84	251	160
3	94	75	86	66	95	131	232	284	245	238	197	139	88	241	157
4	110	77	82	82	91	137	168	284	194	234	174	120	89	214	146
5	119	77	84	83	104	159	147	304	178	233	175	121	96	205	149
6	125	84	80	82	134	159	169	209	179	236	237	114	106	207	151
7	171	93	110	99	171	132	132	261	191	219	286	126	118	205	167
8	166	103	150	124	147	109	75	214	150	174	230	128	136	162	147
9	137	119	135	109	124	79	72	104	139	171	159	119	125	165	124
10	115	102	111	91	89	55	56	97	146	134	96	98	105	140	99
11	87	83	71	84	66	49	65	12	132	115	61	86	81	124	76
12	66	74	48	68	33	34	63	6	134	101	51	78	64	107	61
napok száma	4	7	10	9	5	7	2	1	7	4	4	10	30	11	70

A vastag számokkal jelölt értékek a napi maximumok.



2. rajz. A napi járás havi, évszaki és évi típusai.



A második rajzhoz tartozó kiegészítés.

Kalocsán a napi változások kétféle típust követnek, télit és nyárit. A második táblázatból és a diagrammából világosan látjuk, hogy a nyári hónapokban a főminimum átlag hajnali három órára esik; egy második kisebb minimum a kora délutáni órákban jelentkezik. Reggeli és esti nyolcz órakor két élesen kidomborodott, körülbelül egyenlő nagyságú maximum képződik. Ez a két maximum a hidegebb évszak beálltával egyre jobban közeledik egymáshoz: októberben 10^{ha} és 5^{hp}, novemberben 11^{ha} és 3^{hp}, januárban 11^{ha} és 2^{hp}; februárban, mely hónap a téli típust legtisztábban tünteti fel, csak egy maximum jelentkezik, még pedig déli tizenkettőkor. A téli hónapokat általában úgy jellemezhetjük, hogy reggeli öt órakor egy határozott minimum van, déltáján pedig egy magas értékű, de lapos maximum. Márczius potenciálgörbéje sajátos képet nyújt (2. rajz). A hullám kettős, tehát a nyári typus világosan jut érvényre; de a potenciál abszolút értékei oly magasak, mint akár a deczemberi maximumban. Az utána következő április pedig téli jelleget mutat, mert a nyári évszagnak megfelelő két maximum megint egy lapos maximummá olvadt össze; csak a potenciálérték tetemes csökkenése figyelmeztet a melegebb évszak beálltára. Ez az érdekes és mindenestre feltűnő jelenség párhuzamot talál a két hónap időjárásában. Márczius hava a szokottnál melegebb volt, míg áprilisben nagy hősültyedés állott be több napi havazással.

Ha a potenciálesést FOURIER-féle sorba fejtjük, melynek alakja:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = a_0 + a_1 \sin(A_1 + t) + a_2 \sin(A_2 + 2t) + a_3 \sin(A_3 + 3t) + \dots$$

akkor az évi periodus a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n} = & 120 + 58.3 \sin(256^\circ 32' + t) + 27.7 \sin(209^\circ 17' + 2t) \\ & + 6.9 \sin(273^\circ 56' + 3t); \\ & (t \text{ éjféltől számítandó.}) \end{aligned}$$

Kalocsának középértéke 120; tehát az évi átlagban az egyszerű hullám uralkodik, mert $a_1 > a_2$ -nél.

Másképp alakulnak a viszonyok, ha külön a nyári és külön a téli hónapokat csoportosítjuk. Májust, júniust, júliust és augusztust egybevetve a következő sort nyerjük:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n} = & 92.3 + 19.8 \sin(252^\circ 22' + t) + 36.1 \sin(231^\circ 20' + 2t) + \\ & + 5.9 \sin(359^\circ 7' + 3t); \end{aligned}$$

a_1 tehát majdnem kétszer kisebb a_2 -nél; ennélfogva nyáron a kettős hullám nyomul előtérbe.

Ha deczembert az előbb említett okokból kirekesztjük és a téli typus megszerkesztésére csak január és február hónapokat vesszük tekintetbe, akkor a téli típusra nézve áll:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n} = & 166.9 + 77.2 \sin(250^\circ 43' + t) + 13.1 \sin(150^\circ 41' + 2t) + \\ & + 7.6 \sin(12^\circ 56' + 3t). \end{aligned}$$

Ebből látjuk, hogy $a_1 > a_2$ -nél; azért télen az egyszerű hullám uralkodik.

Feltűnő, hogy Kalocsán az A_1 phasiszszög meglehetősen állandó mind a három alaknál (256, 252, 250). A_2 azonban nagyobb eltéréseket mutat.

Az eddig közzétett megfigyelésekből Potsdam hasonlító legjobban a kalocsai typushoz, noha a potenciál abszolút értéke, mint előbb említettük, jóval nagyobb. A januári megfigyelésekből megalkotott sor Potsdamra nézve így szól:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 406 + 90 \sin (178^\circ 5 + t) + 23.4 \sin (187.4 + 2t) + \\ + 9.4 \sin (186.1 + 3t).$$

A július havából leszarmaztatott nyári typus sora pedig :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 177 + 14.1 \sin (342.2 + t) + 30.9 \sin (175.7 + 2t) + \\ + 19.9 \sin (108.2 + 3t).$$

Ebből látjuk, hogy Potsdamban nyáron $a_1 < a_2$ -nél, sőt körülbelül annak fele, mint Kalocsán; télen pedig $a_1 > a_2$ -nél. Másutt, például Kremsmünsterben és Karasjökbén, nyáron is $a_1 > a_2$ -nél, más szóval az egyszerű hullám lép előtérbe még nyáron is. A London melletti Kewben pedig a_2 nyáron is, télen is nagyobb a_1 -nél; a kettős hullám tehát a napi potenciáljárásban az egész éven át uralkodik.

Összefoglalás.

A lélegektromos potenciál évi periodusa Kalocsán egyszerű hullám, melynek maximuma a megvizsgált évben december havára esett, a minimum azonban lapos természetű és majdnem egyenletesen június elejétől szeptember végéig húzódik. A potenciál évi középértéke 120 voltméter.

A potenciál napi periodusa egy egyszerű és egy kettős hullám összetétele. Télen előtérbe nyomul az egyszerű hullám, nyáron a kettős.

MÁSODIK FEJEZET.

Az ionok száma (ionmegfigyelések Kalocsán 1909 októbertől 1911 februárig).

Számos tapasztalati jelenség arra utal, hogy a légköri elektromos tűnemények főokozói a légkörben létező negatív és pozitív töltésű anyagrészecskék, az ionok. Minthogy nagyon közel fekszik a gondolat, hogy e pozitív és negatív ionoknak a lélegektromos jelenségek létrejöttében elsőrendű szerepük van, könnyen érthető, hogy újabb időben az ionok megfigyelésének különös fontosságot tulajdonítanak. Az ionok száma alatt értjük

az egy köbcm levegőben tartalmazott ionok számát. A következőkben a pozitív ionok számát n_+ , a negatív ionok számát n_- jelzéssel fogjuk megkülönböztetni.

A kísérleti meghatározásra EBERT-féle ion-aspiratort használtunk, mely a GÜNTHER és TEGETHMAYER-czégnél (Braunschweig, 1909) készült. Alkotó részei a következők: WULF-féle elektrometer, hengeres sűrítő, aspirator. A WULF-féle elektrometer két quarczfonál, melynek felületét katodsugarakkal tették vezetővé. Ha e fonálrendszert elszigeteljük és elektromossággal töltjük, akkor a két szál egymást taszítva jobbra-balra kitér. A kitérés nagyságát mikroskoppal olvassuk le. E kitűnő műszer rendkívül kényelmes, nem kényes és hétszer érzékenyebb a lemezes elektroskoppnál; érzékenység dolgában a quadrans-elektrometer és a lemezes elektroskop között foglal helyet. A hengeres sűrítő 40 cm hosszú és 3 cm átmérőjű fémcsőből áll; ennek tengelyén fémpálcza vonul keresztül, mely az elektrometer quarczszálaival vezetőleg van összekötve és oldalt egy száraz oszloppal (ELSTER- és GEIVEL-féle) tetszés szerinti potenciálra tölthető. A sűrítő külső fémcsőve a földhöz van kapcsolva és így a belső tengelymenti pálczával és a kettő között levő szigetelő léghengerrel condensatort alkot. A cső függőlegesen áll; ennek alsó végéhez más, vízszintes helyzetű cső vezet, mely a condensatort egy légturbinával köti össze. A légturbinát rugó hajtja.

A gyakorlati eljárás a következő: A turbinát a kísérlet elején a condensatortól elzárjuk. Ez azért fontos, hogy a légáram megindítása előtt a condensator feszültségét pontosan meghatározhassuk. Az elzárás után megindítjuk a turbinát és míg ez utóbbi mozgásnak indul, megtöltjük a condensator belső pálczáját bizonyos potenciálra, melyet aztán a mikroskop segítségével leolvassunk és gondosan a naplóba jegyzünk. Mihelyt a turbina kellő sebességgel forog, kinyitjuk újból a condensatort, úgy hogy a levegő a függőleges csövön át a turbina felé áramlik. A beömlő levegő elveszíti ez útjában negatív ionjait, hogyha a tengelymenti fémpálcza pozitív töltéssel bír; a pozitívokat pedig, ha a pálcza negatív töltésű volt.

A mi aspirátorunk öt és félperczig jár és ezalatt 506·8

liter levegőt szállít keresztül a turbinán. Ha az eredeti töltés vesztesége V , mely voltokban van kifejezve, akkor a veszteséget okozó negatív ionok töltését így állapíthatjuk meg:

$$E = \frac{16.9V}{300.0 \cdot 5068},$$

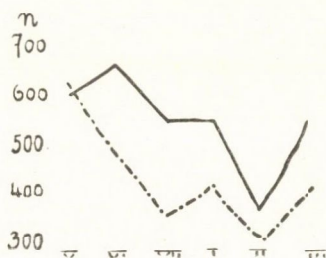
hol E a kérdéses töltés, 16.9 cm a rendszer kapacitása, $V/300$ a potenciál vesztesége elektrostatikai egységekben, 0.5068 az átszitt légquantum köbméterben kifejezve. A negatív ionok számát úgy kapjuk meg, hogy E -t, a különböztetett ionok töltését, ε -nal, azaz egy ion töltésével, az úgynevezett elemi quantummal elosztjuk. Jelen dolgozatban ε -nak a RUTHERFORD-féle értéket vettem. ($\varepsilon = 4.65 \cdot 10^{-10}$ elektrostatikai egység; kerekaszámban $4.6 \cdot 10^{-10}$ elektrostatikai egység.) Megfordítva, ha a condensatornak negatív töltést adunk, megkapjuk a pozitív ionok számát. Kalocsán az EBERT-féle aspiratorral végzett méréseivel már egy külföldi kollegám, WAGNER A., kalsburgi főgymnasiumi tanár megelőzött engem. WAGNER 1909 augusztus havában E. v. SCHWEIDLER bécsi egyetemi tanár felszólítására az ionok számának megállapításával foglalkozott. Méréseinek szép eredményei a bécsi tudományos akadémia Sitzungsberichte-jében láttak napvilágot. Kíváncsnak látszott azonban, hogy e méréseket hosszabb időszakon keresztül folytassuk. Hiszen csak úgy leszünk képesek ez érdekes tünemény lefolyásáról, változásairól, helyi és vidéki sajátosságáról, más földrajzi fekvéssel való meg egyezéséről vagy attól való eltéréséről világos fogalmat alkotni.

1909 október 8.-án kezdtem meg az ionok számának meghatározására szolgáló rendszeres méréseimet, még pedig a következő program szerint, melyet lehetőségadta következetességgel törekedtem megvalósítani. Mindennap reggel 7^h-kor egy-egy kettős mérést eszközöltem, még pedig állandóan ugyanazon a helyen. A megfigyelés helyül tágas, széles játszóteret választottam, mely észak felé teljesen nyílt, szabad volt, tehát a Kalocsán uralkodó északi szél hatása alatt állott. Nyugati és déli oldalát kisebb magasságú épület vette körül. Csak a keleti oldalon állott egyemeletes ház közvetlen a mérő-asztal mellett. Mivel a műszer szabad ég alatt volt felállítva, esős napokon

nem végezhettem mérést. A naplóba nemcsak a leolvasott értéket vettem be, hanem minden egyéb körülményt is, mely a jelenség lefolyására káros vagy kedvező hatással lehetett. A nyert adatokból az ionok számát még ugyanazon hét végén iparkodtam kiszámítani, nehogy a napló rövidített, töredékes jegyzetei feleslegesbe menjenek. Az eredményeket a legfontosabb megjegyzésekkel külön könyvbe irtam át, mely a jelen feldolgozás alapját adja. A méréseket 1910 márczius 12.-éig folytattam, midőn egy újabb hivatalra való kineveztetésem nem engedte meg többé, hogy a méréseket ugyanazon időben és helyen tovább folytassam. Másrészt módomban állott a megfigyelések fonalát sokkal kedvezőbb helyen és alkalmasabb időben újra felvenni. Ugyanis a Haynald-observatorium igazgatója, FÉNYI GYULA S. J. szíves volt a csillagdához tartozó terraszon magas fekvésű helyet bocsátani rendelkezésemre és egyáltalában törekvéseimet a legnagyobb készséggel és szívességgel támogatni. Az új mérések sorozata a régi program szerint folyt ugyan, de mert más időre, a délutáni két órára vonatkozik és az észlelések 18 méterrel magasabb állomáson végeztek, azért az előbbi megfigyelésekkel közvetlen kapcsolatba nem hozható. De teljesség kedvéért az első mérések középtékeit is kiszámítottuk; ezeket megkülönböztetésül az observatoriumi mérésektől röviden földszinti méréseknek fogjuk nevezni.

3. tábla. Az ionok számának havi változása a földszinten végzett megfigyelések szerint. (1909. X.—1910. III. reggeli 7 órákor.)

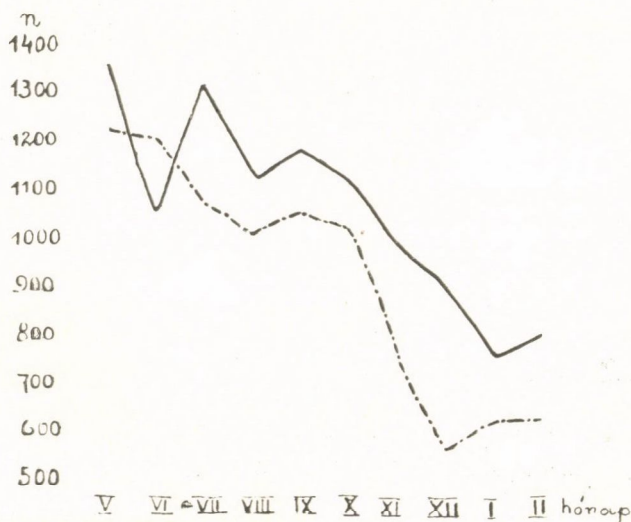
Hónap	1909 október	1909 november	1909 december	1910 január	1910 február	1910 márczius
A pozitív ionok n_1 napi közepé	609	671	551	549	373	555
A negatív ionok n_2 napi közepé	619	476	359	416	314	410
$n_1 : n_2$ hányados	0.98	1.41	1.53	1.32	1.18	1.35
Megfigyelt napok száma	21	23	17	20	16	6



3. rajz. A 3. táblázat graphikus ábrázolása (a folytonos vonal n_+ -t, a pontozott n_- -t jelent).

4. tábla. Az ionszám havi változása az observatoriumi megfigyelések szerint (1910: V.—1911 II. délutáni 2 órákor.)

Hónapok	1910 május	1910 június	1910 július	1910 augusztus	1910 szeptember	1910 október	1910 november	1910 december	1911 január	1911 február
A pozitív ionok napi közepe	1374	1076	1337	1145	1196	1135	1004	928	774	815
A negatív ionok napi közepe	1235	1219	1086	1023	1067	1040	782	581	639	645
$n_+ : n_-$	1.11	0.88	1.23	1.12	1.12	1.09	1.29	1.60	1.21	1.26
Napok száma	23	10	24	24	22	18	10	14	18	4



4. rajz. A 4. tábla graphikonja.

A 4. táblából látjuk, hogy a megfigyelések nem az egész évet, hanem csak 10 hónapot ölelnek fel. De mivel az ionok számának változását így is igen hűen tüntetik fel, azért az observatoriumi megfigyeléseket vettem alapul a jelen dolgozatban. A földszinti sorozatot csak összehasonlítás kedvéért fogjuk felemlíteni.

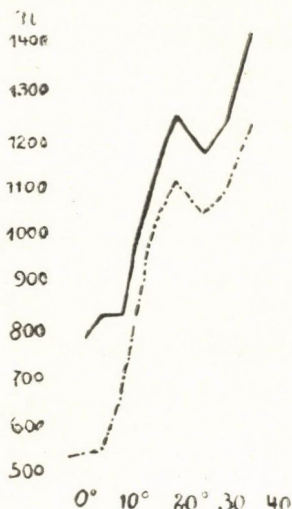
Mindenekelőtt világosan látjuk, hogy a pozitív és negatív ionok száma nyáron nagyobb, mint télen. n_+ maximuma májusra esik (1374), minimuma januárra; n_- maximumát szintén májusban éri el, minimumát pedig decemberben. n_+ évi közepe 1080, n_- -é 932; n_+ nyári közepe 1230, téli középértéke 930. n_- nyári középértéke 1126, a téli időszakban 737. Megjegyzendő, hogy szeptembert a nyári typushoz soroljuk, októbert a télihez, a mint ez a táblából és a diagrammából észrevehető és a potenciálméréseknél is megerősítést nyert. Egyúttal azt is látjuk, hogy n_+ és n_- hányadosa télen nagyobb, mint nyáron; a két ionfaj különbsége legnagyobb decemberben (1'6), legkisebb júniusban (0'88), azaz $n_+ < n_-$. Sajátságos, hogy a két ellenkező előjelű ionszám nagyon közel esik egymáshoz október havában. Ezek az adatok feltűnő párhuzamosságot találnak a 3. táblán. Az 1909 végén és 1910 elején végzett mérések azt mutatják, hogy akkor is az n_+/n_- hányados értéke legnagyobb volt decemberben (1'53), október havában pedig közel állott az egységhez. A párhuzamosság még nagyobb, ha a két sorozat megfelelő hónapjait, tehát a téli időszakot vetjük egybe egymással. Október-februárig bezárólag a középérték mindkét évben (1909/10 és 1910/11) ugyanaz: 1'28. E szép eredmény annál meglepőbb, mert nemcsak hogy különböző évekre vonatkozik, hanem mert a megfigyelés különböző helyen, magasságban és más órában történt.

Ha eredményeinket a más vidékeken történt megfigyelésekkel összehasonlítjuk, azt találjuk, hogy a Kalocsán észlelt ionszám a legnagyobbakhoz tartozik. MACHE és SCHWEIDLER 15 különböző állomás középértékét sorolja fel. Ezek között csak kettő ad magasabb értéket. Az egyik München: 0'53 elektrosztatikai egység per köbméter, a mi RUTHERFORD értékével átszámítva 1150 pozitív iont ad köbcentiméterenkint; a másik egy bajor

alpesi völgy: 0.61 elektrosztatikai egység, melynek 1330 ion felel meg. Kalocsának középértéke, a mint láttuk, n_+ 1080 és n_- 932.

A hőmérséklet és az ionok száma.

Az ionok száma és a hőmérséklet között szembeeső párhuzamosság van, a mi egyébiránt abból is gyanítható, hogy az ionok száma nyáron és egyáltalán a meleg évszakban jóval nagyobb, mint télen. A következő táblában és diagrammán az ionok számát 5 foknyi közökben csoportosítottam.



5. rajz. A hőmérséklet és az ionszám.

Az ionszám 5C-tól 20-ig állandóan növekszik. 20 és 25 között inversio áll be, melyre 25-ön túl újabb emelkedés következik. Ez a tény annál feltűnőbb, mivel a megfigyelések száma éppen e köznél a legnagyobb és így a véletlenség kizártnak látszik. Hasonló eredményhez jut: GÖCKEL (svájci Freiburgban) mérései azonban csak +10 és -10 között mozognak; továbbá SIMPSON Karasjökben, a ki az ionszám változását -20-tól +15-ig vizsgálta. Érdekes, hogy az utóbbi megfigyelő szerint n_+ 5 és 15 között nem változott. Inversióról nem tesznek említést.

5. tábla. Hőmérséklet és ionszám.

Temperatura	35°—30°	30°—25°	25°—20°	20°—15°
n_+	1428	1257	1189	1263
Megfigyelések száma	7	32	46	20
n_-	1254	1110	1061	1128
Megfigyelések száma	7	30	46	20
$n_+ : n_-$	1.14	1.17	1.12	1.12

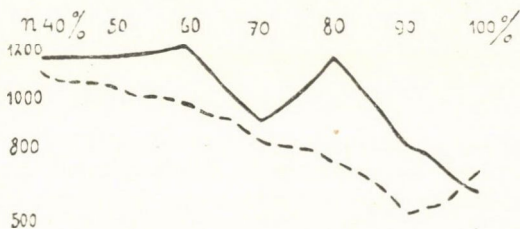
Temperatura	15°—10°	10°—5°	5°—0°	0°—5°
n_+	1131	852	852	791
Megfigyelések száma	12	13	17	10
n_-	1042	699	576	558
Megfigyelések száma	12	13	18	11
$n_+ : n_-$	1.09	1.22	1.48	1.41

Az ionok száma és a relatív nedvesség.

Sajátságos az ionok számának változása, ha azt a relatív nedvességgel hozzuk kapcsolatba, a mint az a következő táblából kiviláglik :

6. tábla. Relatív nedvesség és ionszám.

Százalék	40%-ig incl.	—50%	—60%	—70%	—80%	—90%	—100%-ig
n_+	1204	1211	1244	953	1195	848	650
Megfigyelések	24	37	42	22	11	14	7
n_-	1138	1067	1052	877	798	567	733
Megfigyelések	21	40	43	24	11	14	8
$n_+ : n_-$	1.06	1.13	1.18	1.09	1.50	1.50	1.89



6. rajz. Az ionok száma és a relatív nedvesség.

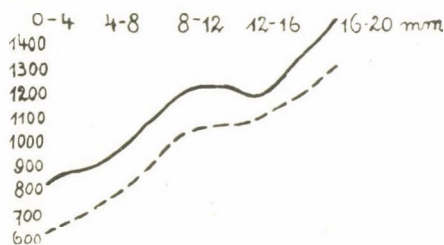
Ugyanis a pozitív ionok a százalék emelkedésével 60%-ig szaporodnak, 60%-tól 70%-ig fogynak, 70%-tól 80%-ig újból növekednek, míg végre a legmagasabb nedvességi fokokon állandóan csökkennek. Ezzel szemben a negatív ionok száma majdnem lineárisan fogy a relatív nedvesség nagyobbodásával. Érdekes, hogy a freiburgi megfigyelések (GOCKEL) hasonló eltéréseket mutatnak, sőt a negatív ionok változása még szabálytalanabb, mint a pozitívoké. SIMPSON észlelései állandó csökkenésről tesznek tanúságot. A kalocsai észlelések tehát középheletet foglalnak el GOCKEL és SIMPSON adatai között.

Az ionok száma és a párányomás.

Az ionszám átlag a párányomással nagyobbodik; a pozitív ionszámnál feltűnő kis inversio a 12—16 mm köznél, mely a negatív ionszámnál hiányzik; de az utóbbi is e köznél kevésbé meredeken emelkedik. Az n_+/n_- hányados állandóan fogy; az utolsó köznél újból emelkedik. Egyébiránt lehetséges, hogy ez az eltérés nagyobb számú megfigyelésnél elenyészik. Hisz az utolsó köznél csak 6, illetve 5 adattal rendelkezünk.

7. tábla. Párányomás és ionszám.

Párányomás	0—4 mm.	4—8 mm.	8—12 mm.	12—16 mm.	16—20 mm.
n_+	846	980	1248	1227	1551
Megfigyelések száma	17	48	64	23	6
n_-	644	808	1088	1127	1330
Megfigyelések száma	18	48	64	23	5
$n_+ : n_-$	1·31	1·21	1·14	1·08	1·17



7. rajz. Páramyomás és ionszám.

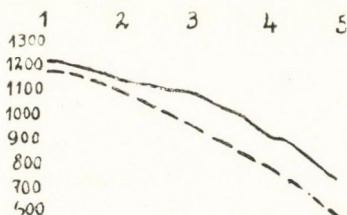
Az ionszám és a levegő átlátszósága.

ELSTER és GETTEL voltak az elsők, kik arra a feltűnő jelenségre utaltak, hogy a tisztán átlátszó levegőben a légelektromos potential kisebbedik, a légelektromos szóródás pedig nagyobbodik, s megfordítva, homályos és különösen ködös időben a potential szokatlan nagy értéket vesz fel, a szóródás azonban nagyon csekély. Minthogy az elektromos szóródás az ionszámmal szoros kapcsolatban áll, közel volt a gondolat, hogy nagy légtisztasággal nagy ionszám jár és fordítva. Ez a tétel a kalocsai mérésekkel meglepő igazolást nyer. A 8. tábla megértésére megjegyzem, hogy a levegő átlátszóságára nézve 5 fokozatot különböztetnek meg. Egyes levegőnek nevezem azt, melynél a Kalocsán látható legmesszebb fekvő hegy, a pécsvidéki *Zengő* (50 km) élesen észlelhető. Kettes levegőről szólok, ha a *Zengő* még észrevehető, de gyöngén. Hármass levegőnél a szegszárdi dombok még éppen láthatók (30 km); ez a leggyakoribb eset. Négyes levegőben a paksi dombok (15 km) éppen láthatók. Ötös levegő ködös idő, de a környék egy kilométerig áttekinthető. Hatos levegő sűrű köd vagy eső; ilyen eset azonban nem szerepel a táblán.

8. tábla. Az ionszám és a levegő átlátszósága.

A levegő átlátszósága	1	2	3	4	5
n_+ -----	1230	1182	1142	978	802
Megfigyelések száma	17	27	52	36	11
n_- -----	1207	1045	996	863	623
Megfigyelések száma	15	26	54	37	13
$n_+ : n_-$ -----	1.02	1.13	1.15	1.13	1.28

A táblából látjuk, hogy az ionok száma az átlátszóság kisebbedésével majdnem arányosan fogy; a negatív ionok száma még pontosabban hódol e törvénynek, mint a pozitívoké. Feltűnő az is, hogy nagy légtisztaságnál n_+ keveset különbözik n_- -től; minél jobban homályosodik a légkör, annál nagyobb általában a két szám különbsége.



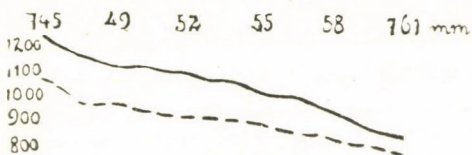
8. rajz. Az ionszám és a levegő átlátszósága.

Az ionok száma és a légnyomás.

A radio-activ jelenségek kísérleti tanulmányozása már régen utalt arra a szoros viszonyra, mely az ionok keletkezése és a légnyomás között fennáll. Minthogy az ionok változása igen sok tényezőtől függ, azért csak nagyszámú és különböző évszakokban végrehajtott megfigyelések tüntetik fel azt a kapcsolatot, mely az említett két mennyiség között van. És valóban azok között a légnyomási határok között, melyek Kalocsán uralkodók és melyekre természetesen a legtöbb mérés támaszkodik, világosan kitűnik, hogy az ionok számának csökkenésével a légnyomás emelkedése jár. Feltűnő továbbá az is, hogy a pozitív és negatív ionok viszonyszáma nem igen változik. Az n_+/n_- hányados csak a második tizedesben tér el; de még ebben is csak keveset.

9. tábla. Ionszám és légnyomás.

Barometer-állás	646—49 mm.	49—52 mm.	52—55 mm.	55—58 mm.	58—61 mm.
n_+	1257	1136	1125	1068	980
Megfigyelések száma	37	37	26	22	16
n_-	1100	992	952	940	849
Megfigyelések száma	39	36	25	22	15
$n_+ : n_-$	1·14	1·15	1·18	1·14	1·15



9. rajz. A tábla graphikonja.

Még egy más érdekes, az előbbivel látszólag ellentétben álló jelenséget figyeltek meg több helyen, ugyanis azt, hogy a légnyomás-változásoknál emelkedő légnyomás esetén az ionok száma gyarapodik, süllyedő légnyomás esetén pedig kisebbedik. Midőn adataimat e szempontból kezdtem csoportosítani, meglepetéssel láttam, hogy az emelkedések száma elenyésző csekély a süllyedésekéhez képest. Még ha a légnyomás általános jellege határozottan emelkedő volt is, a dél táján beálló depressio a barograph járását legalább stationariussá, többnyire süllyedővé tette. Ha a stationarius járást kikapcsoljuk, 9 emelkedéssel szemben van 101 süllyedés.

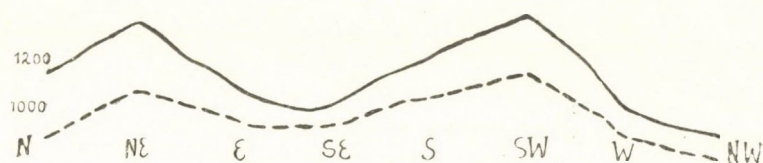
Az emelkedő barometerállásnak megfelel középértékben 1172 positiv és 875 negativ ion, a süllyedőnek 1035 positiv és 879 negativ ion. Tehát a positiv ionok száma a légnyomás emelkedésével kisebbedik. A negativ ionok száma mindkét esetben közel egyenlő.

Az ionok száma és a szélirány.

A szélirányra nézve két különböző adatsor állott rendelkezésemre: először a meteorológiai állomás megfigyelőjének becslése, ki ugyanabban az időben terminusészleléseit eszközölte, midőn az ionmérés ment véghez. A két megfigyelés egybevetése az alábbi táblát adja:

10. tábla. Ionszám és szélirány. (A met. observator becslése alapján.)

Szélirány — — —	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
n_+ — — — —	1128	1321	1068	1026	1212	1376	1002	905
Esetek száma —	31	7	7	10	24	17	28	20
n_- — — — —	894	1050	920	933	1052	1160	899	830
Esetek száma —	32	7	7	10	25	17	28	21
n_+/n_- — — —	1.26	1.26	1.16	1.10	1.15	1.19	1.11	1.09

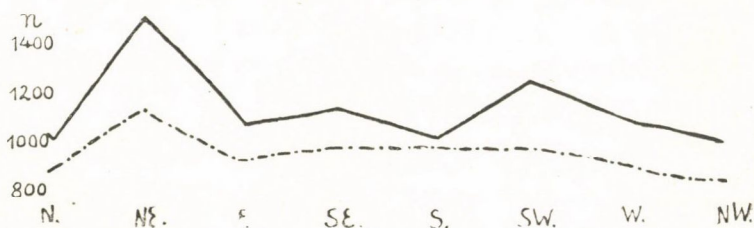


10. rajz. A 10. tábla graphikonja.

De a Haynald-observatoriumhoz tartozó meteorológiai állomás szélregistratorral is rendelkezik, melynek adatai órák-kozepekre gondosan átdolgozva az állomás levéltárában őriztetnek. Mind a két adatnak megvan a maga jelentősége és értéke. Az observator megfigyelése jobban egyezik az idővel, melyben a mérés történt; a registrator jelzése viszont mentes a becsléssel járó hibáktól, a mi különösen a szél erősségének megítélésekor fontos. A registratorral nyert eredmény a következő:

11. tábla. Szélirány és ionszám registrator szerint.

Szélirány	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
n_+	1030	1540	1114	1182	1074	1287	1119	1039
Esetek száma	22	4	15	16	18	22	25	38
n_-	913	1170	968	1022	1034	1020	950	894
Esetek száma	22	4	15	16	18	21	26	38
n_+/n_-	1.12	1.31	1.15	1.16	1.04	1.26	1.18	1.16



11. rajz. Graphikon az előbbi táblához.

Mindkét sorozat megegyezik abban, hogy az ionok maximuma délnyugati és északkeleti szél mellett áll be. A minimum

északi, illetőleg északkeleti széllel jár. A délkeleti szélre nézve a két megfigyelés némileg eltérő. Ugyanis az observator az északnyugati szélnél egy második, élesen kidomborodott minimumot jelez. A registrator pedig ugyanott kis emelkedést mutat, a megfelelő depressio a szomszédos *E*-re és *S*-re esik.

Érdekes, hogy a délkeleti szél Kalocsán száraz hűvös időt hoz, a délnyugati ellenben nedves, meleg, nyáron zivataros időjárást. Továbbá a keleti légáramlat többnyire magasabb barometerállással van összekötve, míg a délnyugati szél a depressio rendes kísérője. Azonban az előbbiekből tudjuk, hogy magas légnyomással csekély ionszám jár, alacsony légnyomás mellett viszont emelkedik az ionok mennyisége. Ennélfogva valószínűnek látszik, hogy a szélirány befolyása, legalább számos esetben, a légnyomásra vezethető vissza.

Az ionok száma és a szél erőssége.

Egyes kutatók, mint MAZZELE (Trieszt), ZÖLSS (Kremsmünster), WAGNER (Kalksburg), a szél erejének nagy jelentőséget tulajdonítanak. Azonban a kalocsai megfigyelésekből e két tényező összefüggése nem világos. A teljesség kedvéért hozzuk a megfelelő táblát.

12. tábla. Az ionok száma és a szél erőssége a registrator szerint.

A szél sebessége	3 km h	6 km h	9 km h	12 km h	15 km h
A pozitív ionok száma	1072	1161	1122	1096	1070
A megfigyelt esetek száma.....	16	28	34	30	20
A negatív ionok száma	1046	975	1006	900	1020
A megfigyelt esetek száma	16	30	32	33	20

13. tábla. *Az ionszám és a szél ereje a megfigyelő becslése szerint.*

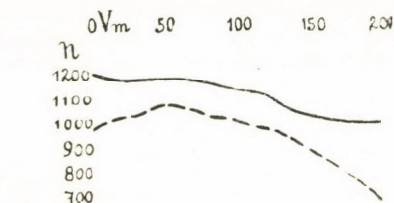
Szél erőssége	0	1	2	3	4	5
n_+	1074	1110	1081	1283	1141	963
Megfigyelések száma	11	61	57	16	11	3
n_-	1034	1017	929	940	847	997
Megfigyelések száma	11	60	58	15	12	3

Az ionok száma és a potenciálesés.

Általánosan elismert tény, hogy a potenciálesés az ionok változásával szoros viszonyban van. Ugyanis magas potenciálnak csekély ionszám felel meg; viszont alacsony potenciál mellett emelkedik az ionok száma. Erről a kalocsai megfigyelések is tanuskodnak. Az említett tapasztalati tétel méréseink szerint a pozitív ionok részére megszorítás nélkül áll; a negatív ionok tábláin kivételre bukkanunk. Ugyanis a negatív ionok 50 voltmetertől felfelé úgy csökkennek, mint a pozitív ionok. De a 0—50 voltmeternek megfelelő ionszám jóval kisebb, mint az 50—150 voltmeterig terjedő, holott annak legnagyobbakellene lennie. Meglehet, hogy e feltűnő eltérés kiegyenlítődne, ha még több észlelés történnék; mert 0—50 voltmeterig csak 16 észlelés állott rendelkezésre, míg a közvetlen utána következő, 50—100 voltmeterig terjedő csoportban még 48 adatra hivatkozhattunk.

14. tábla. *Ionszám és potenciálesés.*

$\frac{\partial V}{\partial n}$ voltmeterben	0—50 Vm.	50—100 Vm.	100—150 Vm.	150—200 Vm.	200— ∞ Vm.
n_+	1228	1210	1181	1024	1014
Megfigyelések száma	16	48	35	11	15
n_-	988	1091	1033	921	709
Megfigyelések száma	16	48	35	11	15



12. rajz. Az ionok száma és a potenciál.

Összefoglalás.

Foglaljuk össze az ionaspirátorral végzett megfigyeléseink eredményét.

1. Az ionszám télen kisebb, mint nyáron. Az egy köbcentiméterre eső pozitív ionok száma évi középértékben 1000, a negatívak középértéke 932. Az n_+/n_- hányados szintén változó mennyiség, mely télen nagyobb, nyáron kisebb. Középértéke 1.28.

2. Az ionok száma általában nagyobb, ha a légköri elektromosság potenciálja alacsony és megfordítva.

3. Nagyobb relatív nedvességnek általában kisebb ionszám felel meg; a párányomás növekedésével szaporodik az ionok száma.

4. Az ionszám majdnem lineárisan növekszik a levegő átlátszóságával.

5. Nagyobb légnyomással kisebb ionszám jár. Légnyomás-változásoknál pedig, úgy látszik, hogy növekedő barometerállás mellett az ionok száma nagyobbodik, süllyedő légnyomás mellett kisebbedik.

6. A szélirány határozott viszonyban áll az ionok szaporodásával. A szélerősség befolyása nem bizonyos.

E helyen kötelességemnek tartom köszönetet mondani ROZNOVSZKY JÁNOS S. J. kollégámnak, ki a méréseknél és megfigyeléseknél, a műszerek felállításánál, kezelésénél megbecsülhetetlen szolgálatot tett. Csak az ő áldozatkész segítségének köszönhetem, hogy e tanulmányomat sikerrel végezhettem.

EISENSTEIN TÉTELÉRŐL.

PÓLYA GYÖRGY-től.

1. A

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

hatványsor együtthatói $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ legyenek racionálisak. Azt mondom, hogy a $P(x)$ hatványsor eleget tesz az «EISENSTEIN-féle föltétel»-nek, ha létezik olyan m racionális egész szám, hogy a

$$P(mx) = a_0 + a_1mx + a_2m^2x^2 + \dots$$

hatványsor együtthatói $a_1m, a_2m^2, \dots, a_nm^n, \dots$ mind egész számok ($m \geq 0$).

Ismeretes¹ EISENSTEIN-nek nevezetes tétele, a melyet így mondhatunk ki: ha egy racionális együtthatós hatványsor algebrai függvényt állít elő, akkor szükségképpen eleget tesz az EISENSTEIN-féle föltételnek.

Igen fontos számunkra a már sokszor megtett megjegyzés: az EISENSTEIN-féle föltétel csak szükséges, de nem elégséges föltétele az előállított függvény algebrai voltának.² Dolgozatunk tárgya éppen az lesz: megmutatni, hogy az EISENSTEIN-féle föl-

¹ HEINE: Der Eisenstein'sche Satz stb. Crelles Journal, Bd. 45, S. 285—382.

² Ugyanis vannak egészszámú együtthatókkal bíró hatványsorok, melyek nem állítanak elő algebrai függvényt. Így például:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right)^2 2^{4n} k^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 k^{2n}.$$

tétel *elégseges* lesz, ha vizsgálatunk körét megszorítjuk és nem foglalkozunk tetszésszerinti hatványsorokkal, hanem csak olyanokkal, a melyek bizonyos analitikai tulajdonságokkal birnak.

Világosabban, a következő két tételről van szó:

I. Legyen $F(x)$ egy meromorph függvény és legyenek hatványsorbafejtésének együttthatói rationálisak. Hogy már most $F(x)$ algebrai meromorph függvény, azaz rationális függvény legyen, ahhoz szükséges és elégseges, hogy szóbanforgó sorbafejtése eleget tegyen az EISENSTEIN-féle föltételnek.

II. Legyen $f(z)$ egész függvény,¹ a négy szám $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tegyen eleget az egyenlőtlenségnek:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

és legyen végül $f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)$ hatványsorbafejtésének minden együttthatója rationális. Hogy $f(z)$ polynom legyen, ahhoz szükséges és elégseges, hogy $f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)$ szóbanforgó sorbafejtése eleget tegyen az EISENSTEIN-féle föltételnek.

E tételek egyik fele, a szükségesség, EISENSTEIN tételében, illetőleg annak rationális függvényekre vonatkozó triviális al- esetében foglaltatik. Második felükön, elégseges voltukon fekszik a főszű. Megjegyzem, hogy e második felük így is fogalmazható: *nem létezik olyan transcendens meromorph függvény, a melynek sorbafejtése csupa rationális egészszámú együttthatót tartalmazna — nem létezik olyan transcendens egész függvény $f(z)$, hogy $f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)$ sorbafejtése csupa rationális egészszámú együttthatót tartalmazna, ha $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.*

Az I. alatti tétel BOREL-től való,² csak fogalmazása új. A II. alatti tétel tudomásom szerint új. Ez utóbbinak kimutata- sása dolgozatomnak tulajdonképeni tárgya.

¹ A z -sík minden pontjában reguláris. Nem tévesztendő össze algebrai egész függvénnyel.

² Fonctions méromorphes, 32—38. o.

2. A II. tétel még bebizonyítandó részét céljaimra alkalmazva és kissé kiélezve így fogalmazhatom:

II'. Legyen $f(z)$ egy egész függvény és $a\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ha az

$$f\left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots$$

sorfejtésnek minden együtthatója racionális egész szám, akkor $f(z)$ polynom és $\frac{\gamma}{\delta}$ racionális egész szám.

Mindenekelőtt megjegyzem, hogyha $\delta = 0$ és $f\left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right)$ az x változó növekvő hatványai szerint kifejtendő, akkor $f(z)$ konstans. Marad csak az az eset, hogy $\delta \neq 0$. Legyen

$$f\left(\frac{\beta}{\delta} + \frac{a\delta - \beta\gamma}{\delta^2} \cdot z\right) = g(z).$$

A $g(z)$ függvény egész függvény; $g(z)$ akkor és csak akkor redukálódik polynommá, mikor $f(z)$ és

$$f\left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right) = g\left(\frac{x}{1 + \frac{\gamma}{\delta}x}\right) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots \quad (1)$$

A $g\left(\frac{x}{1 + \frac{\gamma}{\delta}x}\right)$ függvénynek csak egyetlen singuláris pontja van, tudniillik $x = -\frac{\delta}{\gamma}$. E singuláris pontnak reálisnak kell lennie, mivel az (1) alatti sorfejtés együtthatói reálisak. Meghatározok egy n egész számot, mely eleget tesz az

$$\left|\frac{\gamma}{\delta} - n\right| < 1$$

egyenlőtlenségnek. Ez mindig lehetséges, még pedig kétféleképpen, ha $\frac{\gamma}{\delta}$ nem egész szám; és csak egyféleképpen, ha $\frac{\gamma}{\delta}$ egész szám.

Be fogok hozni egy új változót, u -t, a melyet x -hez a következő egyenlet köt:

$$\frac{x}{1 + \frac{\gamma}{\delta} x} = \frac{u}{1 + \left(\frac{\gamma}{\delta} - n\right)u},$$

a miből következik, hogy

$$x = \frac{u}{1 - nu}.$$

Már most a

$$\begin{aligned} g\left(\frac{u}{1 + \left(\frac{\gamma}{\delta} - n\right)u}\right) &= c_0 + c_1 \frac{u}{1 - nu} + c_2 \left(\frac{u}{1 - nu}\right)^2 + \dots \\ &= c_0 + c_1 u + c_1 n u^2 + c_1 n^2 u^3 + \dots \\ &\quad + c_2 u^2 + c_2 2n u^3 + \dots \\ &\quad + c_3 u^3 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

függvény u növekvő hatványai szerint való kifejtéséről kettőt tudunk: egyrészt, hogy e kifejtés convergentiakörének sugara $\frac{1}{n - \frac{\gamma}{\delta}}$, tehát az egységnél nagyobb — ugyanis a kifejtett

függvény egyetlen singuláris helye $u = \frac{1}{n - \frac{\gamma}{\delta}}$, és másrészt,

hogy e sorbafejtés minden együtthatója racionális egész szám — ez pedig a (2) alatti képletből lesz világos, ha annak jobb oldalát WEIERSTRASS duplasortétele alapján u növekvő hatványai szerint rendezzük.

Ha azonban egy csupa egészszámu együtthatóval bíró hatványsor az egységkörnél nagyobb körben konvergál, akkor csak végeesszámu együtthatója lehet zérustól különböző. Ilyen módon a (2) alatti kifejtés egy polynomma redukálódik, tehát convergentiaköre végtelen:

$$\frac{1}{\left|n - \frac{\gamma}{\delta}\right|} = \infty; \quad n = \frac{\gamma}{\delta},$$

tehát

$$\left(-\frac{u}{1 + \left(\frac{\gamma}{\delta} - n \right) u} \right) = g(u) = f\left(\frac{\beta}{\delta} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2} u \right)$$

egy polynom és $f(z)$ szintén polynom, qu. e. d.¹

¹ (Megjegyzés a correctura alkalmából.) Az I. és II. alatti tételek csak speciális esetei a következő tételnek:

Legyen az $f(x)$ függvény az egész x -sikon egyértékű. Legyen továbbá $f(x)$ singuláris helyei halmazának legfeljebb egy (véges vagy végtelen) sűrűsödő helye. Legyen végül $f(x)$ hatványsorbefejtésének minden együtthatója racionális. Hogy már most $f(x)$ racionális függvény legyen, ahhoz szükséges és elégséges, hogy szóbanforgó sorbefejtése eleget tegyen az EISENSTEIN-féle föltételnek.

Ennek a sokkal általánosabb tételnek időközben talált bizonyítása a «Mathematische Annalen»-ban megjelenendő «Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten» című dolgozatomban foglaltatik. 1916 szeptember 9.-én. P. Gy.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 január 18.-án tartott üléséből.)

VIZSGÁLATOK A FOURIER-SOROKRÓL.

FEKETE MIHÁLY-tól.

Bevezetés.

FEJÉRnek egyik, immár klasszikussá vált tétele szerint az x valós változó minden valós, 2π periodusú, a $(-\pi, \pi)$ közben (korlátos, vagy véges számú helyen végtelenné váló) RIEMANN szerint integrabilis $f(x)$ függvényének FOURIER-sora elsőrendű arithmetikai közepekkel összegezhető minden »rendes» helyen, azaz minden olyan x helyen, melyre nézve a

$$\lim_{h=0} \frac{1}{2} (f(x+h) + f(x-h)) = s(x) \quad (1)$$

határérték létezik (tehát többek között minden folytonossági és elsőfajú szakadó helyen), és összege: $s(x)$. Ha tehát

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \quad (2)$$

és a sor n -edik részletösszege

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx) = s_n(x), \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

és az első n részletösszeg számtani közepe

$$\frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n} = \sigma_n(x), \quad (n=1, 2, \dots),$$

akkor

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n(x) = s(x) = \lim_{h=0} \frac{1}{2} (f(x+h) + f(x-h)) \quad (3)$$

minden x helyen, a hol a jobboldalon álló határérték létezik.

FEJÉR azt is kiderítette, hogy (3) x -ben egyenletesen áll

fenn minden olyan intervallum belső subintervallumában, melynek pontjaiban a függvény folytonos.

FEJÉR ez eredményeit LEBESGUE kiterjesztette az integrál általa adott új értelmezésének megfelelően a $(-\pi, \pi)$ közben integrálható, korlátos vagy nem korlátos, 2π periodusú függvények esetére.

Az idézett eredményeket a következőkre való tekintettel még más fogalmazásban is ki akarjuk mondani: nevezzük a fentebb jellemzett osztályba tartozó $f(x)$ függvény és FOURIER-sora n -edik részletösszegének különbségét, az $f(x) - s_n(x)$ differenciát az n -edik részletösszeg «hibájának»; akkor *minden folytonossági helyen az n első «hiba» számtani közepe $\frac{1}{n}$ -nel együtt zérushoz tart; azaz, ha x ilyen folytonossági hely, akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(x) - s_0(x)\} + \{f(x) - s_1(x)\} + \dots + \{f(x) - s_{n-1}(x)\}}{n} = 0. \quad (4)$$

(Ha x nem folytonossági, hanem elsőfajú szakadó, vagy általában «rendes» helye a függvénynek, akkor (4) igaz marad azzal a változtatással, hogy az $f(x)$ függvényérték helyett az x helyhez tartozó jobb- és baloldali határértékek számtani közepét, illetőleg az (1) szerint $s(x)$ jelölte mennyiséget kell mondanunk.) Hozzátehetjük még, hogy (4) az $f(x)$ minden folytonossági intervallumának belső subintervallumában x -ben egyenesen teljesül.

Újabban HARDY és LITTLEWOOD megmutatta,¹ hogy minden 2π periodusú $f(x)$ függvényre nézve, mely a $(-\pi, \pi)$ közben négyzetével együtt LEBESGUE szerint integrálható, minden «rendes» helyen a «hibák» négyzeteinek számtani közepe zérushoz *convergiál*, azaz, ha x ilyen hely és $s(x)$ az (1) alatt értelmezett mennyiség, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{s(x) - s_0(x)\}^2 + \{s(x) - s_1(x)\}^2 + \dots + \{s(x) - s_{n-1}(x)\}^2}{n} = 0. \quad (5)$$

¹ Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable (Comptes rendus, 28 avril, 1913.) (Tome 156, pp. 1307—1309).

Innen a SCHWARZ-féle egyenlőtlenség alkalmazásával a fortiori következik, hogy a «hibák» abszolút értékei közepének határértéke is zérussal egyenlő, tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{|s(x) - s_0(x)| + |s(x) - s_1(x)| + \dots + |s(x) - s_{n-1}(x)|}{n} = 0, \quad (6)$$

ahonnan, ismét a fortiori, következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{\{s(x) - s_0(x)\} + \{s(x) - s_1(x)\} + \dots + \{s(x) - s_{n-1}(x)\}}{n} = 0, \quad (7)$$

azaz (2) elsőrendű számtani közepekkel összegezhető és összege: $s(x)$.

HARDY és LITTLEWOOD eredményei szerint tehát a négyzetükkel együtt LEBESGUE módján integrabilis függvények FOURIER-sora «rendes» helyeken oly módon összegezhető arithmetikai közepekkel, hogy nemcsak a «hibák» középértéke, hanem a «hibák» abszolút értékeinek közepe is — limesben — zérussal egyenlő.

Nevezzük általában a

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (8)$$

végtelen sort, melyre nézve a

$$z_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

részletösszegek

$$\gamma_n = \frac{z_0 + z_1 + \dots + z_n}{n+1}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

számtani közepe n végtelenné válásakor a véges és meghatározott γ számértékhez tart, «erősen summabilis»-nak, ha nemcsak

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} (\gamma - \gamma_n) = \\ = \lim_{n=\infty} \frac{(\gamma - z_0) - (\gamma - z_1) + \dots + (\gamma - z_{n-1}) + (\gamma - z_n)}{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

hanem teljesül a következő, az előbbinél többet mondó relatio is:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|\gamma - z_0| + |\gamma - z_1| + \dots + |\gamma - z_n|}{n+1} = 0. \quad (12)$$

E műszóval élve, mondhatjuk: HARDY és LITTLEWOOD szerint a négyzetükkel együtt LEBESGUE módján integrabilis függvények FOURIER-sora minden «rendes» helyen *erősen summabilis*.

FEJÉR a FOURIER-sorok summabilitásának felfedezésével nemcsak a divergens FOURIER-sorokról derít fel eladdig nem sejtett igazságokat, hanem eredményeit a FOURIER-sorok összetartásának elméletébe vágó kérdések vizsgálatára is felhasználja.

FEJÉR példáját követjük, a midőn a jelen dolgozatban a summabilitás *erős* voltából a FOURIER-sorok convergentiájának vizsgálatával összefüggő kérdések tekintetében vonunk, talán nem érdektelen következtetéseket és általa is tárgyalt probléma megoldásához adunk kiegészítéseket.

FEJÉRnek a most jellemzett irányban folytatott kutatásai többek között arra az eredményre vezettek, hogy a RIEMANN szerint *absolut*-integrabilis, 2π periodusú függvény FOURIER-sorának részletösszegei: az

$$s_0(x), s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots$$

alkotta (általánosságban divergens!) sorozatból minden egyes folytonossági, vagy elsőfajú szakadó x helyen *kiragadható olyan*

$$s_{n_0}(x), s_{n_1}(x), s_{n_2}(x), \dots, s_{n_r}(x), \dots$$

részsorozat, mely az $f(x)$ függvényértékhez, illetőleg a jobb- és baloldali határértékek számtani közepéhez: $s(x)$ -hez convergál. Az

$$n_0, n_1, \dots, n_r, \dots$$

indexsorozat megválasztása attól függ, melyik x helyről van szó és FEJÉR vizsgálatai nem döntenek el, létezik-e olyan indexsorozat, a melyhez tartozó részletösszegek *két* helyen szolgáltatnák a kívánt convergens részsorozatot.

Mi a FOURIER-sornak a folytonossági és elsőfajú szakadó helyeken fennálló erős summabilitása alapján megmutatjuk, hogy *ilyen helyek végtelen sorozata tetszés szerint adathív, meg lehet ehhez határozni egy olyan indexsorozatot, a melyhez tartozó részletösszegek az adott végtelen sorozatba tartozó*

helyek mindegyikén a függvényértékhez, illetőleg a jobb- és baloldali határértékek számtani közepéhez konvergálnak.

Hogy ezt az eredményt, a dolgozat főeredményét a 4. §-ban megnyerhessük, az 1. és 2. §-ban részletes vizsgálat alá vesszük általánosságban az erősen summabilis sorokat és több, érdekesnek látszó sajátosságukat állapítjuk meg, melyek közül, mint számunkra különösen jelentőset, a következőt emeljük ki:

Minden erősen summabilis végtelen sor summája a részletösszegek sorozatának sűrűsödő helye, és pedig a «legvalószínűbb» az összes ilyen helyek között, ha nem az egyetlen sűrűsödő hely.

A 3. §-ban HARDY és LITTLEWOOD idézett tételének bizonyítását adjuk, lényegében az eredeti, vázlatosan publikált bizonyítás menetét követvén, azzal a lényeges kiegészítéssel, hogy (5) és (6) x -ben egyenletesen áll fenn, tehát a FOURIER-sor erős summabilitása *egyenletes* minden olyan intervallum belső subintervallumában, melynek pontjaiban a függvény folytonos.

1. §. Az erősen summabilis sorok fogalma és tulajdonságai.

1. A

$$c_0 + c_1 + \dots + c_n + \dots \quad (8)$$

végtelen sort tudvalevőleg elsőrendű számtani közepekkel összegezzük, γ summájú sornak mondjuk, ha a

$$z_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

részletösszegek

$$\gamma_n = \frac{z_0 + z_1 + \dots + z_n}{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

számtani közepe a γ -hoz konvergál, a midőn n a végtelenhez tart, vagyis, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma - \gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - z_0) + (\gamma - z_1) + \dots + (\gamma - z_n)}{n+1} = 0. \quad (11)$$

Ha a (8) sorra nézve a (11) reláción kívül a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\gamma - z_0| + |\gamma - z_1| + \dots + |\gamma - z_n|}{n+1} = 0 \quad (12)$$

egyenlőség is teljesül, akkor sorunkat *erősen summabilisnak*, ellenkező esetben *gyengén summabilisnak* mondjuk.

2. Könnyen belátható, hogy minden összetartó sor a most adott értelemben erősen summabilis; továbbá példákön megmutathatjuk, hogy a summabilis divergens sorok között vannak erősen summabilisok, és vannak olyanok, melyeknek summabilitása csak gyenge summabilitás.

Így erősen summabilis az a divergens sor, melynek z_n részletösszegei úgy vannak definiálva, hogy

$$z_n = \sqrt[3]{n}, \quad \text{ha} \quad n = \nu^3$$

és ($\nu=0, 1, 2, \dots$)

$$z_n = \frac{1}{n}, \quad \text{ha} \quad n \neq \nu^3;$$

ellenben csak gyengén summabilis a következő végtelen sor:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots; \quad (13)$$

ennek részletösszegei:

$$1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \dots,$$

summája $\frac{1}{2}$, tehát e sorra nézve:

$$\gamma - z_n = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

és így

$$\frac{|\gamma - z_0| + |\gamma - z_1| + \dots + |\gamma - z_n|}{n+1} = \frac{1}{2}, \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

tehát (12) nincs kielégítve.

3. A (13) sor példája azt mutatja, hogy egy gyengén összegezhető sor summája nem fordul elő szükségképen részletösszegeinek sűrűsödő helyei között. Ezzel szemben: *minden erősen summabilis sor summája a részletösszegek sorozatának sűrűsödő helye.*

Ugyanis a számtani közepekkel összegezhető, γ summájú, z_n , ($n=0, 1, 2, \dots$) részletösszegekkel bíró

$$c_0 + c_1 + \dots + c_n + \dots \quad (8)$$

sorra nézve a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\gamma - z_0| + \dots + |\gamma - z_n|}{n+1} = 0 \quad (12)$$

egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf |\gamma - z_n| = 0;$$

ebből következik, hogy az indexeknek alkalmasan választott, monoton végtelenhez tartó

$$n_0, n_1, n_2, \dots, n_\nu, \dots$$

sorozatához tartozó

$$z_{n_0}, z_{n_1}, z_{n_2}, \dots, z_{n_\nu}, \dots \quad (14)$$

részletösszezsorozatnak limese $\nu = \infty$ -re γ -val egyenlő.

A (14) sorozat tagjai részletösszegeit adják egy végtelen sornak, mely az eredeti $\sum_0^\infty c_n$ végtelen sorból oly módon keletkezik, hogy benne először az első n_0 , azután a következő $(n_1 - n_0), \dots$, azután a következő $(n_{\nu+1} - n_\nu)$ tagot... összevonjuk; az így keletkező, az eredetiből «zárójelzéssel» leszármaztatott

$$(c_0 + c_1 + \dots + c_{n_0}) + (c_{n_0+1} + c_{n_0+2} + \dots + c_{n_1}) + \dots + (c_{n_{\nu+1}+1} + c_{n_{\nu+1}+2} + \dots + c_{n_{\nu+1}}) + \dots$$

végtelen sor összetartó, és összege egyenlő az eredeti summájával: γ -val.

Főntebbi állításunk tehát így is fogalmazható:

I. *Minden divergens, de erősen summabilis végtelen sor alkalmas zárójelzéssel összetartóvá tehető oly módon, hogy az így nyert új sor összege megegyezik az eredeti sor summájával.*

4. Az erősen summabilis végtelen soroknak egy további, az alkalmazások szempontjából igen nevezetes tulajdonságát a következő tételben mondhatjuk ki:

II. *Jelölje g_n az erősen summabilis sor ama z_ν részletösszegeinek számát, melyeknek a sor γ summájától való eltérése: $|\gamma - z_\nu|$ a tetszőszerint adott pozitív δ számmal kisebb és a melyeknek ν indexe n -nél nem nagyobb; akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n}{n+1} = 1.$$

Más szóval: azoknak a részletösszegeknek «gyakorisága», melyek a summa δ -nyi környezetébe esnek, egyenlő az egységgel.

Bizonyítás. Legyen f_n a

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, z_n$$

részletösszegsorozat ama z , tagjainak száma, melyekre nézve

$$|r - z_v| \geq \delta;$$

akkor

$$\frac{|r - z_0| + |r - z_1| + \dots + |r - z_n|}{n+1} \geq \frac{f_n \delta}{n+1} \geq 0,$$

tehát az erősen summabilis sor esetében teljesülő (12) egyenlőség következtében

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{n+1} = 0. \quad (15)$$

Ámde

$$f_n + g_n = n+1,$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n}{n+1} = 1, \quad (16)$$

vagyis a szóban forgó gyakoriság csakugyan egyenlő az egységgel. Qu. e. d.

Láttuk, hogy a részletösszegek z_n , ($n=0, 1, 2, \dots$) sorozatának az erősen summabilis sor γ summája okvetlenül sűrűsödő helye. Ha a sor divergens, akkor γ nem az egyetlen sűrűsödő hely, de az összes sűrűsödő helyek közül ki van tüntetve a (15) és (16) egyenlőségekben kifejezésre jutó tulajdonság által. Időzzünk kissé ezeknél az egyenlőségeknél:

$\frac{g_n}{n+1}$, illetőleg $\frac{f_n}{n+1}$ annak a «valószínűségét» fejezi ki, hogy az első $n+1$ részletösszeg közül kiragadott valamelyik részletösszeg a γ -nak δ -nyi környezetébe beleesik-e, vagy nem. (16) és (15) szerint e valószínűségek határértéke 1, illetőleg 0. Ezek alapján azt mondjuk, hogy γ a részletösszegek sorozatának «legvalószínűbb» sűrűsödő helye.

5. Mint (16) egyik érdekes következményét kimondjuk a következő tételt:

III. Minden erősen summabilis sor c_r általános tagja abszolút értékének limes inferiorja 0 és ha h_n jelöli ama sor-tagok számát, melyeknek indexe $\leq n$ és a melyeknek abszolút értéke a tetszésszerint adott pozitív δ számnál kisebb, akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{n} = 1.$$

Bizonyítás: Jelölje g_n illetőleg f_n a sor

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$$

részletösszegei közül azoknak a számát, melyek az erősen summabilis sor γ summájának $\frac{\delta}{2}$ -nyi környezetébe beleesnek, illetőleg nem esnek bele; továbbá, jelölje g_n^* az első kategoriába tartozó részletösszegek közül azoknak a számát, melyeket az első kategoriába tartozó részletösszeg előz meg, végül f_n^* a második kategoriába tartozók közül azoknak a számát, melyekre az első kategoriába tartozó részletösszeg következik; akkor nyilván

$$0 \leq f_n^* \leq f_n \\ g_n^* = g_n - f_n^*;$$

ámde (15) és (16) szerint $\lim_{n=\infty} \frac{f_n}{n} = 0$, $\lim_{n=\infty} \frac{g_n}{n} = 1$, tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n^*}{n} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{g_n^*}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{g_n}{n} - \lim_{n=\infty} \frac{f_n^*}{n} = 1,$$

és, mivel

$$n+1 \geq h_n \geq g_n^*,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{h_n}{n} = 1. \quad \text{Qu. e. d.}$$

6. Az erősen summabilis soroknak néhány további tulajdonságát, melyek az I., II. és III. tételben kimondottakkal együtt előtérbe hozzák e soroknak a convergenssekkal való, a gyengén summabilisokénál teljesebb rokonságát, a következő tételekben foglaljuk össze:

IV. Ha egy erősen summabilis végtelen sorból «zárójelzés-sel» új végtelen sort készítünk oly módon, hogy rendre össze-

vonjuk $g_1, g_2, \dots, g_k, \dots$ tagját, akkor az így nyert végtelen sor erősen summabilis lesz és summája az eredetiével megegyezik, feltéve, hogy a pozitív g_k számok közös véges korlát alatt maradnak.

V. Ha egy erősen summabilis végtelen sorból új végtelen sort készítünk oly módon, hogy egyes tagjai után rendre $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ számú zérustagot iktatunk közbe, akkor az így nyert végtelen sor erősen summabilis lesz és summája az eredetiével megegyezik, feltéve, hogy a nemnegatív h_n számok közös véges korlát alatt maradnak.

VI. Egy erősen summabilis és egy összetartó végtelen sor CAUCHY-féle szorzatsora elsőrendű számtani közepekkel összegezhető.

A IV., V. és VI. tételek közül az első SIDON SIMON-tól származik; bizonyításukat, olyan sorok példájával együtt, melyek mutatják, hogy gyengén summabilis sorokra nézve nem állanak fenn szükségképen e tételek, valamint az erős és abszolút summabilitás¹ összefüggésének vizsgálatát külön dolgozatban fogjuk közzétenni.

2. §. Erősen summabilis függvénysorok.

7. Az állandó tagokból álló erősen summabilis soroknak egyik leglényegesebb sajátságát a II. tétel fejezte ki, e tétel folyományaképpen az erősen summabilis függvénysorokra nézve a következőket állíthatjuk:

VII. Legyen az x valós vagy komplex változó bizonyos tartományában értelmezett $c_n(x)$ függvények

$$c_0(x) + c_1(x) + \dots + c_n(x) + \dots$$

végtelen sora erősen summabilis egy bizonyos véges vagy végtelen H halmaz minden pontjában; azaz létezzék a H -ba tar-

¹ E fogalmat illetőleg lásd következő dolgozataimat:

1^o A széttartó végtelen sorok elméletéhez. (Math. és Természettud. Értesítő, 1911. XXIX. kötet, 719—726. l.)

2^o Vizsgálatok az abszolút summabilis sorokról, stb. (I. h. 1914. XXXII. kötet, 389—425. l.)

tozó x értékekre értelmezett $\gamma(x)$ (összeg-) függvény oly módon, hogy e halmaz minden x pontjában teljesüljön a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\gamma(x) - z_0(x)| + |\gamma(x) - z_1(x)| + \dots + |\gamma(x) - z_n(x)|}{n+1} = 0$$

egyenlőség, hol

$$z_n(x) = c_0(x) + c_1(x) + \dots + c_n(x), \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Jelölje

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

a H halmaz tetszésszerűen k pontját és $g_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_k; \delta)$ az n -nél nem nagyobb indexű $z_i(x)$ részletösszegek közül azoknak a számát, melyek e k pontra nézve a

$$|\gamma(x) - z_i(x)| < \delta$$

egyenlőtlenséget kielégítik. Bármilyen pozitív számot jelentsen is δ , fennáll a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n}{n} = 1$$

egyenlőség.

Bizonyítás: Jelölje $f_n(x_r, \delta)$, ($r=1, 2, \dots, k$) ama $z_i(x)$ részletösszegek számát, melyek az

$$i \leq n, \quad |\gamma(x_r) - z_i(x_r)| \geq \delta$$

feltételeknek megfelelnek. Akkor (15) szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x_r, \delta)}{n} = 0, \quad (r=1, 2, \dots, k).$$

Ámde

$$\begin{aligned} n+1 &\geq g_n(x_1, x_2, \dots, x_k; \delta) \geq \\ &\geq n+1 - \{f_n(x_1, \delta) + f_n(x_2, \delta) + \dots + f_n(x_k, \delta)\}, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} - \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x_1, \delta)}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x_2, \delta)}{n} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x_k, \delta)}{n} \right\}, \end{aligned}$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n}{n} = 1.$$

8. Az alkalmazások szempontjából nagyfontosságú a VII. tételnek ez a korolláriumma:

VIII. Ha a

$$c_0(x) + c_1(x) + \dots + c_n(x) + \dots$$

végteles függvénysor $\gamma(x)$ összeggel erősen summabilis az

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

végteles sorozatba tartozó összes értékekre, akkor a részletösszegeknek

$$z_0(x), z_1(x), \dots, z_n(x), \dots$$

teljes sorozatából kiragadható olyan speciális

$$z_{n_1}(x), z_{n_2}(x), \dots, z_{n_\nu}(x), \dots$$

részletsorozat, melynek tagjai ν végtelenné válásával az összes $x = x_k$, ($k=1, 2, \dots$) értékekre a végteles sor $\gamma(x)$ summájához konvergálnak.

Bizonyítás. A VII. tételből következik, hogy bárhogyan adassék is a pozitív ϱ és bárminő pozitív egész számot jelentsen is a k , a

$$|\gamma(x) - z_i(x)| < \frac{\varrho}{k}, \quad \text{ha } x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

feltétel végtelen sok i indexre nézve teljesül, vagyis ez indexek között nincs legnagyobb. Ugyanis e tétel szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(x_1, x_2, \dots, x_k; \frac{\varrho}{k})}{n} = 1,$$

ha $g_n(x_1, x_2, \dots, x_k; \frac{\varrho}{k})$ jelöli azoknak a $z_i(x)$ részletösszegeknek a számát, melyek az

9. A jelen § fejtegetéseit az «egyenletesen erősen summabilis» sorok vizsgálatával fejezzük be:

A $z_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) részletösszegekkel bíró

$$c_0(x) + c_1(x) + \dots + c_n(x) + \dots$$

függvénysorról akkor mondjuk, hogy *erős a summabilitása*, $\gamma(x)$ summával, *egyenletes a végtelen H halmazban*, ha a

$$\frac{|\gamma(x) - z_0(x)| + |\gamma(x) - z_1(x)| + \dots + |\gamma(x) - z_n(x)|}{n+1}$$

hányados e halmaz összes x pontjaira nézve egyenletesen tart a zérushoz, a midőn n végtelenné válik. Az egyenletesen erősen summabilis függvénysoroknak egy nevezetes tulajdonságát mondja ki a következő tétel:

IX. Ha a $\gamma(x)$ summájú $\sum_0^\infty c_n(x)$ függvénysor erős summabilitása egyenletes egy H halmazban, akkor a tetszésszerint adott k egész számhoz és a δ pozitív számhoz meg lehet határozni olyan n egész számot, hogy — bármiként is adassék a H halmaz k számú x_1, x_2, \dots, x_k helye — a függvénysor első $n+1$ részletösszege közül legalább egy $z_i(x)$ részletösszeg kielégítse e feltételt:

$$|\gamma(x) - z_i(x)| < \delta, \quad \text{ha } x = x_1, x_2, \dots, x_k.$$

Bizonyítás: Az erős summabilitás feltételezett egyenletessége alapján az adott k - és δ -hoz megválaszthatjuk az n számot oly módon, hogy a H halmazba tartozó minden x értékre nézve teljesüljön a

$$\frac{|\gamma(x) - z_0(x)| + \dots + |\gamma(x) - z_n(x)|}{n+1} \leq \frac{\delta}{2k} \quad (17)$$

egyenlőtlenség; azt állítjuk, hogy az így megválasztott n a-tételben megkívánt tulajdonsággal bír.

Ha ugyanis $f_n(x)$, illetőleg $g_n(x)$ jelölik a $z_i(x)$ részletösszegek közül azoknak számát, melyek az

$$i \leq n, \quad |\gamma(x) - z_i(x)| \geq \delta,$$

illetőleg az

$$i \leq n, \quad |\gamma(x) - z_i(x)| < \delta$$

feltételeket a H halmaz egy x pontjában kielégítik, akkor (17) szerint

$$\frac{f_n(x) \delta}{n+1} < \frac{\delta}{2k},$$

azaz

$$\frac{f_n(x)}{n+1} < \frac{1}{2k};$$

és mivel

$$f_n(x) + g_n(x) = n+1,$$

tehát

$$\frac{g_n(x)}{n+1} > 1 - \frac{1}{2k},$$

vagyis

$$g_n(x) > (n+1) \left(1 - \frac{1}{2k}\right). \quad (18)$$

Jelölje $l_i^{(k)}$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) az adott x_1, x_2, \dots, x_k helyek közül azoknak a számát, a melyeken az i -edik részletösszeg kielégíti a

$$|\gamma(x) - z_i(x)| < \delta \quad (19)$$

feltételt, és legyen az $l_0^{(k)}, l_1^{(k)}, \dots, l_n^{(k)}$ számok közül $l_\nu^{(k)} = \lambda_k$ a legnagyobb (vagy egyik legnagyobb) szám; akkor

$$(n+1) \lambda_k \geq g_n(x_1) + g_n(x_2) + \dots + g_n(x_k); \quad (20)$$

mert hiszen egyfelől egy-egy részletösszeg legfeljebb λ_k számú x helyen teljesítheti a (19) feltételt, másfelől egy-egy x helyen $g_n(x)$ számúra teljeseedik a feltétel. (18) és (20)-ból:

$$(n+1) \lambda_k > k(n+1) \left(1 - \frac{1}{2k}\right),$$

vagyis

$$\lambda_k > k - \frac{1}{2}.$$

Ámde nyilván

$$\lambda_k \leq k,$$

tehát

$$\lambda_k = k,$$

azaz

$$l_\nu^{(k)} = k.$$

A $z_\nu(x)$ részletösszeg ($\nu \leq n$) tehát az adott x_1, x_2, \dots, x_k helyek mindegyikén a $\gamma(x)$ summa δ -nyi környezetébe esik. Qu. e. d.

A IX. tétel korolláriuma:

IX^{bis}. Az előbbi tétel praemissái teljesítve lévén, meghatározható az $N_1, N_2, \dots, N_k, \dots$ egész számoknak olyan, monoton módon növekedő végtelen sorozata, hogy a H halmazból tetszésszerint kiragadott végtelen x_1, x_2, x_3, \dots sorozathoz megválaszthatók az $n_1 \leq N_1, N_1 \leq n_2 \leq N_2, \dots, N_{k-1} \leq n_k \leq N_k, \dots$ feltételt kielégítő $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ indexek, a melyekhez tartozó részletösszegek a tekintetbe vett sorozat pontjaiban a függvény sor summájához convergálnak.

3. §. Hardy és Littlewood tételének bebizonyítása.

10. HARDY és LITTLEWOOD tétele így hangzik:

X. Legyen az x változó 2π periodusú, $(-\pi, \pi)$ közben négyzetével együtt LEBESGUE szerint integrálabilis $f(x)$ függvényének FOURIER-SORA:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

és e sor n -edik részletösszege

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx) = s_n(x);$$

akkor minden x helyen, ahol az

$$\frac{1}{2} \lim_{h=0} (f(x+h) + f(x-h)) = s(x)$$

határérték létezik, teljesül a következő egyenlőség:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\{s(x) - s_0(x)\}^2 + \{s(x) - s_1(x)\}^2 + \dots + \{s(x) - s_n(x)\}^2}{n+1} = 0; \quad (21)$$

és ennek korolláriuma:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|s(x) - s_0(x)| + |s(x) - s_1(x)| + \dots + |s(x) - s_n(x)|}{n+1} = 0. \quad (21)$$

11. E tétel bebizonyításakor a lényeges pontokban HARDY és LITTLEWOOD eredeti bizonyítását követjük, a mely a következő, LEBESGUE-től származó tételre támaszkodik:

XI. Ha az x változó 2π periodusú, a $(-\pi, \pi)$ közben négyzetével együtt integrabilis $\varphi(x)$ függvényének FOURIER-sora:

$$\varphi(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \dots,$$

akkor

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + \beta_1^2 + a_2^2 + \beta_2^2 + \dots + a_n^2 + \beta_n^2 + \dots.$$

A XI. tétel segítségével megmutathatjuk, hogy a minden «rendes» x helyen az r pozitív, 1-nél kisebb értékeire nyilván (abszolút) convergens $\sum_{v=1}^{\infty} (s(x) - s_v(x))^2 r^{2v}$ sornak $(1-r)$ -rel való szorzata zérushoz convergál, a midőn r a pozitív számokon át 1-hez tart:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r) \sum_{v=1}^{\infty} (s(x) - s_v(x))^2 r^{2v} = 0. \quad (22)$$

(22)-ből (21) fennállását így mutathatjuk ki:

(22) egyértékű azzal az állítással, hogy tetszésszerű pozitív ε -hoz található olyan pozitív, 1-nél kisebb r_0 szám, hogy

$$(1-r) \sum_{v=1}^{\infty} (s(x) - s_v(x))^2 r^{2v} < \varepsilon, \quad \text{ha } r_0 < r < 1. \quad (23)$$

Ámde (23)-ból a fortiori következik, hogy n minden pozitív egész értékére

$$(1-r) r^{2n} \sum_{v=1}^n (s(x) - s_v(x))^2 < \varepsilon, \quad \text{ha } r_0 < r < 1,$$

ha tehát $n \geq n_0$ -ra nézve $1 - \frac{1}{n} > r_0$, akkor

$$\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \sum_{v=1}^n (s(x) - s_v(x))^2 < \varepsilon, \quad \text{ha } n \geq n_0,$$

a mi evidenter egyértékű állítás a (21)-ben foglalttal.¹

¹ Az az okoskodás, a melynek alkalmazásával HARDY és LITTLEWOOD nyomán (22)-ből (21)-et megnyertük, a következő, általános érvényű igazságra is elvezet:

Ha $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ olyan nem-negatív számok, melyeknek «generator-

12. Megmutattuk az előző pontban, hogy (22)-ből (21) következik, viszont CESÀRO idézett tétele szerint (21) fennállása (22) teljesülését involválja; tehát e két relatio egymással teljesen æquivalens.

Ennek megemlítése után rátérünk (22) bebizonyítására, illetőleg (22) helyett HARDY- és LITTLEWOOD-dal a

$$\lim a_n = 0, \quad \lim b_n = 0$$

egyenlőségek következtében vele teljesen æquivalens

$$\lim_{r=1} (1-r) \sum_{v=1}^{\infty} (s(x) - S_v(x))^2 r^{2v} = 0 \quad (24)$$

relatiót bizonyítjuk be, hol

$$\begin{aligned} S_v(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + \\ &+ a_{v-1} \cos(\nu-1)x + b_{v-1} \sin(\nu-1)x + \frac{a_v \cos \nu x + b_v \sin \nu x}{2} = \\ &= s_v(x) + \frac{a_v \cos \nu x + b_v \sin \nu x}{2} = s_v(x) + c_v(x), \end{aligned}$$

A (22) és (24) egyértékű voltát így láthatjuk be:

$$s(x) - s_v(x) = s(x) - S_v(x) + c_v(x),$$

tehát

$$(s(x) - s_v(x))^2 \leq 2(s(x) - S_v(x))^2 + 2c_v(x)^2$$

és

$$(s(x) - S_v(x))^2 \leq 2(s(x) - s_v(x))^2 + 2c_v(x)^2,$$

sora $\sum_0^{\infty} p_n x^n$ az egységkör belsejében összetartó, akkor a $\lim_{\varrho \rightarrow 1-0} (1-\varrho) \sum_0^{\infty} p_n \varrho^n = 0$ relatio mindenkor maga után vonja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_0 + p_1 + \dots + p_n}{n+1} = 0$ egyenlőség fennállását.

E tétel megfordítása CESÀRO következő tételének:

Legyen $\sum_0^{\infty} c_n x^n$ az egységkörben convergens hatványsor. Akkor $\lim_{\varrho \rightarrow 1-0} (1-\varrho) \sum_0^{\infty} c_n \varrho^n = 0$ ha és csak ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_0 + c_1 + \dots + c_n}{n+1} = 0$, hacsak a jobboldali limes létezik.

tehát

$$(1-r) \sum_{v=1}^{\infty} (s(x) - s_v(x))^2 r^{2v} \leq 2(1-r) \sum_{v=1}^{\infty} (s(x) - S_v(x))^2 r^{2v} + \\ + 2(1-r) \sum_{v=1}^{\infty} c_v(x)^2 r^{2v};$$

és

$$(1-r) \sum_{v=1}^{\infty} (s(x) - S_v(x))^2 r^{2v} \leq 2(1-r) \sum_{v=1}^{\infty} (s(x) - s_v(x))^2 r^{2v} + \\ + 2(1-r) \sum_{v=1}^{\infty} c_v(x)^2 r^{2v};$$

ámde minden x -re nézve:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} c_v(x) = 0,$$

tehát CESÀRO idézett tétele szerint:

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum_{v=1}^{\infty} c_v(x) r^{2v} = 0,$$

a miből a felírt egyenlőtlenségek alapján állításunk helyessége következik.

13. A (24) relatio bebizonyítása kedvéért foglalkozzunk a

$$\sum_1^{\infty} (s(x) - S_n(x)) r^n \sin n\vartheta \equiv \Sigma(x, r, \vartheta) \quad (25)$$

végtelen sorral, a midőn x olyan hely, a hol $s(x)$ határérték létezik, ϑ a $(-\pi, \pi)$ köz valamely helye és r az 1-nél kisebb pozitív szám; világos, hogy x , r és ϑ ez értékei mellett (25) absolut convergens, hiszen $s(x)$ véges szám és $|S_n(x)| \leq (2n+1) \cdot \text{constans}$, mivelhogy $f(x)$ FOURIER-constansai 0-hoz convergnak.

Legközelebbi célunk (25) határozott integrál alakjában való felírása. Kiindulunk a következő identitásból:

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos (n-1)t + \frac{\cos nt}{2} = \\ = \frac{1}{2} \sin nt \operatorname{ctg} \frac{t}{2};$$

ennek alapján :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t+x) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \cos t dt + \dots + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \cos (n-1) t dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \cos nt dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \sin nt \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} S_n(x) r^n \sin n\vartheta &= \frac{1}{2\pi} \sum_1^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) r^n \sin n\vartheta \sin nt \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t+x) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \left\{ \sum_1^{\infty} r^n \sin nt \sin n\vartheta \right\} dt, \end{aligned}$$

(mivel az összegezés és integrálás sorrendjének megcserélése itt nyilván megengedett művelet), vagy

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} S_n(x) r^n \sin n\vartheta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(t+x) + f(x-t)] \left\{ \sum_1^{\infty} r^n \sin nt \sin n\vartheta \right\} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{f(t+x) + f(x-t)\} h(r, t, \vartheta) dt. \quad (26) \end{aligned}$$

Ámde

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} r^n \sin nt \sin n\vartheta &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} r^n \cos n(t-\vartheta) \right] - \left[\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} r^n \cos n(t+\vartheta) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-\vartheta)+r^2} - \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t+\vartheta)+r^2} \right), \end{aligned}$$

tehát

$$h(r, t, \vartheta) = \frac{1}{4} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-\vartheta)+r^2} - \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t+\vartheta)+r^2} \right) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad (27)$$

illetőleg

$$h(r, t, \vartheta) = \frac{2(1-r^2)r \sin \vartheta \cos^2 \frac{t}{2}}{(1-2r \cos(t-\vartheta)+r^2)(1-2r \cos(t+\vartheta)+r^2)}. \quad (28)$$

A $h(r, t, \vartheta)$ «mag» (27) és (28) alatti explicit alakját felhasználva, (25) abszolút értékét akarjuk a következőkben megbecsülni:

(26)-ból $f(x) \equiv 1$ helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$\sum_1^{\infty} r^n \sin n\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2h(r, t, \vartheta) dt, \quad (29)$$

tehát

$$-\Sigma(x, r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)] h(r, t, \vartheta) dt$$

és így

$$|\Sigma(x, r, \vartheta)| \leq S_{\delta} + S,$$

a hol

$$S_{\delta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} |f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)| |h(r, t, \vartheta)| dt,$$

és

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)| |h(r, t, \vartheta)| dt.$$

Adassék már most a pozitív ε ; akkor az x -re kirovott feltétel következtében a $0 < \delta < \pi$ megszorításnak megfelelő δ kellő választása mellett

$$\varphi(t, x) \equiv |f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}, \quad \text{ha } 0 < t < \delta,$$

tehát ilyen δ -ra nézve

$$\begin{aligned} S_{\delta} &< \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} 2|h(r, t, \vartheta)| dt < \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2|h(r, t, \vartheta)| dt, \end{aligned}$$

vagyis (29) alapján (mivel $\int_0^{\pi} |h(r, t, \vartheta)| dt = \left| \int_0^{\pi} h(r, t, \vartheta) dt \right|$),

$$S_{\delta} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}} \cdot \left| \sum_1^{\infty} r^n \sin n\vartheta \right|. \quad (30)$$

Másfelől (27) alapján

$$\begin{aligned}
 S &< \frac{1}{8\pi} \int_0^\pi |f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t+\vartheta)+r^2} + \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-\vartheta)+r^2} \right\} dt \\
 &< \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cdot \frac{1}{8\pi} \int_0^\pi \varphi(t, x) \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta+t)+r^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta-t)+r^2} \right) dt \quad (31) \\
 &< \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \varphi(t, x) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta-t)+r^2} dt = \\
 &= \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta),^1
 \end{aligned}$$

a hol a_n és β_n a t változó 2π szerint periodikus, a $(-\pi, \pi)$ között négyzetével együtt integrálható

$$\varphi(t, x) \equiv |f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)|$$

függvényének FOURIER-constansait jelentik.

(30) és (31) szerint tehát minden, a

$$0 < r < 1, \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi$$

feltételt kielégítő r és ϑ értékre és az ε -hoz megválasztott δ -ra nézve fennáll, hogy

$$\begin{aligned}
 |\Sigma(x, r, \vartheta)| &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}} \left| \sum_1^\infty r^n \sin n\vartheta \right| + \\
 &+ \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \sum_0^\infty r^n (a_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta),
 \end{aligned}$$

¹ A Σ jel mellett levő vessző azt jelentse, hogy a 0 indexű tagot felezní kell.

a honnan

$$|\Sigma(x, r, \vartheta)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_1^{\infty} r^n \sin n\vartheta \right)^2 + \\ + \frac{2}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \left(\sum_0^{\infty} r^n (a_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta) \right)^2;$$

ebből $-\pi$ és π között való integrálással a XI. alapján

$$\sum_1^{\infty} (s(x) - S_n(x))^2 r^{2n} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_1^{\infty} r^{2n} + \frac{2}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \sum_0^{\infty} r^{2n} (a_n^2 + \beta_n^2), \\ < \frac{\varepsilon}{2} \sum_0^{\infty} r^{2n} + \frac{2}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \sum_0^{\infty} (a_n^2 + \beta_n^2),$$

mert $0 < r < 1$; tehát

$$(1-r) \sum_1^{\infty} \{s(x) - S_n(x)\}^2 r^{2n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2(1-r)}{\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t, x)^2 dt, \quad (32)$$

a honnan, $r_0 = r_0(\varepsilon)$ kellő választása mellett következik, hogy

$$(1-r) \sum_1^{\infty} \{s(x) - S_n(x)\}^2 r^{2n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

hacsak

$$r_0 < r < 1;$$

tehát

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum_1^{\infty} \{s(x) - S_n(x)\}^2 r^{2n} = 0. \quad (24)$$

Qu. e. d.

14. Hogy HARDY és LITTLEWOOD tételét teljes egészében bebizonyítsuk, meg kell még mutatnunk, hogy (21) a SCHWARZ-féle egyenlőtlenség segítségével mint (21) folyománya nyerhető. A SCHWARZ-féle egyenlőtlenség így hangzik:

Ha p_k és q_k nem-negatív számok, akkor

$$\sum_0^n p_k q_k \leq \sqrt{\sum_0^n p_k^2 \sum_0^n q_k^2}. \quad (33)$$

Ha p_k , illetőleg q_k gyanánt $|s(x) - s_k(x)|$, illetőleg $\frac{1}{n+1}$ véte-
tik, akkor (33) szerint

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(|s(x) - s_k(x)| \cdot \frac{1}{n+1} \right) &\leq \sqrt{\sum_{k=0}^n (s(x) - s_k(x))^2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)^2}}, \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n (s(x) - s_k(x))^2}, \end{aligned}$$

a mi valóban mutatja, hogy (21) a $(\overline{21})$ -et involválja.

15. Végezetül álljon itt HARDY és LITTLEWOOD tételének kö-
vetkező kiegészítése:

XII. A X. tétel praemissái mellett (21) x -ben egyenlete-
sen áll fenn minden olyan intervallum belső subintervallumá-
ban, a hol a függvény folytonos.

Ez állítás igazsága kitűnik abból, hogy ha (α, β) az $f(x)$
folytonossági intervallumának valamely belső subintervalluma,
akkor ehhez és a pozitív ε -hoz meghatározható $\delta < \frac{\pi}{2}$ oly mó-
don, hogy x az (α, β) bármely pontja legyen is:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= |f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)| = \\ &= |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}, \end{aligned}$$

mihelyt $0 < t < \delta$; de akkor az $\alpha \leq x \leq \beta$ feltételt kielégítő x ér-
tékekre nézve teljesül (32), azaz

$$(1-r) \sum_1^\infty \{s(x) - S_n(x)\}^2 r^{2n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2(1-r)}{\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_{-\pi}^\pi \varphi(t, x)^2 dt. \quad (32)$$

Ámde, könnyen beláthatólag, létezik olyan $K = K(\alpha, \beta)$ korlát,
hogy

$$\int_{-\pi}^\pi \varphi(t, x)^2 dt < K,$$

ha

$$\alpha \leq x \leq \beta,$$

mert, a SCHWARZ-féle egyenlőtlenség szerint:

$$\varphi(t, x)^2 \leq 3f(x+t)^2 + 3f(x-t)^2 + 12f(x)^2,$$

tehát

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t, x)^2 dt \leq 3 \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)^2 dt + 3 \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)^2 dt + \\ + 24\pi f(x)^2 < 6 \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt + 24\pi M,$$

ha M az $|f(x)|$ maximuma az (α, β) közben; tehát $r_0 = r_0(\epsilon, K)$ kellő választása mellett

$$(1-r) \sum_1^{\infty} \{s(x) - S_n(x)\}^2 r^{2n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ha

$$r_0 < r < 1,$$

barminő értéke legyen is az $\alpha \leq x \leq \beta$ feltételt kielégítő x -nek. Mas szóval a

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum_1^{\infty} (s(x) - S_n(x))^2 r^{2n} = 0 \quad (24)$$

az (α, β) köz pontjaira nézve egyenletesen teljesül; de akkor (22) és (21) is egyenletesen teljesül ez intervallumban. Qu. e. d.

A most bebizonyított állításból következik, hogy az $f(x)$ függvény minden folytonossági intervallumának belső rész-intervallumában (21) korolláriuma: (21) is x -ben egyenletesen áll fenn; tehát *minden ilyen intervallumban $f(x)$ FOURIER-sorának erős summabilitása egyenletes.*¹

4. §. A Fourier-sor erős summabilitásának következményei.

16. DU BOIS-REYMOND megmutatta olyan mindenütt folytonos és 2π szerint periodikus függvények létezését, melyeknek FOURIER-sora a $(-\pi, \pi)$ alapintervallum egy helyén, vagy e közt mindenütt sűrűn kitöltő helyeken *divergens*.

¹ HAAR megmutatta «Zur Theorie der orthogonalen Funktionen-Systeme» c. doktori értekezésében, hogy minden folytonos függvénynek az úgynevezett STURM-LIOUVILLE-féle függvények szerint való kifejtése egyenletesen összegeezhető elsőrendű számtani közepekkel és summául a függvényértéket adja; a most megnevezett függvények szerint való kifejtés és a függvény cosinus-sora közötti összefüggés alapján mondhatjuk, hogy a HAAR által vizsgált summabilitás egyenletesen erős summabilitás.

FEJÉR — mint a bevezetésben jeleztük — bebizonyította, hogy az $f(x)$ függvény FOURIER-sora minden folytonossági¹ helyen «zárójelezéssel» mégis convergens sorrá alakítható át, oly módon, hogy a nyert új sor összege a kiszemelt helyhez tartozó függvényértéket adja, ha a 2π periodusú $f(x)$ függvény a $(-\pi, \pi)$ közben *absolut*-integrabilis. Ez eredmény bebizonyítását² két felfedezésére alapítja: az egyik a FOURIER-sornak az a tulajdonsága, hogy minden folytonossági helyen elsőrendű közepekkel összegeezhető és summája a tekintetbe vett függvényértékkel egyenlő; a másik pedig az az általános sorelméleti tétel, hogy egy oscilláló divergens sor részletösszegeinek sűrűsödő helyei e részletösszegek alsó és felső ingadozási határainak intervallumát kitöltik, ha a sor általános tagja zérushoz *convergal*.

A bizonyítás lényegében a következő: egyfelől a folytonossági helyen fennálló summabilitásból eredőleg ily helyeken a sor divergentiája csak oscilláló divergentia lehet; másfelől minden *absolut integrabilis* függvény FOURIER-constansai zérushoz *convergalván*, FOURIER-soruk általános tagjáról ugyanez állítható, és így az idézett sorelméleti tétel alkalmazható; ámde a folytonossági helyhez tartozó függvényérték, mint a részletösszegek számtani közepének limese, e részletösszegek ingadozási intervallumának szükségképen belső vagy határhelye, tehát a függvényérték a részletösszegek sorozatának sűrűsödő helye, vagyis az alkalmas módon «zárójelezett» sornak a kiszemelt folytonossági helyen valóban összege.³

17. FEJÉR bizonyításából nem tűnik ki, *van-e olyan «zárójelezés»*, mely a FOURIER-sort egyszerre két kiszemelt folytonos-

¹ Elsőfajú szakadó helyen is érvényes — *mutatis mutandis* — ez az eredmény, nemkülönben e § többi, csak a folytonossági helyre nézve megfogalmazott állítása.

² FEJÉR: a) Sur la série de FOURIER (Comptes rendus, T. CXLII. 501—503. 1906). b) A FOURIER-féle sorról (Első közlemény) Math. és Természettud. Értesítő XXIV. kötet, (1906) p. 292—297.)

³ Analog tételt mondhatunk ki a $(-1, +1)$ közben négyzetükkel együtt integrabilis függvények LEGENDRE-sorára nézve olyan folytonossági helyekre vonatkozólag, melyek a $(-1, +1)$ köznek *belső* helyei.

sági helyen tenné *összetartóvá*, a megfelelő *függvényértékekkel*, *mint összegekkel*?

Mi e kérdésre a 2. és 3. § eredményei alapján igennel felelhetünk, ha a függvény a $(-\pi, \pi)$ alapintervallumban *négyzetével együtt* (LEBESGUE szerint) integrabilis; sőt lényegesen többet is mondhatunk. Ugyanis a 3. §-ban bebizonyított X. tétel szerint a szóbanforgó függvény FOURIER-sora minden folytonossági helyen a függvényértékkel, mint summával, erősen summabilis, tehát alkalmazható rá a 2. § VIII^{bis} tétele, a mi aztán kiadja a következő főeredményünket:

XIII. Ha $f(x)$ 2π periodusú, a $(-\pi, \pi)$ intervallumban *négyzetével együtt integrabilis függvény*, akkor folytonossági helyeinck tetszésszerint adott végtelen sorozatához találhatunk egy olyan zárójelezést, melylyel a függvénynek FOURIER-sorát e sorozat összes helyein *összetartóvá* tehetjük a megfelelő *függvényértékekkel*, *mint összegekkel*.

18. Egy folytonossági helyen esetleg bekövetkező divergentia módját megvilágítja a VII. tétel alkalmazásával nyert következő eredmény:

XIV. A XIII. tétel praemissáinak eleget tevő függvény FOURIER-sora a függvény valamely folytonossági helyén divergálhat, de csak olyan módon, hogy a függvényérték δ -nyi környezetébe eső részletösszegeinek gyakorisága $= 1$, bármint pozitív szám legyen is a δ .

19. A X. tételhez fűzött kiegészítő megjegyzésünk szerint a FOURIER-sor erős summabilitása minden folytonossági intervallum belső subintervallumában egyenletes, tehát ilyen intervallumokból kiragadott helyek sorozataira nézve alkalmazható a 2. § IX^{bis} tétele. A XIII. tételben foglaltaknak így nyerhető kiegészítését nem mondjuk ki tétel formájában. E helyett összevetjük FEJÉR eredményeit és e dolgozatát WEYL¹ és RIESZ FRIGYES² következő eredményével: *egy négyzetével együtt inte-*

¹ Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen schreiten. (Math. Ann. Bd. 67. S. 225—245. 1909.)

² Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. (Math. Ann. Bd. 69. S. 449—498. 1910.)

grabilis függvény FOURIER-sora alkalmas zárójelezéssel átalkítható olyan sorrá, mely a $(-\pi, \pi)$ intervallumban «lényegében-egyenletesen» a függvényértékhez konvergál. (Egy függvényt a $(-\pi, \pi)$ közben «lényegében-egyenletesen» («wesentlich-gleichmässig») konvergensnek mondunk, ha minden 2π -nél kisebb pozitív ε -hoz lehet találni egy a $(-\pi, \pi)$ intervallumba eső, $2\pi - \varepsilon$ «mértékű» H^ε halmazt oly módon, hogy a függvénysor a H_ε halmaz pontjaiban egyenletesen konvergál.) Az idézett tétel szerint a zárójelezett FOURIER-sor «majdnem mindenütt» konvergál, de e tételből egyetlen-egy előre jelzett helyre sem következik a konvergentia; ezzel szemben FEJÉR és jelen dolgozatunk bebizonyítja olyan zárójelezés existenciáját, mely mellett egy megadott helyen, vagy ilyen helyeknek egész végtelen sorozatában konvergál a FOURIER-sor.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 június 14.-én tartott üléséből.)

HURKOLT ÉS LÁNCZOLT ALGEBRAI TÉRGÖRBÉK ALGEBRAI ELŐÁLLÍTÁSÁRÓL.

Második közlemény.

SZ. NAGY GYULÁ-tól.

Az első közleményben¹ hurkolt és lánczolt algebrai térgörbék algebrai előállítása végett kiindultunk egy

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

síkbeli irreducibilis görbéből, mint a térbeli görbének derékszögű projectiójából. Erről a síkbeli görbéről az általánosság megszorítása nélkül egyszerűség kedvéért föltételezhettük, hogy ama singularis pontjai, melyek a térbeli görbe látszólagos singularis pontjainak, kereszteződési pontjainak felelnek meg, egyszerű kettőspontok. Ezeket a kettőspontokat az (1) görbénél is *kereszteződési pontoknak* neveztük, megkülönböztetésül a többi singularis pontjaitól, melyek a térbeli görbe ugyanolyanrendű singularis pontjainak felelnek meg.

Az (1) görbe kereszteződési pontjaiban megadtuk előre, hogy melyik görbeág haladjon a másik fölött és úgy akartunk meghatározni egy

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} \quad (2)$$

függvényt, a hol $\varphi(x, y)$ és $\psi(x, y)$ x és y -nak közös osztó nélküli polynomjai, hogy a kereszteződési pontokban ahhoz a görbeághoz tartozzék algebrailag nagyobb z érték, a melynek a másik fölött kell elvonulnia.

¹ Math. és Természettud. Értesítő. XXXIII. kötet, p. 500—506. 1915.

A z függvény meghatározása végett a $\varphi = 0$ és $\psi = 0$ görbéket az (1) görbe kereszteződési pontjain és bizonyos számú más pontján keresztülvezettük s azonkívül úgy választottuk meg, hogy koefficienseik bizonyos egyenletrendszernek eleget tegyenek.

Ez a módszer a maga általánosságában még bizonyos kiegészítésre szorul. Nevezetesen vizsgálat alá kell vennünk az előállított térbeli görbe végtelen távoli pontjait is és ki kell mutatnunk, hogy a φ és ψ meghatározására fölhasznált egyenletrendszer megoldható.

Ebben a dolgozatban az első közleményben adott algebrai módszer helyett egy új módszert fogunk adni projectiójában topologikailag teljesen meghatározott algebrai térgörbék algebrai előállítására. Ez a módszer a mellett, hogy sokkal egyszerűbb, mint az első közleményben megadott, egyszersmind a kívánt kiegészítéseket is megadja.

1. §. Egy térbeli algebrai görbe topologikus jellemzése projectiójának végeesszámú pontjában.

Legyen

$$f(x, y) = 0$$

egy olyan irreducibilis algebrai síkgörbe, a melyent az (1) egyenlettel jellemeztünk. Nevezzük a következőkben ezt a görbét C görbének, a C görbe síkját Σ síknak és egy olyan algebrai térgörbét, melynek a C görbe derékszögű projectiója, G görbének.

A C görbéről föltételezzük, hogy kereszteződési pontjai egyszerű kettőspontok és hogy végtelen távoli reális pontjai egyszerűek és asymptotáik különböznek a végtelen távoli egyenestől. Föltételezzük továbbá, hogy a G görbének a Σ síktól végtelen távollevő reális pontjainak projectiói a C görbének mind végesben fekvő egyszerű pontjai. A C görbe ilyen pontjait pólusoknak fogjuk nevezni.

Ezek a föltevések, miként a következő fejtegetésekből ki fog tűnni, kényelmesek, de nem okvetlenül szükségesek.

Legyen a C görbe kereszteződési pontjainak száma k . Minden egyes kereszteződési pontban jelöljük meg tetszésszerint az

egyik görbeágat, a *felső*t $+$, a másikat, az *alsó* görbeágat — előjellel.

A felső és alsó elnevezések pontos értelmezése végett vegyük föl a Σ síkra merőleges z tengelyt és állapítsuk meg rajta a pozitív haladás irányát. A C görbe egy kereszteződési pontjában emelt merőleges a térbeli görbét két pontban metszi, melyek közül azt nevezzük alsónak, a melytől a másik pontig a merőlegesen pozitív irányban kell haladnunk. Ennek megfelelően a térbeli görbének azt az ágát nevezzük alsó, illetőleg felsőnek, a melyen az alsó illetőleg felső pont van. A C görbe kereszteződési pontjában az alsó, illetőleg felső ág a térbeli G görbe alsó, illetőleg felső ágának felel meg.

Ha a C görbén ábrázolt térbeli G görbe összes reális pontjai végesben fekszenek (a mikor egyszersmind a C görbe összes reális pontjai is végesben vannak), akkor a kereszteződési pontok tetszésszerűnti megjelölésével 2^k topologiailag jól meghatározott térgörbét ábrázolhatunk.

Ha ellenben az ábrázolt G görbének vannak végtelen távol fekvő pontjai, akkor a kereszteződési pontok megjelölése által még nincs topologiailag teljesen meghatározva a C görbén ábrázolt G térbeli görbe. Ebben az esetben még ki kell jelölnünk a C görbén a pólusokat és meg kell adnunk minden egyes pólusban azt is, hogy ahhoz a C görbén az egyik és másik irányban közeledve, a G térbeli görbe megfelelő pontja mily irányban távozik a Σ síktól végtelen távolba.

Egy pólust a C görbén topologikus szempontból teljesen jellemezhetünk azzal, hogy ráírjuk a ∞ jelet s tőle jobbra és balra $+$ vagy $-$ jelet írunk annak megfelelően, hogy a G görbe megfelelő pontja a pólustól jobbra és balra a z tengely $+$ vagy $-$ irányában megy végtelen távol. Egy pólust tehát a következő jelekkel lehet jellemezni:

$$+\infty-, -\infty+, +\infty+, -\infty-.$$

A $+\infty+$ és $-\infty-$ jelekkel jellemzett pólusok topologikus szempontból a C görbe közös séges pontjaival equivalentsek, mert a G görbének azok a pontjai, melyek egy ilyen pólussal a C görbén mindkét irányban szomszédos pontoknak megfelelnek,

a Σ sík ugyanazon oldalán fekszenek, a minnek következtében a G görbe ily pólusnak megfelelő végtelen távoli pontját és annak környezetét a Σ síkra merőleges egyeneseken folytonos deformációval végesbe lehet hozni a nélkül, hogy a görbe önmagát metszené. Éppen e miatt a következőkben csak a $+\infty-$ és $-\infty+$ pólusokat fogjuk tekintetbe venni, ellenben a $+\infty+$ és $-\infty-$ pólusokat teljesen figyelmen kívül fogjuk hagyni.

Két G_1 és G_2 görbét a következőkben *konjugáltaknak* fogunk nevezni, ha az egyik a másiknak tükörképe a Σ síkra vonatkozólag. Hasonlóképp konjugáltaknak fogjuk nevezni azoknak a C görbén való ábrázolásait. Ezeknek ugyanazok a kereszteződési pontjaik és pólusaik, csakhogy éppen ellenkező előjelekkel vannak jellemezve.

2. §. Egy G térgörbe topologikus jellemzése a C görbe síkjában fekvő két algebrai görbe által.

Legyen a Σ síkban

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{és} \quad \psi(x, y) = 0$$

két irreducibilis vagy reducibilis reális algebrai görbe, melyeknek ne legyen közös görberészük. Erről a két görbéről tételezzük föl azt is, hogy minden reális közös pontjuk végesben fekszik és mindkét görbére nézve oly közönséges pont, melynek érintői egymástól különbözők. Nevezzük a $\varphi(x, y) = 0$ görbét röviden φ görbének vagy 0 -görbének, a $\psi(x, y) = 0$ görbét ψ görbének vagy ∞ -görbének.

A 0 - és ∞ -görbe a Σ síkot bizonyos számú egymással össze nem függő tartományra osztja. Két tartományt szomszédosnak nevezünk, ha van egy 0 - vagy ∞ -görbevonaldarab, melynek egyik partja az egyik tartománynak, másik partja a másik tartománynak a határa. Egy tartomány lehet önmagával is határos, például egy egyenesvonal a projektív módon felfogott síkot nem bontja fel s két partja egy és ugyanazon tartomány határához tartozik.

Ezekre a tartományokra nézve a következő tételeket lehet kimutatni.¹

Ha a φ és ψ görbék egyszerre páros vagy egyszerre páratlan rendűek, akkor lehetséges az egyes tartományokat $+$ vagy $-$ jellel jellemezni oly módon, hogy a szomszédos tartományok ellenkező előjellel legyenek jellemezve. Ha ellenben a φ és ψ görbék közül az egyik páros, a másik páratlan rendű, akkor szomszédos tartományok ellenkező előjellel való jellemzése nem lehetséges, de lehetséges akkor, ha az egyik görbéhez egy egyenest, például a végtelen távoli egyenest hozzávesszük, mert különben bármely egyenesen az egyik vagy másik irányban menvén végtelenbe, ellenkező előjelű tartományokhoz jutnánk.

Az egyes tartományoknak $+$ és $-$ jellel való jellemzése véget a φ és ψ görbék egyikéhez, ha azok közül az egyik páros, a másik páratlan rendű, hozzávesszünk egy egyenest, például a végtelen távoli egyenest.

Írjuk az egyik tartomány belsejére a $+$ előjelet, akkor a többi tartománynak egészen határozott előjele lesz. Két szomszédos tartomány közös határvonalára 0 vagy ∞ jelet írjunk, a szerint, a mint az a vonal a $\varphi = 0$, illetőleg $\psi = 0$ görbének a darabja. Hasonlókép 0 , illetőleg ∞ jelet tulajdonítunk azokban a pontokban, a melyekben két 0 -, illetőleg két ∞ -vonal metszi egymást, ellenben egészen határozatlan az a jel, a melyet azokban a pontokban kell fölírnunk, melyekben egy 0 - és egy ∞ -vonal metszi egymást. Ezeket a pontokat, melyek a következő vizsgálatokban a legnagyobb szerepet fogják játszani, *határpontok*-nak fogjuk nevezni.

A határpontokba tulajdonítsunk minden pozitív vagy negatív értéket annak megfelelően, hogy a határpontot milyen irányban lépjük át. A határpontot átlépő oly irányhoz, mely a 0 -vonalat érinti, 0 -t, oly irányhoz, mely a ∞ -vonalat érinti, ∞ -t rendel-

¹ Lásd L. BRUSOTTI: «Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante piccola variazione», cz. dolgozatát. Annali di matematica (1913), p. 117—169. E dolgozat tárgya dolgozatunkkal több pontban érintkezik.

jük; oly irányokhoz, melyek e két irány közé esnek 0-tól ∞ -ig valamilyen módon monoton növekvő abszolút értékű számokat rendelünk, és pedig pozitív vagy negatív előjellel a szerint, a mint az egyes irányok $+$ tartományból $+$ tartományba, illetőleg $-$ tartományból $-$ tartományba vezetnek.

A Σ sík tartományainak és azok határainak ily megjelölésével egyszersem mind topologiailag jellemeztünk egy F felületet. E F felület és a Σ sík pontjai között a Σ síkon levő határpontokat leszámítva, kölcsönösen egyértékű vonatkozás álljon fenn oly módon, hogy az F felület egy pontjának a Σ síkon való vetületi pontja feleljen meg. Legyen továbbá ez a vonatkozás a ∞ -görbe pontjainak környezetét leszámítva folytonos.

E vonatkozásban a Σ sík bármely tartománya minden belső pontjának a F felületnek a Σ síktól véges távolságban fölfelé vagy lefelé fekvő pontját feleltetjük meg annak megfelelően, a mint a tartomány $+$, illetőleg $-$ jellel van jellemezve. Ennél az ábrázolásnál továbbá a 0-görbét a F felület és a Σ sík metszéspontjának, a ∞ -görbét a F felület és a Σ síkkal párhuzamos végtelen távoli sík metszéspontjának tekintjük és a határpontokon átmenő, a Σ síkra merőleges egyeneseket a F felületen fekvőnek számítjuk.

Egy G görbének a C görbén való ábrázolása végett vezessük a C görbe kereszteződési pontjain keresztül egyszeresen a φ és ψ görbéket. A ψ görbéről tételezzük föl, hogy a C görbe többi reális singularis pontja közül egyen sem megy keresztül, a C görbét egy reális pontban sem érinti, reális asymptotáinak irányai a C görbe asymptotáinak irányaitól különböznek és végül, hogy a φ görbét egy olyan reális pontban sem érinti, mely a C görbén is rajta van.

A $\varphi = 0$ 0-görbe és a $\psi = 0$ ∞ -görbe a C görbén két konjugált G görbét ábrázol, az általuk határolt tartományok $+$ és $-$ előjelekkel való kétféle jellemzésének megfelelően. A tartományok egyik jellemzéséhez tartozó G görbét úgy foghatjuk fel, mint az előbb definiált F felületnek és annak a hengerfelületnek metszéspontját, a mely a C görbén keresztülmegy és a Σ síkra merőleges. Ennek megfelelően a G görbe pontjai a hengeralkotókon a Σ sík fölött vagy az alatt fekszenek a szerint, a

mint a hengeralkotó a Σ síkot $+$ vagy $-$ tartomány belsejében metszi.

A C görbének a O -görbével való azok a reális metszéspontjai, a melyek nem egyszersmind határpontok, a G görbének Σ síkkal való metszéspontjai. A C görbének a ∞ -görbével való, a határpontoktól különböző reális metszéspontjai $+\infty-$ vagy $-\infty+$ típusú pólusok, mert azzal a föltevessel, hogy a ϕ görbe egy reális pontban sem érinti a C görbét, a $+\infty+$ és $-\infty-$ pólusokat kizártuk.

Ugyane föltevés miatt a C görbe ama pontjain átmenő alkotókon, melyek egyszersmind határpontok, a G görbe megfelelő pontjai a Σ síktól véges távolságban vannak. A C görbének kereszteződési pontjain átmenő hengeralkotókon, minthogy azok határpontok, a G görbének két pontját kell fölvennünk, és pedig annak a görbeágnak megfelelő térbeli pontot kell magasabbra felvennünk, a melyhez az előbbiek szerint algebrailag nagyobb számot rendeltünk. Végül ha a C görbének végtelen távolban vannak reális pontjai, akkor az 1. §. elején tett kikötésünk szerint ezen átmenő alkotókon a Σ síktól véges távolságban kell a G görbe pontjait elképzelnünk.

3. §. A térbeli algebrai görbe topologikus ábrázolására megadott második módszer equivalentiája az elsővel.

Annak kimutatása végett, hogy az előbb ismertetett módszerrel a C görbén az 1. §-ban vázolt módon ábrázolható G görbét jellemezhetjük, induljunk ki abból a legegyszerűbb esetből, hogy a G görbe összes pontjai végesben fekszenek.

Legyen $\phi(x, y) = 0$ egy az előbbi §-ban kikötött feltételeknek eleget tevő reális algebrai síkgörbe, melytől azokon kívül legfőllebb azt kívánhatjuk meg, hogy a k számú kereszteződési ponton kívül ne messe mind reális pontokban a C görbét.

Ilyen ϕ görbe létezése közvetlenül világos, mert például a kikötött feltételeknek meg tudunk felelni elegendő számú reális egyenessel.

Vezessünk keresztül a C görbének a ϕ görbével való reális metszéspontjain (k számú kereszteződési pont és az azokon kívül

fellépő reális metszéspontok) egy oly elegendő magasrendű $\varphi(x, y) = 0$ görbét, mely e pontok egyikében sem érinti a ψ görbét s a melynek nincs közös görberésze a ψ görbével. Az ilyen φ görbe létezése is közvetlenül világos, mert például ilyen tulajdonságú görbét is elő lehet állítani reális egyenesekből álló reducibilis görbe alakjában.

A φ_0 és ψ_0 -görbét ily módon megválasztva, azok az előbbieket szerint a C görbén két teljesen végesben fekvő G görbét ábrázolnak.

Egy ilyen φ_0, ψ_0 görbepár segítségével képesek vagyunk oly φ, ψ görbepárt előállítani, a mely a C görbe kereszteződési pontjaiban tetszésszerint jellemzett G görbét ábrázol.

Tegyük föl ugyanis, hogy a Σ síkban a $\varphi_0(x, y) = 0$ és $\psi_0(x, y) = 0$ görbék által $+$ és $-$ tartományokra meghatározott egyik beosztása a C görbe k_1 kereszteződési pontját a kívánt módon jellemzi, de a többi $k_2 = k - k_1$ kereszteződési pontját éppen megfordítva jellemzi. Legyen \bar{k} a k_1 és k_2 számok közül a kisebbik $\left(\bar{k} = \frac{k}{2}\right)$.

Vegyük most körül a \bar{k} számú kereszteződési pontot oly kis zárt görbékkel, melyek mindegyike csak egy kereszteződési pontot foglal magában. Számítsuk a 0-görbéhez ezeket a zárt görbéket és tartsuk meg azokon kívül a tartományok előjelét, akkor a zárt görbéken belül a tartományok előjelét ellenkezőre kell változtatnunk, a mi által a \bar{k} kereszteződési pont két ágának jellemzése az előbbi jellemzéssel szemben szintén épen ellenkezőre változik. E miatt a

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) \cdot \varphi_1(x, y) \quad \text{és} \quad \psi(x, y) = \psi_0(x, y)$$

görbék, a hol $\varphi_1(x, y) = 0$, a \bar{k} számú zárt görbe egyenlete (a mely egyébként lehet \bar{k} számú kis kör is), a C görbén két konjugált G görbét jellemez, melyek közül az egyik a kívánt topologiai tulajdonságokkal bír.

Ezzel kimondott tételünk arra a legegyszerűbb esetre ki van mutatva, a mikor a C görbén ábrázolt G görbének végtelen távolban nincsenek reális pontjai.

Az előbb alkalmazott $\varphi_1(x, y) = 0$ görbét bizonyos esetek-

ben igen egyszerű görbével lehet helyettesíteni. Így helyettesíthetjük egy egyenessel, ha létezik oly reális egyenes, a mely a kereszteződési pontoknak azt a csoportját, melyet a φ_0 és ψ_0 görbék a kívánt módon jellemeznek, elválasztja a másik csoporttól, föltéve, hogy az egyenesen sem fekszik kereszteződési pont; helyettesíthetjük egy ellipsissel, ha az a kereszteződési pontok egyik csoportját magában foglalja, a másikat azonban nem; két egymáson kívüli ellipsissel, ha azokon belül fekszik az egyik s kívül a másik csoport kereszteződési pontja és így tovább.

Ha a C görbe teljesen végesben fekszik, de vannak $+\infty$ — és $-\infty$ + pólusai, akkor egy ψ_0 görbét a kereszteződési pontokon kívül még azokon a pólusokon is keresztül kell vezetnünk oly módon, hogy azokban se érintse a C görbét. A φ_0 görbét a kijelölt pólusokon nem szabad keresztül vezetnünk, de a C és ψ_0 görbék többi reális metszéspontján keresztül kell vezetnünk. Alkossunk meg egy ilyen φ_0 , ψ_0 görbepárt, a mi nyilvánképen lehetséges.

Ha most egy előre megadott ábrázolású G térgörbét akarunk φ és ψ görbékkel jellemezni, akkor a Σ síkon φ_0 és ψ_0 görbék által határolt tartományok + és — jellel való jellemzése után a kereszteződési pontokat és pólusukat két csoportba kell osztanunk annak megfelelően, hogy azokat a tartományok előjelükkel a kívánt módon jellemzik-e vagy nem. E két csoporton kívül az egyik nem tartalmaz több pontot, mint a másik. Ha az abba a csoportba tartozó pólusokat és kereszteződési pontokat elegendő kicsiny zárt görbékkel körülvesszük s ezeket a görbéket a 0-görbéhez számítjuk, akkor 0- és ∞ -görbék a síkot oly tartományokra osztják, melyek által jellemzett konjugált térgörbepár egyik görbéje a kívánt topologikus tulajdonságokkal bír.

Abban az esetben, a mikor a C görbének a végtelen távolban is vannak reális pontjai, a φ és ψ görbéket úgy akarjuk megválasztani, hogy az előbbi bekezdésben mondottakon kívül egyenlő rendszámúak legyenek és a ψ görbe a C görbének egy végtelen távolban fekvő reális pontján se menjen keresztül.

A ψ görbére nézve ennek az újabb feltételnek is eleget

tehetünk, ha reális asymptotáinak irányait a C görbe asymptotáinak irányaitól különböztetjük, a mi pedig nyilvánvalóan lehetséges. Ha a φ és ψ görbék nem volnának egyenlő rendszámúak, akkor lehet azokat két egyenlő rendszámú φ_1 és ψ_1 görbével helyettesíteni anélkül, hogy ez által a C görbén a kereszteződési pontok és a pólusok jellemzése megváltoznék vagy újabb ily pontok lépnének föl.

Ha ugyanis a φ és ψ görbék közül az egyik páros, a másik páratlan rendű, akkor egy olyan reális egyenesnek a φ görbéhez való csatolásával, mely egyenesnek ugyanazon oldalán fekszenek a kereszteződési pontok és pólusok, azoknak jellemzését nem kell megváltoztatnunk. Az így kapott φ és ψ görbék azonban egyszerre páros vagy páratlan rendűek. Ugyanezt érhetnénk el akkor is, ha a ψ görbéhez csatolnánk egy oly reális egyenest, melynek ugyanazon oldalán feküdnének a C görbe összes reális pontjai. Ha a φ és ψ görbék még nem volnának egyenlő rendszámúak, akkor csatoljunk az alacsonyabb rendűhöz egy oly reális koeficiensű görbét, melynek rendszáma a két görbe rendszámának különbsége, a mely a C görbét nem metszi reális pontokban és a kereszteződési pontok és pólusok jellemzését nem változtatja meg. Egy ilyen görbe állhat például elegendő számú képzetes sugarú körből.

φ és ψ ily megválasztásakor rendeljünk a C görbének reális végtelen távoli pontjaihoz a Σ siktól véges távolságban fekvő pontokat.

4. §. Egy algebrai síkgörbén topologikailag ábrázolt térgörbe algebrai előállítás.

Az előző vizsgálatok alapján könnyen kimutathatjuk, hogy a C görbén topologikailag jellemzett minden G görbe algebrailag előállítható.

Ha ugyanis az

$$f(x, y) = 0 \quad (3)$$

egyenlettel bíró C görbén az előző §. fejtegetései szerint a

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{és} \quad \psi(x, y) = 0$$

görbék jellemeznék két kívánt tulajdonságú konjugált térgörbét, akkor a (3) egyenlet és a

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} \quad \text{illetőleg} \quad z = -\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} \quad (4)$$

egyenletek a két kívánt tulajdonságú irreducibilis algebrai térgörbét algebrailag elő is állítják.

Fogjuk fel a (4) egyenletekben z -t mint a Σ sík pontjainak racionális függvényét, akkor a z -függvény ellenkező előjelű tartományokban ellenkező előjelű értékeket vesz föl, mert egy tartomány határának annak egy általános pontjában való átlépéskor vagy a φ , vagy a ψ megváltoztatja előjelét. A z függvény értéke a 0-görbe általános pontjaiban 0, a ∞ -görbe általános pontjaiban ∞ , a határpontokban pedig attól az iránytól függ, a mely irányban a határpontot átlépjük. Legyen ugyanis (a, b) a Σ sík oly pontja, melyben a φ és ψ görbék szög alatt metszik egymást és λ az az iránytangens, a melylyel a határpontot átlépjük, akkor a (4) alatti két egyenletnek megfelelően

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_a \cdot \lambda \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_a &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_a \cdot \lambda \end{aligned}$$

A z tehát, mint a Σ sík racionális függvénye, algebrailag ugyanúgy jellemzi a Σ sík pontjait, a hogyan a 2. §-ban topologiailag jellemeztük azokat.

A (3) és (4). egyenletek együttevén z -t mint a C algebrai görbe racionális függvényét definiálják, melyre nézve az algebrai függvények elmélete alapján következőket állíthatjuk: ha a C görbe egy pontja a φ görbére nézve μ , a ψ görbére nézve ν egyszerű metszéspontnak számít, akkor a z -függvény a C görbének abban a pontjában zérustól különböző véges értéket vesz föl, zérussá vagy végtelenné válik a szerint, a mint a $\mu - \nu$ különbség zérus, pozitív vagy negatív.

Ezeknek a tételeknek alapján belátható, hogy a φ és ψ görbéknek a 3. §-ban vázolt megválasztása esetén a (3) és (4) egyen-

letek algebrailag előállítják a C görbén ábrázolt két konjugált térgörbét.

Egy ilyen módon előállított algebrai térgörbe irreducibilis, mert pontjai véges számú pontot (a kereszteződési pontokat) leszámítva a C irreducibilis görbe pontjaival kölcsönösen egyértékű vonatkozásba hozhatók. A G térgörbe rendszámát is könnyű meghatározni. Egy tetszésszerűen

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sík ugyanis annyi pontban metszi a G algebrai térgörbét, mint ahány változó pontban metszi az

$$(Ax + By + D)\phi(x, y) + C\varphi(x, y) = 0 \quad (5)$$

lineáris görberendszer a C görbét.

A G görbe tehát annál alacsonyabbrendű, minél alacsonyabbrendű az (5) görberendszer és minél több fixpontban metszi a C görbét.

5. §. Alkalmazás a legegyszerűbb típusú irreducibilis lánczolt térgörbe algebrai előállítására.

A megelőző általános fejtegetéseket oly irreducibilis elsőfajú térgörbe algebrai előállítására fogjuk alkalmazni, a melynek végesben fekvő két menete egymásba van lánczolva.

Az

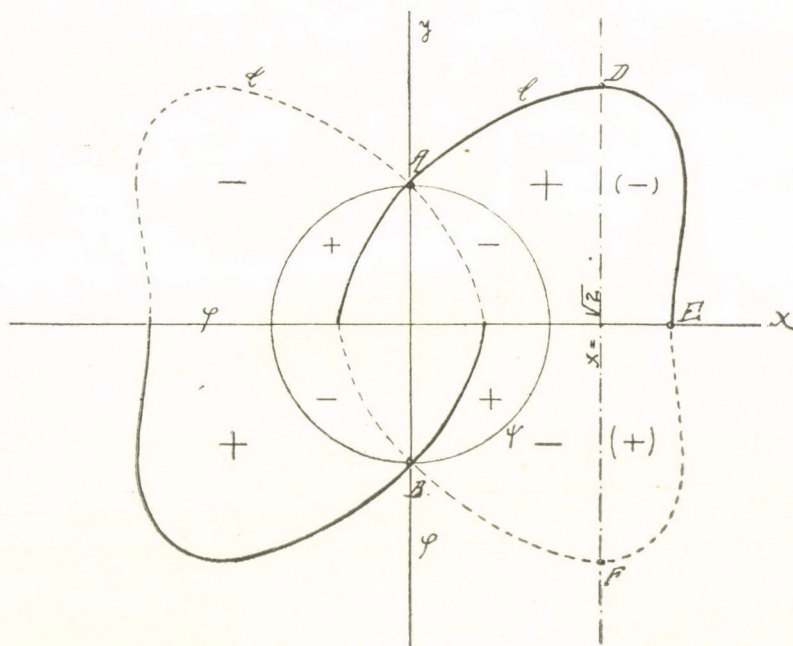
$$f(x, y) = 4x^2 - x^4 - (y^2 - 1)^2 = 0 \quad (6)$$

egyenlettel előállított irreducibilis elsőfajú C görbének két végesben fekvő menete az $A = (0, 1)$ és $B = (0, -1)$ pontokban metszi egymást, melyekben a két-két érintő $+1$ és -1 iránytangenssel bír. Ha a C görbének e két pontját kereszteződési pontnak tekintjük és mindkét pontban azt a görbeágot jelöljük felső ágának, a melynek érintője $+1$ iránytangenssel bír, akkor a C görbén egy oly G görbét ábrázoltunk, melynek két menete egymásba van lánczolva.

Ugyanezt az ábrázolást határozzák meg a C görbén a

$$\varphi(x, y) \equiv xy = 0 \quad \text{és} \quad \psi(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (7)$$

görbék, ha a φ és ψ görbék által határolt tartományokat úgy jellemezzük, hogy a ψ körnek első körnegyede — jellel birjon, miként az ábra mutatja, a hol a görbének teljes vonallal kihúzott részei a sík fölött, a pontozott vonallal kihúzott részei



a sík alatt fekvő íveit jelentik, míg a C görbének azok a pontjai, a melyekben a pontozott vonal a teljessel összeér, a síkon fekvő pontokat jelentenek.

Minthogy a

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2 - 1} \quad (8)$$

függvény az első körnegyedben szintén negatív értéket vesz föl, azért a (6) és (8) egyenletek előállítják a topologiailag jellemzett algebrai térgörbét.

Ennek a G görbének csak végesben vannak pontjai, mert a ψ kör a kereszteződési pontokon kívül, melyekben a C görbe egyik ágát sem érinti, nem metszi a C görbét reális pontok-

ban. A G görbe rendszáma 8, minthogy az (5) görberendszer a C görbét 8 változó pontban metszi.

Az (5) görberendszer egyenletéből látható, hogy a $\varphi = xy$ görbéhez hozzá lehet venni még egy tetszőszerinti egyenest anélkül, hogy a G görbe rendszáma változnék. Ha φ görbének a

$$\varphi(x, y) \equiv xy \cdot (+\sqrt{2}-x) = 0$$

egyenlettel előállított három egyenest vesszük, akkor az (5) görberendszer a C görbét csak 6 változó pontban fogja metszeni, mert a $\sqrt{2}-x=0$ egyenes keresztülmegy a ϕ körnek a C görbével való $(\sqrt{2}, i)$ és $(\sqrt{2}, -i)$ képzetes metszéspontjain.

Ha φ görbének ezt a három egyenest vesszük, akkor a C görbe kereszteződési pontjainak jelölését nem kell megváltoztatnunk, mert az $x = \sqrt{2}$ egyenestől balra a tartományok jelölését megtarthatjuk, de akkor a tőle jobbra fekvő tartományok jelölését kell ellenkezőre változtatnunk.

Ennélfogva a (6) egyenlet és a

$$z = \frac{xy(+\sqrt{2}-x)}{x^2+y^2-1} \quad (9)$$

egyenlet előállít egy kívánt típusú 6-odrendű irreducibilis algebrai térgörbét. Ennek az algebrai görbének a fekvését is előállítja a mellékelt ábra, ha a DE és EF ívek jelöléseit egymással fölcseréljük.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 február 14.-én tartott üléséből.)



A MARCGRAVIACEAE NÉHÁNY ÚJ ALAKJÁRÓL,
A SZÁRMAZÁS- ÉS AZ ÖSSZEHASONLÍTÓ ALKATTAN ALAPJÁN.

II.¹

A) *Norantea* Lóczyi Al. Richt., vonatkozással a *Ruyschiákra*,
a *Souroubea exauriculata* Delpino és *dasystachya* Gilg-ra,
valamint a *Norantea gracilis* (Wittm.) Al. Richt.-re.

(VI—VIII. tábla.)

RICHTER ALADÁR 1. tagtól.

A Magyar Nemzeti Múzeum növénytani osztályában van egy guatemalai *Marcgraviacea*, amely a Coll. H. v. TÜRKHEIM Nr. II. 1030. sz. a. kiadottan «*Norantea*?» néven került a forgalomba s amely Cubilquitz mellett 350 m. t. sz. f. magasságban, állítólagosan *Lonchocarpus*-on «élősködve», az 1904. év júliusában gyűjtetett (H_5).² A növény eredeti névjegyén a «*Ruyschia Mexicana* BAILL.», az eltérő írásból kitetszőleg hihetően utólagosan megejtett, s nyomban megjegyzem, hogy helytelen meghatározás.

Valamint a *Lonchocarpus*-on való «élősködés» is oda módosítandó, hogy *Lonchocarpus*-ra kapaszkodva epiphytikusan tállátott, minthogy a *Marcgraviaceae* tagjai általában «*Frutices radicans-repentes, scandentes vel epiphytici, rarius arborescen-*

¹ Az I. rész, a cikksorozat általános bevezetésével és az irodalmi jegyzékkel együtt a Math. és Term.-tud. Ért. XXXIV. köt. 551—586. lapján jelent meg.

² A vizsgálat tárgyát tevő herbariumi példányokat a szöveg végén II. B. fejezet alatt sorolom fel; H_5 , H_6 . . . a szövegben foglalt hasonló jelzéseknek felelnek meg.

tes» (9. 215—16).¹ Ezek «epiphytismusát» a szakban nem mindig avatott gyűjtők sokszor «parasitismus»-nak minősítették, éppoly tévesen, miként a sokszor szédítő magasságra kapaszkodó *Norantea guianensis*-t is AUBLET stb. «óriási fának» vélte, e *Norantea* törzsének tekintve azt a fát (gazda-növényt: arbor), melyre felkúszott.²

A parasitismusnak semmi nyoma sincs a vizsgálatunk tárgyát tevő guatemalai növényen, valamint az általam megvizsgált isomorph Marcgraviaceae egyetlen egy faján sincs.

BENTHAM—HOOKER-ék Gen. Plantarumjában (3. I. 181), va-

¹ A vonatkozó irodalom összefoglalását adja a jelen cikksorozat ált. bevezetésének B) fejezete a Math. és Természettud. Értesítő XXXIV. köt. 564—66. lapján A kövőbbben szedett sorsszámok megfelelnek a szöveg zárójelben foglalt számainak, az utánuk következő jelzi a lap (pagina) számát.

² «Obs. II. Quamquam AUBLET l. c. (Hist. d. Plantes de la Guiane françoise I. 554. t. 220) *Noranteam Guianensem* arborem altissimam octoginta ped. et amplius elatum declarat, dubito quin ea arborem formet. Cl. RICHARD in herbario tantum fruticem altissimas arbores scandentem, superne ipsos flores proferentem vocat; cl. SPRUCE ad n. 1885 in specimenibus herb. Kew. adnotat: «In silvis ultra inundationum fines frequens ad vias; arbor 80 pedibus elata; Indiani eam non parasiticam esse declarant, propter truncos alienos plantasque scandentes perturbatas autem id eruere non potui.» (9. 242).

WITTMACK e jegyzetében szembeszökően nyilatkozik meg az indianusok botanikai intelligenciája, melynek, sok egyéb között, például a Schizaeák pompás unicumát is köszönhetjük a *Schizaea pacificans* MARTIUS képében (PRANTL: Morphol. d. Gefässkryptog. Heft II. 1881. p. 141); másodpéldányát azóta sem tudták megszerezni. MARTIUS id. h. való megjegyzésén kívül sok adatunk van arra, hogy e jobb sorsra érdemes népfaj pusztulását a botanikusok szűkebb világa sem fájlalhatja eléggé.

A szédítő magasságokba kapaszkodó növények fényért, világosságért való küzdelmével együtt jár, hogy vegetatív életműszereiken kívül a virágok meg éppen emberileg a legtöbbször elérhetetlen magasságokban jutnak kifejlődésre. HALLIER (Leiden) sokat beszélt nekem mindezek gyűjtési nehézségeiről a tropusok alatt, ahol is ha a fákon ugráló s «e czélból felfingerelt» majmok nem segítenek, csupán a vadász fegyvere szedhet le egy némely töredéket. Önként értetődik, hogy a tropusi növényzet szemünknek szinte hihetetlenül nagy bujaságában a tévedés így is könnyen megeshetik.

Körülbelül ezzel megadtam a Marcgraviaceae vizsgálati anyagbeli ritkaságának az okát is.

lamint a Kew-Index-ben megnyilatkozó amaz angol-francia felfogást (2. 7)¹, amely a 2-rekeszű magházas *Ruyschia*-nemzetséget az 5-rekeszű magházas *Souroubea*-val egyesíti, a helyesebb német rendszertani felfogás (WITTMACK: 9. 240, 250; ENGLER—PRANTL: 18. 162 etc.) szerint is el kell ejtenünk, vagyis a két nemzetség generikus jogosultságának alapjára kell helyezkednünk, amit az olasz DELPINO sem vont kétségbe.²

Ezek szerint a *Ruyschia*-nak a Flora Brasiliensis (9. 248—49) szerint ismert két fajához (*R. clusiaefolia* Jacq; *R. sphaeradenia* DELP.) az újabb idők vizsgálati eredményeiből harmadikul csupán GILG *R. platyadenia*-ja csatlakozik (21. 34), minthogy BAILLON «*Ruyschia mexicana*»-ja (7. 241) = *Souroubea exauriculata* DELPINO (4. 180; 258, 277), tehát szorosabban nem is *Ruyschia*.

DELPINO ugyanis ezzel a *Souroubea*-fajjal, valóban mint «bellissima species»-szel, amely LINDEN-gyűjtötte példányok révén (Nr. 875. Habit. in Mexicana Cordillera prov. Veracruz) eladdig «*Ruyschia clusiaefolia*» néven szerepelt (*Ruyschia clusiaefolia* LINDEN ad collect. u. 875. nec Jacq. in 9. 256), BAILLONT megelőzte, és WITTMACK, aki a BAILLON leírásának alapjául szolgáló HAHN-féle példányt is (prope Tlapacoya, n. 421 in Herb. Mus. Paris) idézi, helyesen meg is állapítja ezek synonymiáját (9. 256). BAILLON eredeti diagnosisában a «germen 5-loculare, stigmatum sessili, 5-gono», a genusok fentjelzett értelmezése szerint kizárja a szóban forgó Marcgraviacea «*Ruyschia*»-jellegét.

Viszont a részletes vizsgálódásunk tárgyát tevő TÜRCKHEIM-féle növény (*H.*), BAILLON kifejezéseivel élve — ki egykor bámult mesterem volt a Sorbonne-on (1892) — «germen 3-loculare, stigmatum sessili 3-gono» jellegével üt el a *Ruyschia*-tól és a *Souroubea*-tól egyaránt. E növény genus-szerinti hovatartozandóságát illetőleg, akár a Marcgraviaceae WITTMACK-szerinti felosztását vegyük alapul («ovarium... stigmatum 3—5-radiatum mammiformi, interdum indistincto coronatum» (9. 234), akár a

¹ BAILLON, H. Histoire des Plantes, Tom. IV. 1873. pp. 241—42.

² WITTMACK, L. Die Marcgraviaceen und ihre Honiggefäße. Kosmos, III. Jahrg. Heft 4, p. 270.

Szyszyłowicz-ét («Fruchtknoten 3—5-fächerig; Griffel kurz, mit undeutlicher Narbe» 18. 163), a jelzett esetben csakis a *Norantea*-nemzetség jöhet számításba, minthogy a TÜRCKHEIM-féle természetes példányon virágnak, avagy nectariummá alakult bracteáknak immár semmi nyoma; mindenesetre oly hiányok, amelyek a meghatározást lényegesen megnehezítik ugyan, de nem teszik lehetetlenné.¹

A növény ismeretének ezúttal elkerülhetetlen hiányosságát pótolnunk lehet az anatómiai-systematikai módszer alkalmazásával, amit a származástani kapcsolatok összehasonlító alkattani kikutatásával el is érhetünk.

A Ruyschiák régebben ismert két faja (*R. clusiaefolia* [inclus. *R. fragrans* MORITZ] és *R. sphaeradenia*), hogy egyebet ne említek, már az által, hogy mesophyllumaikban bárhol és rögtön fajlagosan jellemző rhizo- és astrosklereidek észlelhetők, absolute távol áll a TÜRCKHEIM-féle növénytől, melynek újdonságát, az alább adandó okok alapján, ezentúl a *Norantea Lóczyi* névvel jelölöm meg (Tab. VI. fig. 29).

A *Ruyschiák* harmadik fajának, a *R. platyadenia* fajlagos különbözőséget GILG (21. 34), a nectariumon kívül, főleg a levélalak és -erezet sajátosságaira építi föl (Tab. VI. fig. 34), amelyek alkattanilag is eltérők a *N. Lóczyi*-étől (Tab. VI. fig. 29). E *Norantea* levelei közül a legkisebb 4·8 cm h. és 1·8 cm sz., a legnagyobb 9·5 cm h. és 4·4 cm sz., usque 9 mm hosszú nyélen, alakilag a *R. platyadenia*-étől teljesen elütő szabással.

A sorban negyedik *Ruyschia* volna a *R. mexicana* BAILLON = *Souroubea exauriculata* DELPINO, melynek WITTMACK-tól is idézett (9. 256) LIEBMANN-féle példányának (Mexico: Mirador, 5. 1842

¹ Az orosz WORONIN, hogy a vonatkozó példák seregéből csak egyet említek, néhány levélből álló töredék alapján jeles tanulmányt tudott írni a *Statice monopetala*-ról; virágja, sőt termése hiányában is meg tudta határozni az összehasonlító alkattan segítségével. WORONIN mintaszerű dolgozata «Notiz über die Structur der Blätter von *Statice monopetala* L.» czímen a Botan. Zeit. 1885. No. 12 lapjain jelent meg, egy táblán mintaszerű ábrázolatokkal. WORONIN anatómiai képei egyszerű példák, hogyan lehet kell rajzolni, ha összehasonlító alkattani, mindenképp fölött pedig komoly tanulmányról van szó.

in HB) legnagyobb levelét Tab. VI, fig. 31 ábrázolatában tünnetem fel természeti hűséggel. Ez alakilag kétségtelenül közelebb áll a *N. Lóczyi* leveléhez (Tab. VI, fig. 29), bár 11·2 cm hosszúsága és 6·3 cm szélessége mellett jóval nagyobb, de a szélesség-s hosszúságbeli arányok végre ugyanazok volnának.

Az ezekben nyújtott alaktani vázlat azonban származás- és alkattani kiegészítésre szorul, szorosabban a *Ruyschia platyadenia* és a *Souroubea exauriculata* (= *R. mexicana*) részéről.

Ruyschia platyadenia GILG (*H.*).

A *R. platyadenia* GILG leveleinek mesophyllumában mindenekelőtt feltűnő a sklereidekben való csaknem abszolút szegénység (Tab. VII, fig. 38), szemben a valódi (főleg astro-) sklereidekben bővelkedő *R. elusiaefolia*-val és *sphaeradenia*-val; egyébként a tágas üregű bőrsejtek közül egyik-másik mélyen beöblösödik a palissade-rétegbe, eleve elárulván az epidermis mucigera jelleget (Tab. VI, fig. 35 *n—n*).

A metszetek egész sorozatának a megvizsgálásával, csupán a véletlen vezet rá, hogy a palissade-réteg egyes sejtjei, mintegy kivételkép, utóbb gödörkésen megvastagodhatnak, ú. n. palosklereid-ekké alakulván át (Tab. VI, fig. 35 *psk*). Hasonlóan ritka jelenségeként észlelhetők astrosklereid-kezdetek (avagy kezdemények = Anlage) közvetlen a palissade alatt, avagy a szivacsparenchyma zömében (Tab. VI, fig. 36 *askk*). Mind e képletek azonban, ritkaságuknál fogva, véleményem szerint még helyi (localis) mechanikai jelentőséggel sem bírnak; annyival nagyobb azonban a jelentőségük származástani tekintetben.

A félig-meddig bőrnemű levelek (fol. coriacea v. subcoriacea) mechanikai szilárdságát, a mindkétfelől vastag cuticulán kívül (Tab. VI, fig. 36 *c₁—c₂*), főleg az elsődleges erezet leptoma felőli háncsnyalábja szolgálja, annyival inkább, mert ez az erezet, a *R. platyadenia*-ra fajlagosan jellemzőleg, 30—45° alatt ered a főérből (Tab. VI, fig. 34).

Az I. rész vonatkozó részeiben kifejtettem a levél *x*- és *z*-irányú metszeteinek alkattani jelentőségét;¹ a mechanikai pedig

¹ Math. és Természettud. Ért. XXXIV. köt. 562, 570 és köv. 11.-in.

kitűnik az ú. n. librosklereoides példákon, mint amilyen a *N. peduncularis*-csoport¹ bármelyik tagja. Minthogy a sklereoidok mechanikai jelentőség nélkül valók a *R. platyadenia* levelében, a metszés két iránya inkább a styloidok tekintetében bír némi szereppel, amennyiben a lemeznek a másodlagos erezzel párhuzamos (i-irányú) metszeteiben rendszerint megkapjuk a hasábos kristályok nyalábjait, gyakran az attól már vékonyabb tűnél fogva is merőben eltérő raphidnyalábokkal együtt a palissade határán, illetőleg a szivacsparenchyma zömében (Tab. VII, fig. 38 sdt, r!). Ellenben a másodlagos erezetet keresztben érő (ú. n. x-irányú) metszetekben többnyire üres tömlősejtek kerülnek szemünk elé (Tab. VI, fig. 35–36 sdt), mert a kristályhasábok főleg a vékony metszeteknél, könnyen kiesnek; ellenben a raphid-köteget a raphid-tömlőt kitöltő nyálkatartalom összébbsé tartja s a vékony tűk k. m.-eit minden nagyobb nehézség nélkül meg is kaphatjuk (pld. Tab. VII, fig. 40 r-r!). A styloidoktól üres tömlők azonban vajmi gyakoriak lehetnek az i-irányú metszetekben is. Ez esetben a tömlő öblössége, annak quasi k. m.-éhez (Tab. VI, fig. 39 sdt) képest, az erezet mentén nyúlt irányánál fogva annnyival feltűnőbb (Tab. VII, fig. 39 sdt), főleg, ha sorjában követik egymást, szorosan a palissadenak szivacsparenchymabeli határán.

Mind a két epidermis sokszögű sejtjeinek nagysága változó, a felületen általában egyenes falazatúak s aránylag közepes nagyságúak mellett is élesen kivehető középlamellákkal bírnak (Tab. VI, fig. 37). Légzőnyílásai nem térnek el a Marcgraviacea-typustól, a bőrsejtekkel egy szinten vannak s az ezektől alakilag el sem térő melléksejtek száma 4–5 között váltakozik (fig. cit.).

Souroubea exauriculata DELP. (*H.*).

(syn. *Ruyschia mexicana* Baill. l. c.).

BAILLON (7. 241) «*Ruyschia mexicana*»-ja levelének a h.-át 10 cm-re, sz.-ét 5 cm-re teszi; WITTMACK (9. 255) adatai szerint csupán a levél-szélesség volna valamivel nagyobb (5.5 cm), a levelek vastagságát pedig a «subcoriaceus» kifejezéssel jellemzi.

¹ Lásd id. h. 571. l-on alul ¹ jegyzetben.

A LIEBMANN-féle (*H*₇) példány legnagyobb levele azonban, melynek Tab. VI, fig. 31-ben adott hű mása egyébként teljesen megfelel a *S. exauriculata* DELP., WITTMACK adta képének (9. Tab. 51. I), nemkülönbén BAILLON¹ és WITTMACK² leírásainak, 11·2 cm hosszú és 6·3 cm széles, tehát a BAILLON—WITTMACK-féle id. méreteknél nagyobb. Ehhez mérten a levél sem «subcoriaceus», ellenkezőleg húsában feltűnően vékony (fol. papyraceum), ami természetszerűleg a levél alkattani viszonyaiban is megnyilatkozik. Az aránylag nagy levél lemezbeli feszességét csakis az e *Souroubea*-ra jellemző erezet (BAILLON igen helyesen meg is említi¹) biztosítja a stélék leptoma-felőli kemény hánccsnyalábjaival, akárcsak a *S. dasystachya* sok tekintetben hasonló alkattani viszonyokat feltűntető levelében (Tab. VI, fig. 33; Tab. VII, fig. 42–43 *bt*). Mechanikai jelentőséggel bíró egyéb vastagfalú elemek nincsenek a levél mesophyllumában. A sklereidek teljes hiánya, tekintve a sklereidek oly nagy és változatos elterjedését a Marcgraviaceae körében, mindenesetre feltűnő a *S. exauriculata* viszonylagosan nagyméretű levelében, aminek a magyarázatát nyilván a levél vékony húsa adja meg. A mikroszkopium alatt ugyanis a lehető legegyszerűbb bifacialis szerkezet tűnik elibénk, amelyben legfeljebb az a megjegyzésre méltó, hogy raphid-nyalábok a levélszövet valamennyi rétegében észlelhetők (Tab. VII, fig. 40 *r—r*).

A raphid-tömlők vaskossága meghaladhatja a mindig egyrétegű palissade egy-egy sejtjének a többszörösét, aminthogy akad arra is példa, hogy a raphid-nyaláboknak rendszerint a palissade-sejttel egyező függőleges (*verticalis*) helyzete eltérő, esetleg ferde. Ez utóbbi esetben a raphid-tömlő, főleg ha elnyálkásodott (következésképp a többtől feltűnően eltérő) bőrsejttel társul, a levél meglehetősen laza szövetében annyiival inkább szembeötlő jelenség (Tab. VI, fig. 32 *rt*).

¹ «folia ... obovata (ad 10 cent. longa, 5 cent. lata), basi longiuscule cuneata, apice rotundata v. summo apice breviter apiculata, integerrima penninervia tenuiter reticulata, utrinque glaberrima» etc (7. 241).

² «foliis breviter-petiolatis magnis obovatis, basi cuneatis, junioribus apice mucronatis, dein submarginatis, subcoriaceis, 8–10 cm longis, 4–5½ cm latis» etc (9. 254–55).

Ha a mesophyllumot (Tab. VII, fig. 40) például a *Ruyschia platyadenia* félig-meddig bőrnemű (fol. subcoriac.) s helylyelközzel sklereoides levélhúsával vetjük egybe (Tab. VI, fig. 35—36), nyomban kitűnik, hogy a *S. exauriculata* levélhúsbeli megapadása első sorban a szivacsparenchyma megcsökkenésére (reductio) vezethető vissza.

A levél szerkezete, a sűrűn fellépő légzőnyílásokkal együtt arra vall, hogy a levél ellenállási képessége, az esetleg beállható kedvezőtlen életbeli viszonyokkal szemben, csekély. A légzőnyílásbeli készülék, bár némileg az epidermis szintje fölé emelkedik, nem tér el a Marcgraviacea-typustól: gyakran észlelhető «reduplicatiója» (Tab. VII, fig. 40 s—s)¹ élénk transpirációra vall.

Souroubea dasystachya GILG (H_3).

A szorosabb értelemben vett *Souroubea* AUBLET (exclus. *Ruyschia* JACQ.)-nemzetség eladdig csekélyebb fajszáma GILG közleményei (21. 34; 31. 128) révén szépen felszaporodott. Ezeket, a berlini botanikus muzeum igazgatóságának eléggé meg nem hálálható liberalitásából, valamint a régebben ismereteket mind megvizsgálhattam a bevezetésben kifejtett célzattal, — TRIANA és PLANCHON *S. (Ruyschia) pilophora*-jának a kivételével, amely a világháború miatt ma Párisban hozzáférhetetlen. WITTMACK szerint e *Souroubea* 8–10 cm h. és 3·5—5 cm sz. levelei kifejezetten bőrneműek², amiből azt következtethetem, hogy TRIANA—PLANCHON e «*Ruyschia*»-ja a sklereoides *Souroubeák* közé tartozik. Ilyenformán a sklereoideset nélkülöző *Souroubeák* közül, a Mexicoban honos *S. exauriculata*-n kívül, csupán a GILG-féle *S. dasystachya* marad meg, amely az ULE-féle brazíliai (s a berlini botanikus muzeumtól segélyezett) expeditio egyik igen érdekes s eddigelé még nem publikált újdonsága (H_4).

Némi meglepődéssel konstatalhatjuk, hogy a *S. dasystachya* levele (Tab. VI, fig. 33) alak- és alkattanilag sok tekintetben megegyezik a *S. exauriculata*-val (Tab. VI, fig. 31). Így a levelek

¹ A légzőnyílások s—s-jelzése (fig. 40 s—s) a metsző hibájából elmaradt.

² «Foliis brevissime petiolatis vel subsessilibus, ovato-ellipticis vel oblongo-ellipticis, apice subacutis leviter emarginatis, valde coriaceis» (9. 254).

hossza (ad 10·5 cm long.) átlagosan olyan, mint a *S. exauriculata*-é, csupán a szélességében marad aránylagosan alul (ad 4·6 cm lat.); ellenben feltűnő a levél asymmetriája, ugyanis a főértől való jobb-balfeli részének egyenlőtlen szélessége.

Minthogy a másodlagos erek sűrűbben követik egymást, az úgynevezett tollas erezet a *S. dasystachya*-ra fajlagosan jellemző, de a papiros-vékonyágú levél lemezében mechanikailag a *S. exauriculata*-éval teljesen megegyező jelentőséggel, ami kitűnik abból, hogy az edény-nyalábok egyoldalú, vagyis a leptoma felől része-sülnek mechanikai megerősítésben az ugyanott jelentékenyen kifejlődött keményhánckötegek révén (Tab. VII, fig. 43 *bt*), amelyek a levélperemig kitartanak (Tab. VII, fig. 42 *bt*). Mindez, főleg in sicco, az élesen kiemelkedő erezet folytán a levélfonákon rajzolódik ki élesen (Tab. VI, fig. 33).

A levél-k. m. alkattana viszont azt bizonyítja, hogy a *S. dasystachya*-nak a *S. exauriculata*-énál kisebb levele a mesophyllumnak újabb (kb. $\frac{1}{4}$ résznyi) megapadásával együtt jár és ez a reductio újból a szivacsparenchyma rétegét illeti (Tab. VII, fig. 40 és 43 *sp—sp*), mely szintén laza, sejtközi üregekkel erősen hézagos. A levélszövet általános lazaságát főleg a felső bőrnek a palissadeba mélyen benyomuló nyálkasejtjei nagyban fokozzák, valamint ama raphid-tömlők, amelyek nagysága a palissade-sejt többszöröse (Tab. VII, fig. 43 *rt₁—rt₂*), ami különben a *S. exauriculata* levelében is megesik.

Döntő mindenesetre csakis a mechanikai elemek, a Marcgraviaceae-re jellemző sklereidek fellépése, nemkülönben azok alaki tulajdonságai. Ellenben teljes hiányuk viszont a *S. exauriculata* s a *S. dasystachya* szerkezetbeli affinitása mellett szól, kétségtelenné tévén, hogy a *Ruyschia platyadenia*, erősebb cuticulájú s bőrnemű levelének jóval vastagabb mesophyllumában mutatkozó sklereidjeivel, magasabb fokra jutott el a származástani kapcsolatok létráján.

Fejtegetéseim e pontján vethetem föl a kérdést, hogy a guatemalai

Norantea Lóczyi m. (*H₅*)

származástanilag miképen értékelhető az összehasonlító alkattan alapján, a fentebb tárgyalt *Ruyschia platyadenia*-val, illetőleg

a *Souroubea exauriculata*-val s a *S. dasystachya*-val szemben? — nemkülönben azt, hogy miképen formálódik ki Lóczy *Norantea*-jának helyzete a többi *Norantea* között a származástan alapján?

A N. Lóczyi phylogeniailag fölvetett e kérdésének megoldása semmi nehézséget sem okoz a *Ruyschia platyadenia*-val s a *Souroubea exauriculata*-val szemben, nem is tekintve már a genus jellegében eleve fennálló alaktani különbséget, amit a *Ruyschia-Souroubea* s a *Norantea* nemzetségei között tudtommal az angol-francia rendszertani felfogás sem vont kétségbe soha.

Mindamellett, az összehasonlító alkattan nézőszögéből kiindulva, pár szóval foglalkozom ezzel a kérdéssel, mert a vérség-szerinti kapcsolatok szálainak megállapításában nem érdektelen megtudnunk azt, hogy a mindössze három (de jó telivér-) fajjal szereplő *Ruyschia*-nemzetség körében származástanilag, csaknem sklereid nélküli mesophyllumával (Tab. VII, fig. 38), a *R. platyadenia* áll a legalsóbb fokozaton. A nagy ritkán észlelhető mechanikai elemek (palosklereidek és astrosklereid-kezdemények Tab. VI, fig. 35—36) közül a palosklereidek fellépése azonban, a fönt formulázott kérdés szempontjából, annyiban figyelemre méltó jelenség, mert a *R. platyadenia*-hoz hasonló viselkedést a N. Lóczyi leveleiben is tapasztalhatunk (Tab. VIII, fig. 48—52). A kettő levélbeli szabása azonban absolute eltérő (Tab. VI, fig. 29, 34), — ám a *S. exauriculata*-é is a levél szélesség-s hosszbeli méreteinek egymáshoz való viszonyában (Tab. VI, fig. 31).

E *Souroubea*-n is az a föltűnő, hogy mesophylluma sklereid nélkül való (Tab. VI, fig. 32), miként a *S. dasystachya*-é (Tab. VII, fig. 43); ezeknek csaknem a congruentiára vezető alkattani affinitását fent kifejtettem, valamint azt, hogy a mesophyllum sklereidektől való mentessége mind a két *Souroubea*-faj leveleinek papiros-szerű vékonyságában leli meg természetes magyarázatát.

Ezek a *Souroubea*-k, a Souroubeák valamennyi faján végrehajtott összehasonlító alkattani vizsgálataim tapasztalásai szerint, a *Souroubea*-k alkattanilag megkülönböztettem négy csoportja

közül csakugyan a legalsórendű csoport tagjai, tehát úgy tekintendők, amelyek a *Souroubea*-k fejlődési vonalán a szó alkattanai értelmében véve is kezdetleges fejlettségű fajok, — akár a *R. platyadenia* a Ruyschiák között, a *N. gracilis* a Noranteák között.

A *N. gracilis* azonban az által, hogy mesophyllumában már is megállapítható a sklereidképzés, sőt a palissade-alátámasztás célzata is (Tab. VII, fig. 44), a fajokban leggazdagabb *Norantea*-nemzetség kötelékében az alkattanilag eddig megkülönböztettem hét csoport közül már is a harmadikba, tehát származástanilag a fejlettebb csoportok egyikébe tartozik.

Közelebről a *S. dasystachya* levelének feltűnően tollas erezete (Tab. VI, fig. 33), nemkülönben a mesophyllum szegénységével szervesen egybefüggő sklereidbeli hiánya teljesen elegendő, akár a gyakorlat szempontjából is, a *N. gracilis*-tól (Tab. VI, fig. 30), vagy éppen a *N. Lóczyi*-tól (Tab. VI, fig. 29) való megkülönböztetésére, — e ponton nyomatékosan reá mutatván arra is, hogy a két utóbbi félig-meddig bőrnemű leveleinek sajátos alkattanai szerkezete egyszersmind a sklereidképzésre való hajlandósággal együtt jár (Tab. VIII, fig. 51—52; Tab. VII, fig. 44).

A *N. Lóczyi* tapintatra vastag levele eleve arra enged következtetni, hogy erős cuticulával borított epidermisén belül a mesophyllum vaskos, melynek egyrétegű palissadeja egymagában kb. a *S. dasystachya* egész mesophyllumának ² 3-ával ér föl (v. ö. Tab. VIII, fig. 48-at a Tab. VII, fig. 43-mal). Ezt azért említem meg e helyt, mert egy tekintet a *N. Lóczyi* levelének a rajzára rögtönösen meggyőz bennünket arról (Tab. VI, fig. 29), hogy levélszabás szempontjából a *S. dasystachya* erősen megközelíti a *N. Lóczyi*t (Tab. VI, fig. 33).

Számos metszet különben egyszerű bifacialis mesophyllumának általános sklereidnélkülisége rávall arra (Tab. VIII, fig. 49), hogy a *N. Lóczyi* levele csupán félig-meddig bőrnemű, felületes bűvárlatok nyomán hajlandók lehetnének a *N. Lóczyi*t a Noranteák ama (I) csoportjába sorozni, melynek tagjai teljesen sklereidmentesek (*N. anomala* HBK, *N. Paraënsis* MARTIUS, *N. Goyazensis* CAMBESS., *N. microscypa* GILG).

A Marcgraviaceae sklereïdképzésének a megítélésében, a csaknem valamennyi isomorph tagjára kiterjedő s összehasonlító alkattani vizsgálataim közepette, reájöttem arra, hogy a mechanikai (sklereïd-stb) elemek phylogeniai értékelése tekintetében csakis úgy érhetünk el használható eredményeket, ha lehetően számos metszetet vizsgálva át, a legnagyobb óvatossággal járunk el a mesophyllum úgynevezett sklereïdnélküliségének a megállapításában is. Mindamellett még a jelzett óvatosság szemmeltartásával sincs kizárva a tévedés eshetősége.

Viszonylagosan nem is kell a *N. Lóczyi*-ből sok levél-metszetet vizsgálnunk, hogy a szivacsparenchymában oly sklereïdfészkekre bukkanhassunk, amelyek számosabban a szivacsparenchyma zömében lépnek föl (Tab. VIII, fig. 48 *skn*); és ha ezek nyomán, hogy úgy mondjam, tovább folytatjuk a sklereïdfészkek nyomozását, oly sklereïdfészkeket is észlelhetünk, amelyek palissade-alátámasztási czélzata kétségtelen, főleg, ha a sklereïdbeli fészkek keménysejtjei csoportosan társulnak egymáshoz, amire a *N. gracilis*-éhez hasonló példa akadhat (Tab. VII, fig. 44). Ilyenformán könnyen megejthetnők a döntést, hogy a *N. Lóczyi* a *Norantedák* esetleg ama (II.) csoportjába volna sorolandó, amelynek tagjaiban legalább is a szivacs-parenchymabeli sklereïdfészkek képzése megindul (*N. adamantium* CAMB., *N. Brasiliensis* CHOISY, *N. guianensis* AUBL., *N. haematoscypha* GILG, *N. japurensis* MARTIUS, *N. oxystylis* BAILLON). Nyomozásaink e pontján sem állapodhatunk meg.

A *N. Lóczyi* levélperemének mechanikai tekintetben való szövettani vizsgálata során akadtam oly metszetekre, amelyek a palissadebéli palosklereïd-képzésre való hajlandóság kétségtelen példáit szolgáltatták, ha mindjárt szórványosan is (Tab. VIII, fig. 52 *psk*).

Alig vonható kétségbe, hogy a *N. Lóczyi* palissade-sejtjei során helylyel-közzel fellépő oszlopos keménysejtek (pálcza-sklereïdek), amelyek palissadebéli eredete nyilvánvaló, mert nem is egyebek, mint tágas gödörkékkal megvastagodott falu (következésképp mechanikai szerepre hivatott) palissade-sejtek, perdöntő jellegűek; amellet, hogy a guatemalai *N. Lóczyi*, a Brazília északi részeiben (secus Rio Negro) otthonos *N. gracilis*-szel együtt.

mely utóbbi palissadejában a pálcza-sklereidek fellépése csoportosan is gyakori (Tab. VIII, fig. 44 *psk*₂), a Noranteák phylogeniailag magasabb fejlettségű III. csoportjába tartozik. Mindezek azonban, az ugyane csoportba sorolható *N. aurantiaca* SPRUCE és a *N. cuneifolia* DELPINO-val egyetemlegesen már is jelentékeny számú *Norantea*-faj sorozatán át jutottak el a származástani lajtorja e magasabb fokozatára.

Ez a csoport a Noranteák sklereidek tekintetében kialakultabb alakzatai tömegében, úgy látom, hogy evolúcióban áll s hogy eddig ismert fajai között viszonylagosan a *N. cuneifolia* áll a legmagasabban; alaktanilag is igen jellemző szabású leveleinek mesophyllumában tömegesen láthatók a sklereïdfészkek, a palissade-alátámasztás nyilvánvaló célzatával, sőt oly és csoportosan fellépő pálczasklereidekkel, amelyek nem éppen lehetetlen kapcsolatot alkothatnak a IV. *Norantea*-csoport eddig egyetlen képviselőjéhez, az alaktanilag ugyancsak sajátos viselkedésű *N. Jussieui*-hez.¹

A nevezett *Norantea*-fajok alaktani viselkedésével karöltve jár az alaktani is, melynek kapcsán egyik-másik fajtát a floristikus-botanikusok megfelelő módon értékelni sem tudták (*N. gracilis* és *aurantiaca*!).

A palissade-álló palosklereidekben ugyanis én a rhizosklereidek kezdő formáinak megnyilatkozását látom, — valaminthogy a szivacsparenchyma sklereïdfészkeit is az astrosklereidek előőrsei (avagy -futárjai) gyanánt tekinthetjük.

Elvégre például a *Rhyschia platyadenia* szivacsparenchymabeli astrosklereïd-kezdetek (Tab. VI, fig. 36 *askk*) nem egyéb,

¹ Eddigi vizsgálataim szerint a Noranteák IV. csoportját egyedül a *N. Jussieui* TRIANA — PLANCHON teszi ki, palo- és astrosklereidek igen sajátos példájával. Az V.-be tartoznak rhizo- és astrosklereidekkel: *N. magnifica* GILG, *N. macrostoma* GILG, *N. sandiensis* GILG, *N. gigantophylla* GILG; a VI.-ba rhizo-, astro- és librosklereidekkel: *N. costaricensis* GILG, *N. Pardoana* WEBERB. et GILG; végül a VII.-be rhizo- és fajlagosan jellemző librosklereidekkel: *N. Uleana* PILGER, *N. macroscypha* GILG, *N. Sodiroi* GILG, *N. albido-rosea* GILG, *N. peduncularis* POEPP. (l. I. közl. Tab. IV, fig. 20).

mint oly sklereïdfészek, amelynek nyulványképzésbeli célzata nyilvánvaló s amelynek alapján feltehetjük, hogy ilyenekből fejlődnek (avagy fejlődhetnek) ki idővel az astrosklereïdek s ezekből az ophiurasklereïdek.

A *N. Lóczyi* szivacsparenchymabeli sklereïdfészkei, a palissade-álló palosklereïdek adott függőleges helyzetével ellentétesen, a lemez irányában horizontalisan nyúltak (Tab. VIII, fig. 48 *skn*), miként ama váladéktartó sejtek, amelyek erősen fénytörő secretumai sokszor láncolatokban követik egymást a fonákfelőli szivacsparenchymának második sejtrétegében (Tab. VIII, fig. 49 *vt*).

A *N. Lóczyi* epidermis mucigera-ként mutatkozó felső bőrrendszerén kívül (Tab. VII, fig. 47) a levélszövet egyéb rétegeiben a raphidnyalábok könnyen észlelhetők, sőt a levélfonák bőrsejtjeiben is (Tab. VIII, fig. 54 *r*). Nem fajlagos, de itt mégis felemlítendő jelenség, hogy a gyakran rekeszelt palissade-sejtek (Tab. VIII, fig. 51) egyike-másikának felső tagja egyszersmind raphid-tömlő (Tab. VIII, fig. 50 r_1-p_2), avagy a palissade-sejt többszörös vastagsága miatt feltűnő raphid-tömlő (Tab. VIII, fig. 49 r_1).

A *N. Lóczyi* légzőnyílásbeli készüléke, a legerősebb s jól alkalmazható száraz lencserendszerű nagyítás mellett, szerkezetiileg megjegyzésre méltó részleteket tüntet föl (Tab. VIII, fig. 56). Ennek taxonomiai jelentőségét e helyt azért kell hangoztatnom, mert a *N. Lóczyi*-nak a fentiekben részletezett alkattani magatartása tudvalevőleg a *N. gracilis*-széval párhuzamos, sőt leveleik alakilag alig is különböznek egymástól (Tab. VI, fig. 29, 30).

A *N. Lóczyi* fonákbeli bőrében a félholdalakú zárósejtek körvonalzata éles ugyan, de nem szabályos; a sarkokon némileg lapított körvonal kisebb-nagyobb kitérései sokszor cuticularis bibircsekkel terhelve, amelyek éppenséggel nem teszik a légzőnyílások külső cuticularis léceit oly szabályosan simává, amint hogy azt kisebb nagyítások alatt látjuk (Tab. VIII, fig. 54—55). E cuticularis lécek felületi képén a legfeltűnőbb az a belső, még inkább ama külső varrat (Tab. VIII, fig. 56 v_1-v_2), amely a cuticularis lécz gödörkéitől ered.

Viszont az ekként alkalmazott erős nagyítás, hogy úgy mondjam, a *N. gracilis* stoma-képén mit sem változtat; lényegé-

ben ugyanazt a szerkezeti körvonalzatot mutatja, mint például a *S. dasystachya* jóval kisebb nagyítással rajzolt stoma-képének a Tab. VII, fig. 41. rajzán, csak hogy éppen sűrűbben követik egymást a légzőnyílások. Ez rávall a Casiquiare és Rio Negro-melléki *Norantea* (9. 242) korlátlan transpirációjának a lehetőségére, amit a guatemalai *N. Lóczyi*-ről nem állíthatunk. Földrajzi elterjedésükben jelentékeny az eltérés s ennél fogva a tropusok buja életkörülményeivel szemben kevésbé kedvező viszonyok között él, a kellő ellenállás kifejtése érdekében transpirációját a légzőnyílások jóval csekélyebb számával (Tab. VIII, fig. 54) korlátoznia kell, amiben kétségtelen szerep jut a légzőnyílásbeli készülék fentebb vázolt szerkezetének is (Tab. VIII, fig. 56).

Mind a két bőr sejtjei a felületen egyenes falazatúak s váltakozó nagyságúak (Tab. VII, fig. 47; Tab. VIII, fig. 54); ezektől a légzőnyílások úgynevezett melléksejtjei sem igen térnek el, számuk úgy a *N. gracilis*, valamint a *N. Lóczyi* leveleiben 4-5 között váltakozik, de lehet 6 is (Tab. VIII, fig. 54). A felső bőr nagy felületein sem láttam raphidokat tartalmazó bőrsejteket, ellenben a *N. Lóczyi* fonákbeli bőrében igen (Tab. VIII, fig. 54 r), sőt megeshetik, hogy a légzőnyílásbeli készülék «melléksejtjeinek» egyike egyszersmind raphid-tömlő (Tab. VIII, fig. 55 r).

Nem czélom, hogy alkattani aprólékosságokkal alapozzam meg egy-egy növényfaj fajlagos jogosultságát; sőt készséggel elismerem, hogy e tekintetben jó sokáig, vagyis PARMENTIER úgynevezett *espèce morphologique*-ja keretén belül az alkattani vizsgálati eredmények fognak vezetni; ez oknál fogva szóban forgó novításaim úgynevezett diagnosisit szokás szerint meg is adom. Számos tapasztalás igazolja, hogy alaktanilag különböző növényfajok között lényegbe vágó alkattani eltéréseket sokszor nem konstatálhatunk, amint hogy az összehasonlító alkattan első sorban nem is a species-systematika, hanem a nagy rokonsági körzetekre kiterjedő származástani kérdések megoldását keresi, — észszerűen morfológiailag már is megalapozott ösvényen.¹

¹ Lásd az idevágó passzust és PARMENTIER idézett sorait a Math. és Természettud. Értesítő XXXIV. kötete 558. l.-ján.

Vérszemszerinti kapcsolatok végre nem csupán a külalaktani (exomorphologiai) bélyegek, mint inkább a belső szerkezeti (endomorphologiai) sajátosságokban megnyilatkozó karakter-vonások fonalán állapíthatók meg a megkívánható határozottsággal, tehát amaz életműszerek alkattani vizsgálatával, amelyek az élet hordozói s amelyek rendszeres összefoglalását az élettan alapján ma minden korszerűen bűvárkodó botanikusnak egyaránt ismernie kellene.

Így és csupán a jelzett bűvárkodási módszer útján tudjuk meg, hogy a *N. japurensis* MART., levélszerkezeti sajátosságaival, érinti a *N. gracilis*-t és a *N. Lóczyi*-t, kevésbé a származástaniilag alacsonyabban álló *N. paraënsis* MARTIUS-t. Viszont a *N. aurantiaca* SPRUCE palosklereidjei s palissade-támasztó sklereidfészkei rögtönösen a *N. gracilis*-re emlékeztetnek, bár mindezek a szó kritikusabb alaktani értelmében egymással szorosabb alkattani kapcsolatban úgynevezett jó fajok, akár a *N. peduncularis*-csoport tagjai (*N. peduncularis*, *albido-rosea*, *Uleana*). E csoport a fentiek bármelyikével szemben épp oly távol áll phylogeniailag, mint teszem azt a *N. Jussiaci* TRIANA et PLANCHON — alkattaniilag és növényföldrajzilag (Guadeloupe, Dominica: 9. 246) a legérdekesebb példák egyike! — valamennyi *Norantea* ellenében.

A *Norantea Lóczyi* származás-, illetőleg alkattani kapcsolatainak eme kifejtése után, alaktani leírását az alábbi diagnosisba foglalom össze, ama nem egészen teljes példány alapján, amely a Magyar Nemzeti Múzeum birtokában van (*II*₅).

Norantea Lóczyi sp. n. («*Norantea*?» *Ruyschia Mexicana* in Hb. Mus. Nat. Hung. — non BAILL.).

Frutex? Ramis teretibus 3—5 mm crassis, griseis, cicatricibus transversim elliptico-rotundatis, opacis, glabris, cortice non solubili vestitis, solidis; folia alterna internodiis longiora erecta, lamina ad 9.6 cm longa, 4.4 cm lata, ovato-cuneata, in $\frac{1}{3}$ superiore longitudinis laminae latissima, versus basin sensim in petiolum crassiusculum 5—6 cm longum angustata, in apice abrupte rotundato-angustata, et mucrone brevi mox deciduo munita, in margine integra paullum involuta (Tab. VIII, fig. 52), subcoriacea, fuscescenviridis, superne nitidula, costa crassiu-

scula et bene prominula, nervis lateralibus tenuibus parum prominulis, ante marginem arcuatim connexis, inferioribus sub angulo magis recto assurgentibus, venis reticulatis haud inconspicuis; glandulae hypophyllae (sec. GILG: hydatodus hypophyllus, sec. SOLEREDER: nectarium extranuptiale) versus marginem subseriatae, minutae, 0.2—0.5 mm latae, rotundae, parum prominulae, anguste pertusae (Tab. VI, fig. 29gl). Inflorescentia terminalis multiflora; flores pedicellati, pedicello tenui tereti striato, 8—10 mm longo, sepala suborbicularia ad 2 mm in diametro, integra. — Nectaria non visa. Fructus subglobosus 5—6 mm in diametro, glaber.

Habitat in Guatemala: Cubilquitz. 350 m. Jul. 1904. Coll. (Flora von Guatemala, Dept. Alta Verapaz) H. VON TÜRKHEIM Nr. 1030 in HbD.

A «Flora Brasiliensis» (9) összesen 15 *Norantea*-t ismer. Ezekből 10, tehát a legtöbb, Brasíliá végtelen tropusi területein él. *Norantea*-t különben Bolíviából, Peruból, Ecuadorból s Guyanából is ismerünk. Mind e *Norantea*-k közül a szárazulaton (continens) át, úgy látszik, hogy HUMBOLDT—BONPLAND—KUNTH *Norantea anomala*-ja jut el Nicaraguában (monte de Chontales: SEEMANN n. 7. R. TATE n. 20 [255] 9. 240) a legészakabbra, mert az újabban felfedezett GILG—PILGER-féle tropikus amerikai *Norantea*-k közül a *N. albido-rosea* a librosklereides *Norantea*k közül való és Costa Ricából lett ismeretessé.¹

A *Norantea*k földrajzi elterjedésében ez mindenesetre összefüggő láncolatot jelent, melynek legészakibb pontján a *Norantea Lóczyi* áll, Guatemalában, kb. a Kis-Antillák Guadeloupe és Dominica szigeteivel egy földrajzi szélesség alatt.

E szigetekén él viszont a Kis-Antillák eddigelé egyetlenül ismert *Norantea*-jaként a *N. Jussiaei* TRIANA et PLANCHON (9. 246), amely minden más *Norantea*-val szemben sajátosan eltérő alkattani viszonyaival tűnik ki.

Ezek szerint a *Norantea*-k földrajzi elterjedésében a Bolívia—

¹ Costa Rica: ad ripam Rio de Las Vueltas, Tucurrique (TONDUZ n. 13108. — Fruct. mense April.) — 31. 127.

Brazília—Guyanabeli vonalon át JUSSIEU *Norantea*-ja; — a Peru—Ecuador—Costa—Rica (continentalis) vonalon át pedig LÓCZY *Norantea*-ja jut el a legészakabbra az egyenlítő fölött, de még mindig jóval a Ráktérítő alatt, ami a szóbanforgó *Norantea*-k subtropusi szervezetében szerkezetileg kifejezésre is jut.

A Ráktérítő felé rohamosan megapad a *Marcgraviaceae* nemzetségeinek fajszáma és én úgy vélem, hogy csakis a földrajzi elterjedés adatai alapján — mik között könnyűnek látszik az eligazodás — szerepelhetett LÓCZY *Norantea*-ja «*Ruyschia Mexicana* BAILL.» néven, mely nevezet maga is, miként kifejtettem volt, helyesbítésre szorul (= *Souroubea exauriculata* DELPINO).

Immáron 27 év óta támogat engem Prof. dr. Lóczy Lóczy LAJOS, a budapesti tud.-egyetemen egykori mesterem, most mélyen tisztelt barátom, az ő ismeretesen nagy energiájának nemes példájával, mindmáig engem erősítő buzdításával. LÓCZY nevét, külföldi útjaimon állandóan tapasztalom, nagy tisztelettel emlegetik a legelőkelőbb természettudós körökben, mert a természettudományiakban — Khináról írott remekművén kívül csupán a Balaton monographiájára utalok — világgraszólót alkotott.

A magyar lángelme ez egyetemes hatása nevezetes, hálám pedig elegendő ok arra, hogy ez a guatemalai s növény-földrajzilag kiválóan érdekes *Norantea* az Ő nevét viselje.

B) A vizsgálat tárgyát tevő herbariumi példányok tüzetes sorozata.

A sorszám szerinti jelzések megfelelnek a szövegben előforduló és rendszerint zárójelben foglalt hasonló jelzéseknek.

H₅. Norantea? (más írással «*Ruyschia Mexicana* BAILL.» lásd: Adansonia, Vol. X. 1871—73 p. 241). — Cubilquitz, 350 met. «Parasitisch» (rectius: epiphytisch) auf *Lonchocarpus*. Jul. 1904. Coll. H. v. TÜRKHEIM. Flora v. Guatemala. Dept. Alta Verapaz. No. II. 1030. In HBD. (= Herb. Mus. Nation. Hung.). = *Norantea Lóczyi* AL. RICHT.

H₆. N. guianensis AUBL. var. *gracilis* WITTM. — Secus Rio Negro, Brasiliae septentr. inter Barra et Barcellos. Coll. R. SPRUCE, Nov. 1851. No. 1885. Vide: WITTMACK 9. 242. — In HV. (= Herb. Mus. Palat. Vindobon.).

H. *Souroubea exauriculata* DELPINO (9. 254). — Mexico: Mirador, LIEBMANN 5. 1842. in HB (= Herb. Mus. Botan. Berlin.).

H. *S. dasystachya* E. GILG sol. nom. ined. 1913. — Rio Branco Surumu: Febr. 1909. — E. ULE: Herb. Brasil. Amazonas-Exped. No. 8422 in HB.

H. *Ruyschia platyadenia* GILG in ENGLER: Jahrb. 1898. p. 34. Brasilia: Rio de Janeiro. Petropolis, am Ufer des Rio Piabanha (Glaziou Nr. 16365). Ex. Herb. Ign. Urban in HB.

C) Ábramagyarázat.

(A rövidítések magyarázó sorozatát lásd a Math. és Természettud. Ért. XXXIV. köt. 582—84. lapján)

VI. tábla.

Fig. 29. *Norantea Lóczyi* levele fonáka felől, t. n. (*H*₅).

- 30. *Norantea gracilis* (WITTM.) pro. var. *N. guyanensis* AUBL. (9. 242) egyik levele a fonáka felől, t. n. (*H*₆).

Souroubea exauriculata DELPINO (*H*₇).

Fig. 31. Egyik legnagyobb levele a fonáka felől, t. n.

- 32. Részlet a levél α -irányú (= Tab. I, fig. 1 x—x). k. m.-éből, nyálkás bőrsajttal és a palissade-rétegben a rendestől eltérő fekvésű raphid-köteggel. — Z. Oc. 2. Ob. C.
- 33. *Souroubea dasystachya* E. GILG egyik levele a fonáka felől, t. n. (*H*₈).

Ruyschia platyadenia GILG (*H*₉).

Fig. 34. Levél a fonák felől, t. n.

- 35. K. m.-i részlet a levél-lemez α -irányában, palosklereiddel és raphid-köteggel. — Z. Oc. 2. Ob. C.
- 36. A levél α -irányú k. m.-éből, a szivacs-parenchymabeli astrosklereid kezdetével (avagy kezdeményével = Anlage). — Z. Oc. 2. Ob. C.
- 37. Levél fonákfelőli bőre nyálka-sejtekkel (*n*) és légzőnyílásokkal (*s*). — Z. Oc. 2. Ob. DD.

VII. tábla.

Fig. 38. Részlet a levél i -irányú (= Tab. I. fig. 1 i—i) k. m.-éből, styloid- és raphid-tömlővel. — Z. Oc. 2. Ob. C.

- 39. Egy üres styloid-tömlő a lemez i -irányú k. m.-éből. — Z. Oc. 2. Ob. C.

Souroubea exauriculata DELP. (H_7).

Fig. 40. A levél k. m.-i részlete a lemez x -irányából, valamennyi rétegében raphidokkal és mindkét felől epidermis mucigera-val. — Z. Oc. 2. Ob. C.

Souroubea dasystachya GILG (H_8).

Fig. 41. Levélfonák bőr-részlete, bőr-alatti raphid-köteggel. — Z. Oc. 4. Ob. C.

« 42. Levélperem k. m.-e (= Tab. I. fig. 1a—b).

« 43. A levél k. m.-i részlete a lemez x -irányában. — Z. Oc. 2. Ob. C.

Norantea gracilis (WITTM.) AL. RICHT. (H_9).

Fig. 44. A levél k. m.-i részlete a lemez x -irányában. — Z. Oc. 2. Ob. C.

« 45. A levél fonák felőli k. m.-i részlete a lemez x -irányában. — Z. Oc. 4. Ob. C.

« 46. Bőr-részlet a levél színéről, felülről tekintve. — Z. Oc. 2. Ob. DD.

Norantea Lóczyi AL. RICHT. (H_5).

Fig. 47. Bőr-részlet a levél színéről, felülről tekintve. — Z. Oc. 2. Ob. C.

VIII. tábla.

Fig. 48. A levél k. m.-e a lemez x -irányában. — Z. Oc. 2. Ob. C.

« 49. A levél x -irányú k. m.-e, feltűnően nagy (palissade-beli) raphid-tömlővel (rt_2). — Z. Oc. 2. Ob. C.

« 50. Részlet a levél x -irányú k. m.-éből, feltűnően nagy és rekesztett palissade-sejttel, melynek felső tagozata egyszersmind raphid-tömlő (rt_2). — Z. Oc. 3. Ob. C.

« 51. Részlet a levél x -irányú k. m.-éből, palosklereiddel, sklereidfészekkel és rekesztett (p_2) palissade-sejtekkel. — Z. Oc. 3. Ob. C.

« 52. Levélperem k. m.-e (Tab. I. fig. 1 a—b irányban). — Z. Oc. 2. Ob. C.

« 53. Részlet a levél fonák k. m.-éből. — Z. Oc. 4. Ob. C.

« 54. Fonák felőli levélbőr egy nagyobb darabja, felülről tekintve, a légzőnyílások dispositiója s a változó számú melléksejtek feltüntetése okából. — Z. Oc. 2. Ob. C.

« 55. Ugyanennek egy kis részlete erős nagyítással; a légzőnyílás készülékének egyik melléksejtje egyszersmind raphid-tömlő. — Z. Oc. 3. Ob. DD.

« 56. A légzőnyílás készüléke felülről nézve s igen fokozott szárazlencserendszerű nagyítással. — Z. Orth. Oc. 6. Ob. DD.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1915 okt. 18.-án tartott üléséből.)

A MARCGRAVIACEAE NEHÁNY ÚJ ALAKJÁRÓL,
A SZÁRMAZÁS- ÉS AZ ÖSSZEHASONLÍTÓ ALKATTAN ALAPJÁN.

III.

Norantea Zahlbruckneri Al. Richt., vonatkozással a *Norantea*
cacabifera G. Don-ra és a *N. microscypha* Gilg-ra.

IV.

Souroubea Gilgi Al. Richt., vonatkozással a *Souroubea*
lepidota (Miqu.) Al. Richt., a *S. exauriculata* Delpino és a
S. dasystachya Gilg-ra.

(IX—XIV. tábla.)

RICHTER ALADÁR I. tagtól.

III.

A) *Norantea Zahlbruckneri* AL. RICHT.

A BARBEY-től birtokolt BOISSIER-féle herbarium (Chambésyben Genf mellett) néhány Marcgraviaceáját a gyűjtemény conservatora, BEAUVERD GUSTAVE úr szíves volt nekem elküldeni, főleg a «*Marcgravia macrocarpa*» kérdésének tanulmányozása okából, amiről jelen munkálatom I. részében be is számoltam.¹ Közöttük találtam egy, a «Herb. Pavon»-ból eredő «*Noranteát* «Fl. Huayaquil» jelzéssel. A BOISSIER-herbarium kezelési szokása szerint másolatban melléje adott növénycédula szövege: «*Sp*^s Pentandria monogynia Cl. 13. Fl. Huayq. No. 459 L. 666. *Marcgravia* Fl. Per. 1864: *Ruyschia* JACQUIN» -- melyhez GILG következő megjegyzése fűződik: «*Norantea cacabiferae* aff. sed nervatura diversa. — Sed nectariis deficientibus non describende!» A nectariumokat csaknem nélkülöző példány mel-

¹ Math. és Term.-tud. Ért. XXXIV. kötete 567. és köv. lapjain.

lett csupán egyetlen levél van (Tab. IX, fig. 57), melyről GILG helyesen jegyzi meg azt, hogy erezetével valóban különbözik a *Norantea cacabifera*-étől (Tab. XI, fig. 70); azonkívül e 13 cm hosszú és 5–6 cm széles levél majdnem kétsoros fonákbeli mirigyekkel (glandulae hypophyllae subbisseriatae), nemkülönben vékonyabb levélhúsával is elüt amattól. A *N. cacabifera* erősen kiemelkedő oldalerezete feltűnően parallel íveket ír le; ezeken nyomban megérzik, hogy mechanikai szerepük jelentős a levél életében (Tab. XI, fig. 71 bt_{1-2}). Mindezek az alaktani eltérések egy-szersmind alkattaniak is.

A BOISSIER-gyűjteménynek ez a *Norantea*-ja (H_{10})¹ a maga bifacialis mesophyllumában nagyjában a *N. cacabifera*-ével (H_{11-12}) azonos szerkezetű (Tab. IX, fig. 59; Tab. XI, fig. 71), de keskenyebb mesophyllumának lazaságát növeli az, hogy lacunosus szivacsparenchymáján kívül a palissade sem mondható tömöttnék, főleg a minduntalan, sokszor aránytalanul nagy hólyagokban beléjük mélyedő bőr-nyálkasejtjei miatt (Tab. IX, fig. 59 $n-n_3$), amik alatt a palissade-sejtek teljesen eltörpülhetnek (Tab. IX, fig. 60 n_2-p_{1-3}). Az efféle képletek, amennyiben egy ily törpe palissade-sejt raphid-tömlővé öblösödik ki, annyi-val feltűnőbbek (Tab. X, fig. 64 n_2-r). Megesik, hogy az ekként kialakuló raphid-tömlő, a mélyen beöblösödő bőrszöveti nyálkasejt miatt, úgy tűnik föl, mintha már is a szivacsparenchymában volna, a mint hogy a palissade-álló raphid-tömlőt a szivacsparenchymabeli nyomban követheti is (Tab. IX, fig. 60 r), valamint akad példa arra is, hogy a raphid-tömlővé alakuló palissade-sejt látszólag a nyálka-sejtbe nyomul be (Tab. IX, fig. 59 n_1-r_1). Mindez egyrészt a levélszövetnek raphidokban való gazdagságára vall, még a fonákbeli bőrszövetekben is gyakoriak (Tab. X, fig. 63 r); másrészt a kombinációk változatosságára, amire nem minden *Norantea* szolgáltat hasonló példát. A *N. cacabifera* például már kevésbé elnyálkásodott bőrszöveténél s annyi-val tömöttebb mesophyllumánál fogva sem ilyen (Tab. XI,

¹ A vizsgálat tárgyát tevő herbariumi példányokat a szöveg végén III. B) fejezet alatt sorolom fel; H_{11} , H_{12} ... a szövegben foglalt hasonló jelzéseknek felelnek meg.

fig. 71; Tab. XII, fig. 74); minderre a levélperemek k. m.-ei meg éppen jellemző példák (Tab. IX, fig. 58; Tab. XII, fig. 77).

A kemény falazatú elemek egyedüli képviselői gyanánt csupán sklereid-fészkek észlelhetők a *N. Zahlbruckneri* mesophyllumában, mondhatnám, hogy e czímen is kezdetleges alakok (Tab. IX, fig. 59 *skn*) s minden mechanikai jelentőség nélkül valók. A terjedelmes levél-lemez mechanikai érdekét csupán az oldalerezet háncs-sarlója szolgálja, a mely, főleg a leptoma felől, igen erőteljes (Tab. IX, fig. 59 *bt*₂): a hadroma felőli néhány keményháncrest mit sem számít a szó mechanikai értelmében, ami a stélék hosszanti metszetéből szemléletileg is nyomban kitűnik (Tab. X, fig. 64 *bt*₁). E pontban megtehetjük a szóban forgó két *Norantea* erezetbeli nagy különbségének az alapját (Tab. IX, fig. 57; Tab. XI, fig. 70), és pedig az alkattani configuration alapján (Tab. IX, fig. 59; Tab. XI, fig. 71 *st*—*st*).

Az elsődleges (t. i. oldal-) erezettel parallel metszetekben látni való, hogy a palissadenak (a szónak inkább élettani értelmében vett) «gyűjtő-sejtjei» alatt végig futó sklerenchyma csupán phylogeniai jelentőségű, amennyiben jelzi, hogy e *Norantea* edény-nyalábainak hadroma felőli részén is megnyilatkozik a palissade-alátámasztás czélzata, hiányában az arra alkalmas s voltaképeni sklereideknek (Tab. X, fig. 64 *bt*₁), de amely a maga teljes erőteljességében csakis a *N. cacabifera*-ban jut érvényre (Tab. XI, fig. 71 *bt*₁; Tab. XII, fig. 75 *bt*₁). Ellenben a leptoma felőli háncsnyaláb egyaránt erős s a kettő között fokozatilag sem igen tehető különbség (Tab. IX, fig. 59 *bt*₂; Tab. XI, fig. 71 *bt*₂), épp úgy, mint például főleg az erezet mentén oly jellemzően kialakult cuticulái között; a *N. cacabifera*-ról adott Tab. X, fig. 69 rajz a *N. Zahlbruckneri*-éra is ráillik.

A szivacs-parenchyma fonák felőli zónájában világos-sárga tartalmú váladektartók mind a két *Norantea*-ban észlelhetők (Tab. IX, fig. 59 *vt*; Tab. XI, fig. 71—73 *vt*).

A levélélbeli k. m. a mikroskopium alatt is épszélűnek mutatkozik, a színbeli bőrsejteket borító vastagabb s finoman bibircses cuticulának némi áthajlásával a fonákbeli bőrsejtek felé; ez a cuticula azután pár sejttel odébb vékonyodik el a fonákbeli bőrsejtek felett (Tab. IX, fig. 58 *e*₁—*e*₂).

A lemez vékonyságával függ össze, hogy a mesophyllum differentiálódása nem indul meg nyomban a levél élében, hanem mintegy 8—10 sejtnyi távolságban, ahol is az alig megeredő palissade-sejteket az üregében hatalmas bőrbeli nyálkasejt nyomban el is nyomhatja (Tab. IX, fig. 58 n_2-p_{1-2-3}).

A felső bőr hálózatainak félületi képe voltakép a *N. gracilis* (Tab. VII, fig. 46)-éhoz hasonló.

A meglehetősen sima s vékony, csak helylyel-közzel aprón bibi-reses cuticulával borított fonákbeli bőrsejtek között a légzőnyílások, sokszor párosával egymás mellett, szigorúan a bőrsejtek szintjéhez alkalmazkodnak (Tab. IX, fig. 59, 61; Tab. X, fig. 64 $s-s$) s nyoma sincs a légzőnyílásbeli készülékek ama sajátos bemélyedésének, ami a *N. cacabifera*-t a *Noranteák* valamennyi eddig ismert fajával szemben fajlagosan jellemzi (Tab. XII, fig. 74, 75, 76, 77 $s-s$), — elannyira, hogy a két *Norantea* phylogéniai kapcsolata hirtelenében erőltetettnek is tűnhetik fel főleg a légzőnyílások szerkezetbeli különbözősége miatt.

Ámde ha fokozott nagyítással vizsgáljuk a *N. Zahlbruckneri* légzőnyílásait, figyelmünket nem kerülheti ki, a zárósejtek cuticularis léczének dudorképzésén kívül (Tab. IX, fig. 61 $d-d$), főleg az egymást követő légzőnyílások közvetlen érintkező «melléksejtjeinek» dudorképzése (fig. cit. $m_1-m_2-d_2$), mert ez az a jelenség, bármily csekélynek is tessék, amely egyszerűsmind a két *Norantea* szorosabb kapcsolata mellett szól.

Ha ugyanis a szóban forgó légzőnyílások melléksejtjeinek e dudorképzését elméletben tovább fejlesztjük, akkor könnyű elképzelni, hogy a Tab. IX, fig. 61 d_2 -vel jelölt dudorok kiemelkedő túltengésével áll elő ama külső légudvar, melynek alapi részében változatlanul ott látjuk a zárósejteket (Tab. XII, fig. 76 kl , illet. m_1-m_2), és pedig igazában épp úgy a bőrsejtek sorában fig. cit. $z-e_2$), mint a *N. Zahlbruckneri*-nél (Tab. IX, fig. 61 $z-e_2$).

A kettőnek egymáshoz való viszonyában azonban az előrehaladó fejlődés kétségtelenül a *N. cacabifera*-t illeti, melynek támogatására a származástanilag szintén jelentős astrosklereidképzést is felhozhatom (Tab. XI, fig. 71 $askk$).

Mindamellett érthető, hogy a *N. Zahlbruckneri* fonákbeli bőrénél a képe felülről tekintve egészen más (Tab. X, fig. 63), mint a *N. cacabifera*-é, és pedig a légzőnyílásokat környező bőr (mellék)-sejtek szintbeli eltérései miatt; a *N. cacabifera* élesre beállított bőrsejtbeli hálózataiban ugyanis a mélyen fekvő légzőnyílásbeli készülékek elhomályosulnak a mikroskopium látómezőjében (Tab. XIII, fig. 78).

Mind a két *Norantea* közös hazájául eddig Guayaquil (Huayaquil) ismerjük és azért aligha végzek e helyt fölösleges munkát a *N. cacabifera* főbb alkattani tulajdonságainak a kifejtésével.

Norantea cacabifera G. DON (*H*₁₁₋₁₂).

Ez a *Norantea* a sajátosabb alkattani viselkedésű *Noranteák* közül való; jóllehet levelei igen nagyok s bőrneműek¹, bifacialis mesophyllumának a palissade-jában nyomát sem láttam a sklereidnek.

Az eredeti PAVON-féle berlini példánnyal (*H*₁₁) tökéletesen megegyezik a BOISSIER-féle (mely utóbbinak legnagyobb levele 17 cm hosszú és 7.2 cm széles), önként értetődőleg alkattaniilag is.

E *Norantea* levelei, a levél nagy arányaihoz mérten, mindamellett a kevésbé húsos levelek közé tartoznak. A palissade a mesophyllumnak átlag egyharmada: a lemez mechanikai szilárdságát (kimerevítését) az oldalerezet mindkétoldali háncsarlója biztosítja első sorban (Tab. XI, fig. 71 *bt*₁—*st*—*bt*₂), melynek passivitását főleg az erezet fölötti, vastag s kisebb-nagyobb behasadásaival jellemző alkotású cuticula, a kellő hajlékonyság meggátlása nélkül, emeli (Tab. X, fig. 69 *c*).

A raphidoknak a Marcgraviaceáknál megszokott képe mellett feltűnő a sklereidok általános hiánya a szivacsparenchymában is; csakis a sklereidfészkek csökevényes alakjai észlelhetők itt-ott, esetleg csoportosan s a palissade-alátámasztás célzatával (Tab. XI, fig. 73 *skn*). E képletek kezdetlegességére vall a

¹ Foliis maximis, oblongis... 16—19 cm longis, 7—8 cm latis, petiolo 1—1½ cm longo, coriaceis, nervis prominentibus, glandulis hypophyllis fere nullis» (9. 241).

sejtfalak hálózatos vastagodási formája, amit a BOISSIER-féle példány (H_{12}) vizsgálata alkalmával észleltem. Merő véletlen, hogy az elsődleges ér k. m.-e mellett egy ízben egy oly sklereidet találtam, amely -- mintegy astrosklereidbeli kezdemény gyanánt — egy sklereidfészek további fejlődési fokozatául tekinthető (Tab. XI, fig. 71 *askk*). A minden irányban mutatkozó nyulványkák egyikén már is megnyilatkozik a palissade alátámasztás tendenciája, mely -- tudvalevőleg — elsőrendű szereppel bír a teljesen kifejlődött sklereidképletek részéről.

Ehhez képest, legalább a sejtfalak erős megvastagodását illetőleg, fejlettebb alakzat a Tab. XI, fig. 72 *sk*, melyre a BOISSIER-féle *N. cacabifera* levél-paratúltengéseinek vizsgálatakor bukkantam, véletlenül; központi teste tipikusan brachysklereidképző. E sklereid «astrosklereid jellege» mellett jobban bizonyít — egy másik hasonló vizsgálati esetről kifolyólag — a Tab. X, fig. 68 *sk* példája, a sklereid gyökérnyulványának villás elágazásával. Ezeket a sklereideket mind a két esetben, miként a Tab. XI, fig. 71-ben feltüntetett astrosklereid-kezdeményt, a stelék környezetében találtam. Mondanom sem kell, hogy phylogeniailag amily értékesek e keménysejtek, mechanikai tekintetben, nagy szórványosságuknál fogva, éppannyira jelentéktelenek.

E képletek ritkaságával függ össze, hogy a mesophyllum képe a lemez *i*-irányú metszeteiben is ugyanaz. A sklereidek általános hiányának pótlásaként annyal jelentősebb mechanikai szerephez jutnak a stelék felső s alsó hancsnyalábjai (Tab. XII, fig. 75 bt_1 — bt_2); ezek közül a felső ugyanazt a feladatot tölti be, mint a palissade-álló sklereidek palissade-alatti nyulványaiból s a palissade-alatti librosklereidekből alakult felső kábel például a *N. macroscypha*-ban (Tab. IV, fig. 20 *fk*). A librosklereidek úgynevezett alsó kábelnyalábját pedig a stelék erőteljesen kifejlődött leptoma felőli hancsnyalábja bőségesen pótolja (Tab. IV, fig. 20 *ak*; illet. Tab. XII, fig. 75 bt_2).

Legjellemzőbb azonban a légzőnyílások helyzete, környező bőrsejtjeinek kialakulása a *N. cacabifera* leveleiben.

Tekintsük ezeket a lemezek akár *x*-, akár *i*-irányú metszeteiben, hirtelenében oly bizarr egyveleg a fonákbeli bőrsejtek egymásutánja, hogy igen jó metszeteiken is hosszabb szem-

léletbe kerül a légzőnyílások záró-, mellék- s egyéb bőrsejtjei között a kellő kiigazodás, minthogy megeshetik, hogy a légzőnyílások úgyszólván követik egymást (Tab. XII, fig. 74—75 e_2-e_2).

A stomáknak a *N. Zahlbruckneri*-éhoz (Tab. X, fig. 63) mérten jóval nagyobb sűrűsége főleg a fonákbeli bőr felületi áttekintésénél ötlík szembe; a légzőnyílások «melléksejtjei» gyanánt majd minden bőrsejt le van foglalva, elannyira, hogy az ekként szegélyezett stomák «udvarai» a legtöbbször bőrbeli (azaz «melléksejtekként» nem functionáló) sejtek kiküszöbölésével közvetlenül érintkeznek egymással (Tab. XIII, fig. 78). E berendezkedés topographiáján a stélék mit sem változtatnak; fölöttük (illetőleg alattuk) a bőr képe egyforma. A mint hogy a légzőnyílások szórt, tehát minden orientálódás nélküli helyzetére vall a lemez *i*-irányú metszete is, mely stomát keresztben s hosszában érhet egyaránt (Tab. XII, fig. 74—75 $s-s$).

A zárósejtek, főleg a cuticularis lécz mögötti «árok-képzésével», önmagukban megegyezők a Marcgraviacea-zárósejt szokott képével (Tab. XII, fig. 76—77 $z-z$). Csupán a zárósejtekkel közvetlen kapcsolatos bőr (mellék-)sejteknek a zárósejtek fölébe való kitüremkedése egyfelől, amely a külső légudvar képzésére vezeti másfelől a cuticulák jellemző alakulása az, ami a *N. cacabiferat* minden más *Norantea*-tól rögtönösen megkülönböztethetővé teszi. Az úgynevezett melléksejtek «cuticularis dudorai» egyszersmind a külső légudvar határoló léczzei, amelyek a belül eső zárósejtek cuticularis léczzeinek «physiologiai munkáját» némiképp támogathatják (Tab. XII, fig. 76 c_2-c_2-zc). A külső légudvarok a fonákbeli bőr felületi képén szabálytalanul kerekded üregek; ezek alji részén mutatkoznak a légzőnyílások elmosódó körvonalai (Tab. XIII, fig. 78). A mikroszkopium mélyebb beállításánál éles körvonalaiban tűnik elő a légzőnyílások megszokott *Norantea*-typusa, 4 vagy 5, ritkán 6 melléksejttel (fig. cit 1—4—5). Mindez a gyakorlati rendszertan szempontjából oly jellemző, hogy egy hirtelenében készült felületi metszet (avagy bőrlevonat) alkalmas e *Norantea* meghatározására, illetőleg minden más *Norantea*-tól való megkülönböztetésére.

Ha nem is oly mértékben, ám elnyálkásodott sejtjei homályos udvaránál fogva eléggé szembetűnő képet mutat a fel-

bőr is a maga felületén, bár korlátozottan, de nem minden változatosság nélkül. Megesik, hogy a bőrsejtek szabályszerűen koszorúzzák körül az elnyálkásodott bőrsejtet, mely lehet kisebb (Tab. X. fig. 66), avagy nagyobb (fig. 67). Ez utóbbi esetben a bőrsejtek szinte eltörpülnek az elnyálkásodó sejt mellett; egyébiránt nagyság és a sejtek egymáshoz való viszonya tekintetében sok a változat (fig. 65). A felső bőr sejtjeiben, miként a fonákbeliekben, észleléseim szerint nincsenek raphidok; annyi-
val több van a *N. Zahlbruckneri* fonák felőli bőrsejtjeiben (Tab. X, fig. 63).

Az alaktaniak összefoglalásaként az alábbiakban adom a *N. Zahlbruckneri* diagnosisát a BOISSIER-BARBEY-herbarium (*H*₁₀) példányai alapján:

Norantea Zahlbruckneri sp. n.

(Nor. cacabiferae aff. GULE ms. in HBB.

Frutex? Folium unicum (Tab. IX, Fig. 57) obovatum, versus basin sensim angustatum, 12.7 cm longum, 5.6 cm latum, in petiolum usque 10 mm longum superne canaliculatum abiens, in apice rotundatum, in margine integerrimum et passim angustissime incurvum, membranaceum utrinque glaberrimum, superne obscure viride, subtus cupreofuscescens, costa crassiuscula, prominula, nervis primariis in pagina infera prominulis, tenuibus, subflexuosis, nervis superioribus ante marginem arcuatim connatis, venis reticulatis; inflorescentia unica terminalis elongata, 31 cm longa, rhachide in parte inferiore 5—6 mm crassa et versus apicem sat abrupte extenuata, glaberrima, tereti, multiflora; flores sessiles \pm distantes; nectarium pedicellatum, pedicello applanato, inferne excavato ad 2 mm longo et ad 0.7 mm lato, subsemigloboso, parum latius quam altum, integrum, excavatum; sepala suborbicularia integra, in margine anguste scariosa circa 1 mm in diametro; petala suborbicularia ad basin brevissime connata ca. 1 mm in diametro, persistentia; fructus sessilis, globoso-ovalis, glaber, stigmatibus brevissimo obtuso coronatus.

Norantea cacabifera G. DON differt foliis maioribus subcoriaceis, mucronatis, nervatura alia et nectariis omnino aliter formatis.

Habitat prope Guayaquil: PAVON.

Ecuador e *Norantea*jának a BOISSIER-BARBET-herbariumban őrzött egyetlen PAVON-féle példánya történelmi emlékként viseli magán a régmúlt idők patináját. Megmentése a tudomány számára egyszersmind dr. ZAHLBRUCKNER SÁNDOR, a világszerte ismert lichenographus, a Lobeliaceák jeles buvára és hazánk fia iránt érzett régi és hálás barátságom emléke, aki a Naturhistorisches Hofmuseum növénytári osztályának vezetőjeként sok magyar botanikus munkáját könnyítette meg Bécsben.

A Flora Brasiliensis (9. 258) szerint Ecuadorból egyetlen *Norantea* ismeretes, és pedig az ugyancsak Guyaquil vidékéről való *N. cacabifera* G. DON képében, amelyről WITTMACK találón jegyzi meg, hogy «Bracteis pyriformibus, foliis maximis, superne nervis secundariis et nervo marginali valde prominentibus insignis» (9. 241).

Szorosabban Ecuadorot illetőleg ez a minimalis fajszaám, GILG buvárlatai révén, hárommal gyarapodott. Ezek egyike a *N. microscypha* GILG (21. 32), voltakép egy régi s SPRUCE-féle növény (No. 6020; Ecuador: Lucumas) helyesebb fölismerése, amit WITTMACK, részint a SPRUCE-féle növény korának («forma junior» 9. 240), részint a *N. anomala* H. B. K. helytelen fajbeli mérlegelése alapján csupán a *N. anomala* fajváltozatának tekintett (9. 240).

GILG másik két *Norantea*-ja, nevezetesen a *N. Sodiroi* s az ugyancsak Ecuadorbeli *N. gigantophylla* (32. 14) az ecuadori Andeseknek oly annyira jellegzetes s a *N. Zahlbruckneri*-től alaktanilag is merőben eltérő faja, hogy alkattanai sajátosságaik fejtegetése e helyt merőben felesleges. A *N. Sodiroi*-t GILG a *N. macroscypha*-val hozza kapcsolatba, a mely tudvalevőleg a librosklereidés *Noranteák* egyik typusa (Tab. I, fig. 7; Tab. IV, fig. 20); a *N. gigantophylla* pedig — nem tekintve a névben is kifejeződő levélbeli nagyságát — sklereidjeinek szintén «gigantikus» méreteivel egyedül áll az összes eddig ismert *Noranteák* között. Ilyenformán — szemmeltartva a mesophyllum sklereid-hiányát — alkattanilag csupán a *N. microscypha* volna a *N. Zahlbruckneri*-vel némi kapcsolatba hozható, mert GILG e *Noranteája* a kis-levelű *Noranteák* közé s a *N. cacabiferá*-tól

alakitanilag egészen eltérő kategóriába tartozik (21. 32). Úgy ennek, valamint a vele egy és más tekintetben vonatkozásba hozható *N. anomala* HBK. valamint az ugyancsak félreismeret *N. aurantiaca* SPRUCE s az újabban herbariumszerűleg publikált *N. droseriformis* RUSBY (sol. nom. in 21. 32) taglálása az összehasonlító alkattan alapján most nem lehet földadatom tárgya; ez utóbbiak Brasilia Amazonas-melléki, illetőleg Bolivia Noranteái. Csupán arra szorítkozom, hogy a *N. microscypha* 7–11 cm hosszú és 3·5–5·5 cm széles leveleinek a k.m.-ével, vagyis a lemez mindkét irányban való metszeteiben egyazon képpel, alkattanilag a legegyszerűbb szerkezetű *Noranteák* egyike. Kemény sejtjeinek egyedüli képviselői a sklereid-fészkek a mesophyllumban, a palissade alátámasztásnak itt is jelentkező célzatával (Tab. XIII, fig. 79 *skn*). E sklereid-fészkek gyakoriak, főleg a mesophyllum középső zónájában, s tekintve azt, hogy a lemez mind a két (metszésbeli) irányában észlelhetők olyanok, amelyek tangentiálisan nyultak (Tab. XIII, fig. 79–80 *skn*₁) s hogy a lemez különben sem terjedelmes, némi mechanikai jelentőséget tulajdoníthatunk nekik. Ebbeli szerepüket természetszerűleg egészíti ki az oldal-erezet leptoma felőli kemény hánccs-nyalábja (Tab. XIII, fig. 80 *bt*₂).

A sklereid-fészkek alkattani viselkedése a tagjaiban fent megnevezett *Norantea*-csoport körébe vonja a *N. oxystylis* BAILL.-t, a *N. japurensis* MART.-t, sőt a *N. brasiliensis* CHOISY-t is, jeléül annak, hogy viszont a valódi (astro-, libro- stb.) sklereidek mechanikai, valamint phylogeniai jelentősége annyival nagyobb (esetleg taxonomiailag is) a *Noranteák* többi fajánál (*N. peduncularis* csoportja, *N. Jussiaei*).

A *Norantea Zahlbruckneri*-vel az Ecuadorból ismert *Noranteák* fajszáma ötre emelkedik, meghaladva a perui *Noranteák* «Flora Brasiliensis»-beli fajszámat (= 3, sec. 9. 258). Ámde az újabb idők kutatásai révén Peru-ból is több új *Norantea* lett ismeretessé (*N. macroscypha*: 21. 31–32; *N. Uleana*: 29. 155; *N. Pardoana*, *sandiensis*, *haematoscypha*, *magnifica*: 31. 125 et sequ., *N. Eötvösorum*: I. r. a jelen munkálatban), úgy, hogy az eddigi bűvárlatok fejlődéséből bizvást azt következtethetjük, hogy egy esetleges ecuadori botanikai

expeditio a Marcgraviaceae nemzetségeit bizonyára több jeles faj ismeretével gyarapíthatná.

A Noranteák közül eddigelé, a 9., 21., 29., s 31. megbízható adatai szerint, összesen 27-et jól ismerünk; ehhez hozzáadandó volna a jelen munkálat három új *Norantea*-ja. E szerint a WITTMACK-féle *Marcgraviaceae*-munkálat (9) 1878. decz. 1.-én történt publikálása óta az ismert fajok száma megkétszereződött.

Ez az ismeret azonban kizárólagosan alaktani jellegű.

Viszont, e cikksorozat bevezetésében kifejtett vizsgálati módszer alkalmazásával, a jelen munkálat valamennyi *Norantea*-jára vonatkozó összehasonlító alkattani adatok újak, a melyek csoportosításában, a származástan követelményei szerint, jobbadán csakis a szóban forgó új *Norantea*-ra szorítkoztam.

IV.

A) *Souroubea* Gilg AL. RICHT.

Az AUBLET-féle *Souroubea*-nemzetséget (Guian. I. 244. t. 97) a BENTHAM-HOOKER Gen. Plantarum (3. I. 181) hagyományaihoz ragaszkodó Kew-Index Jacquin *Ruyschia*-jával (Sel. Stirp. Amer. Hist. 75. t. 51. f. 2) egy kalap alá fogja. Az előző fejezetek során szó esett arról, hogy helyesebb rendszertani fel fogásra vall a két nemzetség (= genus) különválasztása (9. 247. 250; 18. 162, 164). A *Ruyschia* magháza 2-rekeszű s mind-össze három jó fajt ismerjük (*R. chusinaefolia* Jacq., *R. sphaerodenia* DELPINO, 9. 248—9; *R. platyadenia* GILG 21. 34—35); ami azon túl szerepel az irodalomban *Ruyschia* néven, az mind a magházában 4—6-rekeszű *Souroubea*-hoz tartozik. A szorosabban ide tartozó fajok számát WITTMACK csupán 4-re teszi (9. 257), minthogy AUBLET *S. guianensis*-éhez von egy sereg MARTIUS-, MIQUEL- s WILLDENOW-féle fajt is (BENTHAM-et és TRIANA-PLANCHON-t ide nem is számítván), akik éppenséggel sem voltak az úgynevezett «kis fajok» hívei. Nem is valószínű, hogy egyetlen *Souroubea*-faj csupán fajváltozatokban foglaljon le egy oly óriási földseget, amely az egész tropusi s subtropusi

Amerikát magába zárná, Brasiliával, Peruval. Guianával együtt Nicaraguáig.

Az isomorph Marcgraviaceákról szóló nagyobb munkálomban megkísérlem e kérdés tisztázását az összehasonlító alkattan alapján s e helyt csupán azt említem meg, hogy SZYSZYŁOWICZ is, nyilván WITTMACK (9. 251—55) nyomán, a *Souroubea*-t 4 fajjal szerepelteti [(*S. guianensis* AUBL., Nicaraguától Peruig s Brasiliáig; *S. crassipes* (TRIANA et PLANCHON) WITTM., Kolumbiától Peruig; *S. exauriculata* DELPINO Mexicóban, *S. pilophora* (TRIANA et PLANCH.) WITTMACK Kolumbiában (18. 164)].

A *Souroubea*-k species-systematikáját GILG berlini botanikus, mint általában a Marcgraviaceákat, jeles fajszerűségekre gyarapította (*S. sympetala*, *pachyphylla*, *didyma* pro sp. 21. 32—34; *S. suaveolens* 31. 128), a melyek egy kivétellel [s ez a benünket növényföldrajzilag ezúttal közelebb érdeklő panamai *S. sympetala* GILG 21. 32—33 = *S. lepidota* (Miq. Stirp. Surin. 94. t. 27 et in Tijdskr. v. Nat. Gesch. en Phys. 1843. X. 83. et in Linnæa XVIII. 235 sub *Ruyschia*) AL. RICHT.], mind Perunak Marcgraviaceákban gazdag földjéről lettek ismeretessé.

A Kew-Index segítségül vételével s a most lehető kritikával a *Souroubea*-k fajszerusa 13-ra becsülhető, ide nem számítván BENTHAM «*Ruyschia (Souroubea?) subsessilis*»-ét, mely mindenképen kétséges Marcgraviacea, WITTMACK szerint hihetőleg *Norantea*, Panama területén (9. 248).

Mindezek közül azonban egyetlen egy sem érinti Guatemalát. Onnan, tudomásom szerint, eddigelé *Souroubea*-t nem ismerünk.

Marcgraviacea-tanulmányaim közepette annyival inkább felköltethető érdeklődésemet GUST. BERNOUILLI «Herb. Guatemalens. Nr. 917» alatt kiadott *Souroubea*-ja «*Yzabal*» mellől (aug. 1870), mint a mely a Nicaraguáig felhatoló *Souroubea*ék (9. 253: area geogr. sub *S. guian.*), másfelől Mexico Cordillerái növényvilágát jellemző *S. exauriculata* DELPINO (syn. *Ruyschia mexicana* BAILL. 7. 241; 9. 256) között létesitené a *Souroubea*ék földrajzi elterjedésében hiányzó kapcsolatot. A *S. exauriculata* a

Marcgraviaceae összes ismert fajai közül az egyetlen, a mely a Marcgraviaceae földrajzi elterjedésében a legmagasabban jut el északra.

A guatemalai *Souroubea* meghatározását megkönnyítette az a körülmény, hogy levelei (Tab. XIII. fig. 81) nem bőrneműek, hanem kifejezetten papiros-vékonyságúak, a minek teljesen megfelel a sklereidék teljes hiánya a mesophyllumban (Tab. XIV. fig. 86—88). Ilyenformán viselkedik a mexicói *S. exauriculata* (Tab. VI. fig. 31; Tab. VII. fig. 40; H_7) és az ULE-féle Amazona-expeditióból eredő (eddig még nem publikált) *S. dasystachya* GILG (Tab. VI. fig. 33; Tab. VII. fig. 43; H_8) alaktanilag merőben más szabású, de hasonlóan vékony húsú levele, mikhez képest a guatemalai *Souroubea*-é — ezentúl *Souroubea Gilgi* a neve — nagyobb is (Tab. XIII. fig. 81).

Legyen a lemez kisebb (Tab. VI. fig. 33), avagy nagyobb (Tab. VI. fig. 31; Tab. XIII. fig. 81), abban azonban meg-egyeznek, hogy a keskeny s bifacialis mesophyllum hiányzó sklereidjeit a szó mechanikai értelmében az oldal-erezet leptoma felőli kemény háncs-sarlója pótolja (Tab. VII. fig. 43bt; Tab. XIV. fig. 86 bt). Tárgyalásunk fonalán a *S. sympetala* = *lepidota* kicsik az által, hogy ez viszont a kifejezetten sklereides *Souroubea*-k közé tartozik.

A *S. dasystachya* levelének élesen kiemelkedő erezete typusa annak, a mit diagnosisiban «penninervis»-nek mondanak.

Ellenben a *S. Gilgi*nek hozzá képest jóval nagyobb levelének az erezete elmosódó. A *S. dasystachya* s a *S. Gilgi* mesophyllumai között azonban nincs számbavehető alkattani különbség (Tab. VII. fig. 43; Tab. XIV. fig. 86). A palissade-nak későbbi megeredése a levélperemben, a mi általában jellemző a vékony húsú levelekben, mind a kettőnél ugyanaz (Tab. XIV. fig. 88 p_1). A levélszerkezet további ismertetése a *S. Gilgi* alább adandó diagnosisának kiegészítését szolgálja csupán.

Az oldal-erezet a levélerezet ama kategóriájába tartozik, a mit a taxonomiai anatomiában «beágyazottnak» szokás mondani («eingebettete Nerven»: 22. 918); csakis ez erezet leptoma felőli kemény háncs-nyalábja az, a mely a levél-lemez —

11 cm h — 3·8 cm sz, 13 cm — 5 cm sz, 13·5 cm h — 5·2 cm sz, 14 cm h — 5·1 cm sz között változik — kellő feszségét biztosítja (Tab. XIV, fig. 86, 88, 91 bt — bt). Mind a két bőrrendszer cuticulája vékony, a bőrsejtek nagysága, a mesophyllum arányaihoz képest, feltűnő (Tab. XIV, fig. 86—88 e_1 — e_2 , fig. 90—91 e_2), sőt az erezet felől is (fig. 86 e_1), ami jelentékenyen fokozódik az által, hogy a mesophyllumba mindkét felől mélyen beöblösödő nyálkasejtek gyakoriak (= epidermis mucigera, fig. cit. n — n).

A *S. Gilgi* palissade-sejtjei, a *S. dasystachya*-éihoz képest, ugyanakkora hosszúság mellett szélesebbek, tehát zömökebbek (Tab. XIV, fig. 87 p). A mesophyllum raphid-tömlőin kívül styloid-tömlőket is észleltem a palissade-réteg alatt (Tab. XIV, fig. 86—87 sdt — sdt), továbbá rendkívül tágas raphid-tömlőket a palissade-sejtek során (Tab. XIV, fig. 86, 88 r — r), akár csak egy-egy *Norantea*-ban (Tab. VIII, fig. 49 r_1 ; Tab. X, fig. 64 r — r_1); ellenben raphidokat az epidermisekben soha (Tab. XIII, fig. 82; Tab. XIV, fig. 89). A légzőnyílások k. m.-i képe (Tab. XIV, fig. 90 s) teljesen megegyezik a Marcgraviacea-typussal, szigorúan egy szinten az epidermissel, egyébként gyakori reduplicatióval (Tab. XIV, fig. 86 s_{1-2}). A légzőnyílások sokaságára vall, hogy az erezet alatt épp úgy ott találjuk (Tab. XIV, fig. 91 ss), a nyálkasejtekkel együtt (fig. cit. n — n), mint a fonákbeli bőrszövet bármely más helyén, minthogy a fonákbeli bőr kialakulására az erezet semmi befolyással sincs. Viszont a cuticula vékonyságát mutatja, hogy az egész bőrrendszer alatt «zavartalanul» tűnik elő az egész érhalózat (Tab. IV, fig. 89). Egy-egy légzőnyílásbeli készülék felületi képe például egy *Norantea Lóczyi*-éhoz (Tab. VIII, fig. 56) képest jóval egyszerűbb, körülbelül olyan, mint a *N. Zahlbruckneri*-é (Tab. IX, fig. 62), csak nagyobb (Tab. XIII, fig. 84). Ennek megvan a maga élettani jelentősége, tekintve a levelek terjedelmes lemezének keskeny és intercellularisokban bővelkedő mesophyllumát (Tab. XIV, fig. 86) és mindehhez mértén viszont a stomák nagy számát a levelek fonákán (Tab. XIV, fig. 89). Alig szenved kétséget, hogy ez a *Souroubea* páratelt légkörre van utalva s hogy a párateltségi optimum csökkenésével nyilván megesőkken a levél ellenálló képessége is.

Ettől általában a *S. dasystachya* fonákbeli bőre, stomáival együtt sem tér el, mert az a körülmény, hogy az esetleg egymás tövibe kerülő légzőnyílások «melléksejtjeinek» száma esetleg 6 is lehet (Tab. VII. fig. 41), épp oly kivételes jelenség, mint hogy 3-as melléksejtbeli számra is bukkanhatunk a *S. Gilgi*-ben, a *normalis* 4 helyett (Tab. XIV, fig. 89). A bőrsejtek kialakulása tekintetében alig tehető különbség a felső s az alsó bőr között, hacsak abban nem, hogy a felső bőrbeliek mereven egyenes falazatúak (Tab. XIII. fig. 83, illetve 82). Az erezet ez utóbbiakat sem befolyásolja.

Az érhalózat anastomosisai a levélperemig hatolnak s a néhány elemre csökkent stelék mechanikai elemei még e helyt is dominálnak (Tab. XIV, fig. 88 *bt*). A lemez mindenhol vékony cuticulája a levélperemen megvastagodva hajlik át a fonák felől egy rövid darabon, miközben a levélszél is némileg behajlik (Tab. XIV, fig. 88 $e_1 - e_1 - e_2 - x$).

Egymástól távol fekvő földségek (Amazonas: Rio-Branco; Guatemala: Yzabal) e típusos Souroubeái között épp oly nagy az alkattani affinitas, mint a mennyire alaktanilag távol eső fajok egymástól; a gyakorlat szempontjából a levelek teljesen eltérő nervaturája nyomban meggyőz bennünket arról (Tab. VI, fig. 33; Tab. XIII, fig. 81).

Egyéb alaktani sajátosságainak összefoglalását az alábbi diagnosisban adom:

Souroubea Gilgi sp. n. (*H*₁₄.)

Frutex? Ramis teretibus, 4—5 mm crassis, in sicco ochraceo-griseis, cortice non solubili, cicatricibus maiusculis rotundatisque. Folia alterna, internodiis multum longiora, brevissime petiolata, subsessilia; lamina ovato-elliptica, plana, 10·6—13·4—13·5*—13·7 cm longa. —, 5·1—5·2*—5·1 cm lata (*=Tab. XIII, fig. 81), versus basin cuneata, ad apicem acutata et breviter callosomucronata, in margine integerrima utrinque glaberrima, superne lucido-viridis, subtus paullum pallidior, chartacea, costa crassiuscula imprimis inferne prominula, nervis lateralibus parum conspicuis sub angulo acuto assurgentibus, ante marginem laminae furcatis et connexis, venis haud conspicuis; glandulis hypophyllis irregulariter dispositis, parvis, 0·5—0·7 mm latis, pezizae-

formibus, subochraceis (Tab. XIII, Fig. 81*gl*). Racemus terminalis verosimiliter laxiflorus, pedicellis 12—17 mm longis, glaberrimis, striatulis sat angustis, 1—1.2 mm crassis, versus calycem parum latioribus; nectariis anguste scyphiformibus, 10—12 mm longis, ad basin subglobosis, dein fere cylindricis, ad verticem parum latioribus, bipartitis, calcare divaricatum recurvato, rotundato-obtusculo excavato, 5—6 mm longo, 3—4 mm lato; sepala imbricata, late rotunda, coriacea, 2—3 mm lata et parum breviora.

Ezt a *Souroubea*, melynek eredeti példányát a berlini botanikus múzeum gyűjteményében őrzik (*H₁₄*), dr. GILG ERNST berlini botanices professzor s a berlini botanikus múzeum egyik kiváló tudósa nevére nevezem el. GILG-nek a Marcgraviaceae species-systematikája terén különleges érdemei vannak (21., 31., 32). Másfelől pedig a *Souroubea Gilgi*-vel jelét kívánom adni régi hálámnak, a melylyel az ENGLER professzor vezérletével oly nagyarányosan fellendült berlini botanikus múzeum-nak tartozom, hol minden törekvésem mindenkör a legliberalisabb megértésre talált s a hol, a tudós tisztikar barátságának állandó élvezete mellett, többször s mindig zavartalanul búvárkodhattam. Marcgraviacea-munkálatom nem volna teljes, jelen cikksorozatom meg éppenséggel sem kerülhetett volna a tek. Akadémia elé a berliniek szíves támogatása nélkül. A világháború tomboló viharai közepette, kérésemre, egy világhíres gyűjtemény összes Marcgraviacea-typusait küldötték meg nekem Bécsbe (utóbb Pozsonyba is), hol, részint a Hofmuseum növénytári osztályában, részint WETTSTEIN professzor növénytani laboratóriumában jutott részemül az a szerencse, hogy a jelen alkalommal bemutatott tanulmányaimat is befejezhettem.

III—IV. B) A vizsgálat tárgyát tevő herbariumi példányok tüzetes sorozata.

A sorszám szerinti jelzések megfelelnek a szövegben előforduló és rendszerint zárójelben foglalt hasonló jelzéseknek.

H_{10} . 8^a *Sp*^s Pentandria monogynia Cl. 13. Fl. Huayq. No. 459. L. 666. *Marcgravia* Fl. Per. 1864. *Ruyschia* JAQUIN. Egy másik czéduláján: Fl. Huayaquil. Herb. PAVON. Egy harmadik czéduláján: *Norantea cacabiferae* aff. sed nervatura diversa. — Sed nectariis deficientibus non describende. (Copie) det. E. GILG. = *Norantea Zahlbruckneri* AL. RICHT. Wien, 13. VII. 1915. In HBB (=Herb. BOISSIER—BARBEY Chambésy).

H_{11} . *Norantea cacabifera* DON. In HB. (=Herb. Mus. botan. Berol. sub Guayaquil: PAVON (vide 9. 241). Origin!

H_{12} . Octandria monogynia. Cl. 13. *Marcgravia*. Fl. Per. Fl. H. 2^a Sp. No. 459. L. 666. *Souroubea* AUBLET. No. 468. L. 674. = *Norantea cacabifera* G. DON. teste E. GILG 1897 in HBB.

H_{13} . *Norantea microscypha* GILG 1897. Origin. in HV. (=Herb. Mus. Palat. Vindob.) sub *Nor. anomala* H. B. K. Coll. R. SPRUCE No. 6020. In Andibus Ecuadorensibus (9. 240).

H_{14} . *Souroubea Gilgi* AL. RICHT. in Herbar. Guatemalens. No. 917. — Yzabal, Aug. 1870. GUST. BERNOULLI Origin. in HB.

III—IV. C). Ábramagyarázat.

A rövidítések magyarázó sorozatát lásd a Math. a és Természettud. Ért. XXXIV. köt. 582—84. lapján)

IX. tábla.

Norantea Zahlbruckneri AL. RICHT. (H_{10}).

Fig. 57. A BOISSIER-BARBEY (Chambésy)-gyűjteményben őrzött eredeti példány egyetlen levele a fonák felől; t. n.

- * 58. A levél-perem (Tab. I, fig. 1 a—b irányú) k. m.-e, már is feltűnően nagy nyálkasejtekkel. — Z. Orth. Oc. 6. Ob. DD.
- * 59. A levél x - (Tab. I, fig. 1 a, $x-x$) irányú k. m.-e az oldalér teljes k. m.-ével. — Z. Oc. 2. Ob. C.
- * 60. A levél x -irányú k. m.-i részlete a felső bőrrel s a palissade-dal, illetőleg a mélyen beöblösödő nyálkasejt miatt eltörpülő palissade-sejtekkel (p_{1-3}). — Z. Orth. Oc. 6. Ob. DD.
- * 61. Fonák felőli részlet a levél x -irányú k. m.-éből, stoma-reduplicációval. — Z. Orth. 6. Ob. DD.
- * 62. Légzőnyílás készüléke felülről nézve. — Z. Orth. Oc. 6. Ob. DD.

X. tábla.

Fig. 63. Levélfonák felőli bőr felülről nézve, elnyálkásodott és raphidos bőrsejtekkel. — Z. Oc. 3. Ob. DD.

- « 64. Levél k. m.-e a lemez *i*-irányában (= Tab. I, fig. 1a, *i-i*). — Z. Oc. 2. Ob. DD.

Norantea cacabifera G. DON. (H_{11}).

Fig. 65–67. A levél felső bőrének nyálka-sejtes részletei. — Z. Oc. 2. Ob. DD.

- « 68. Levél paratúltengéses k. m.-e, a kitöltő (para-) szövetbe nyomuló sklereiddel (H_{12}). — Z. Oc. 2. Ob. C.
- « 69. Levél epidermise az oldalerezet fölötti, sajátosan hasadozott cuticulával. — Z. Orth. Oc. 6. Ob. DD.

XI. tábla.

Fig. 70. Levél a fonák felől, t. n.

- « 71. Levél k. m.-e, az oldalér teljes képével, a lemez *x*-irányában. — Z. Oc. 4. Ob. AA.
- « 72. A levél paratúltengéses k. m.-i részlete sklereiddel (H_{12}). — Z. Oc. 3. Ob. C.
- « 73. A levél-lemez *i*-irányú k. m.-i részlete, palissade-támasztó sklereid-fészekkel. — Z. Oc. 4. Ob. C.

XII. tábla.

Fig. 74–75. A levél *i*-irányú k. m.-ei. — Z. Oc. 4. Ob. C.

- « 76. A levél fonákbeli k. m.-e a lemez *x*-irányában, külső s belső légudvarokkal ellátott és látszólag az epidermis alá sülyesztett légzőnyílásokkal. — Z. Oc. 4. Ob. C.
- « 77. Levélperembeli k. m. a lemez (= Tab. I, fig. 1a, *a-b*) irányában, már is erőteljes háúes-sarlóval. — Z. Oc. 2. Ob. C.

XIII. tábla.

Fig. 78. Levélfonák felülről nézve, mélyebb helyzetüknél fogva elmosódó légzőnyílásokkal. — Z. Oc. 3. Ob. DD.

Norantea microscypa GILG (H_{13}).

Fig. 79. A levél lemezének *x*-irányú k. m.-e. — Z. Oc. 2. Ob. C.

- « 80. Palissade-alatti részlet a lemez *i*-irányú k. m.-éből, egy tangentiálisan nyult sklereid-fészekkel (skn_1) s ugyanannak k. m.-ével (skn_2). — Z. Oc. 5. Ob. AA.

Souroubea Gilgi AL. RICHT. (H_{14}).

Fig. 81. Egy levél a fonák felől, t. n.

- 82. Felső epidermis az oldalerezet fölött nyálkasejtekkel. — Z. Oc. 2. Ob. C.
- 83. Fonák felőli epidermis, felülről tekintve, nyálkasejtekkel és légzőnyílásokkal. — Z. Oc. 4. Ob. C.
- 84. Egyetlen légzőnyílásbeli készülék felülről nézve, igen fokozott száraz-lencsebeli nagyítás mellett. — Z. Orth. Oc. 6. Ob. DD.
- 85. Styloid-tömlő a palissade alatt. — Z. Orth. Oc. 6. Ob. DD.

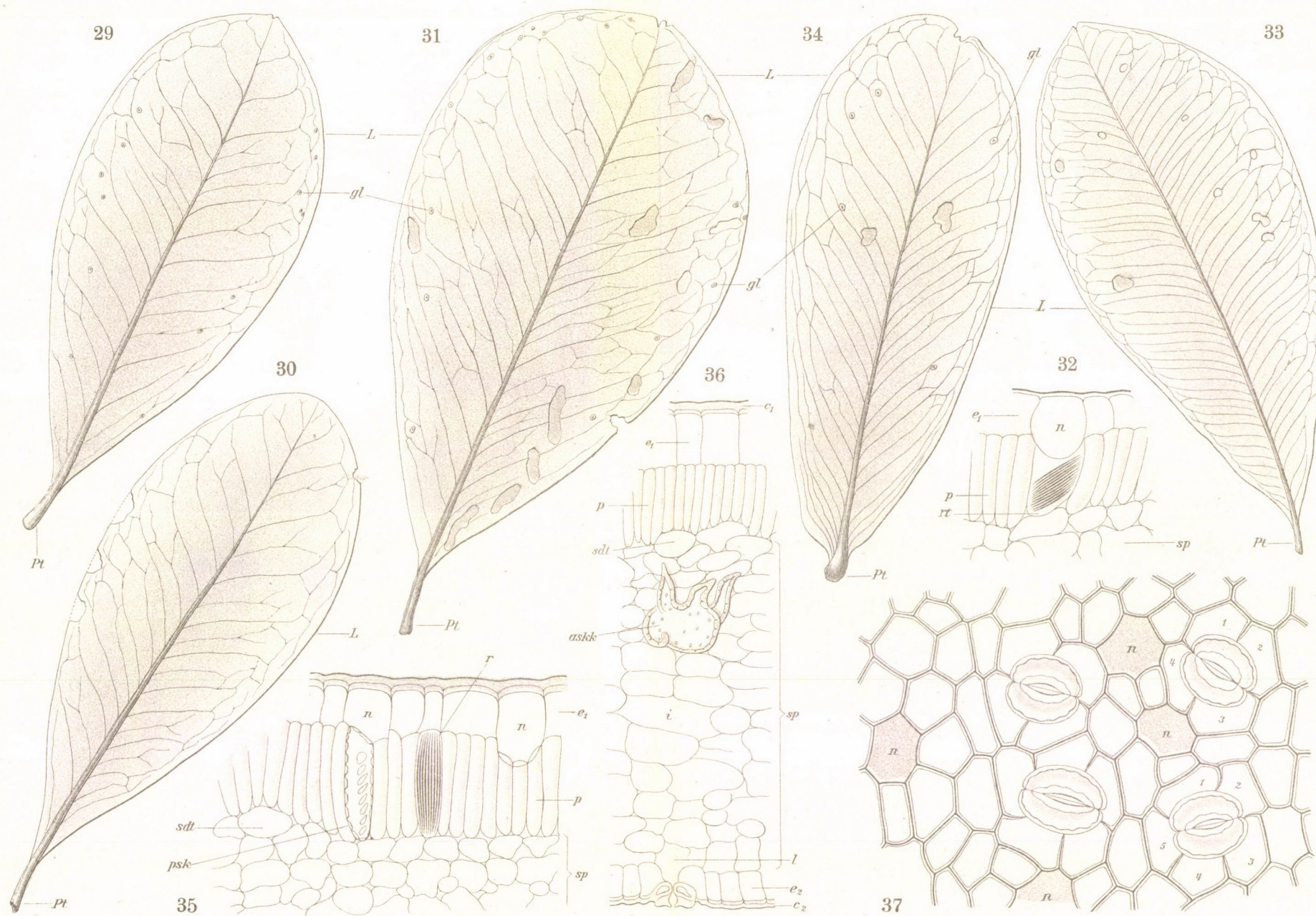
XIV. tábla.

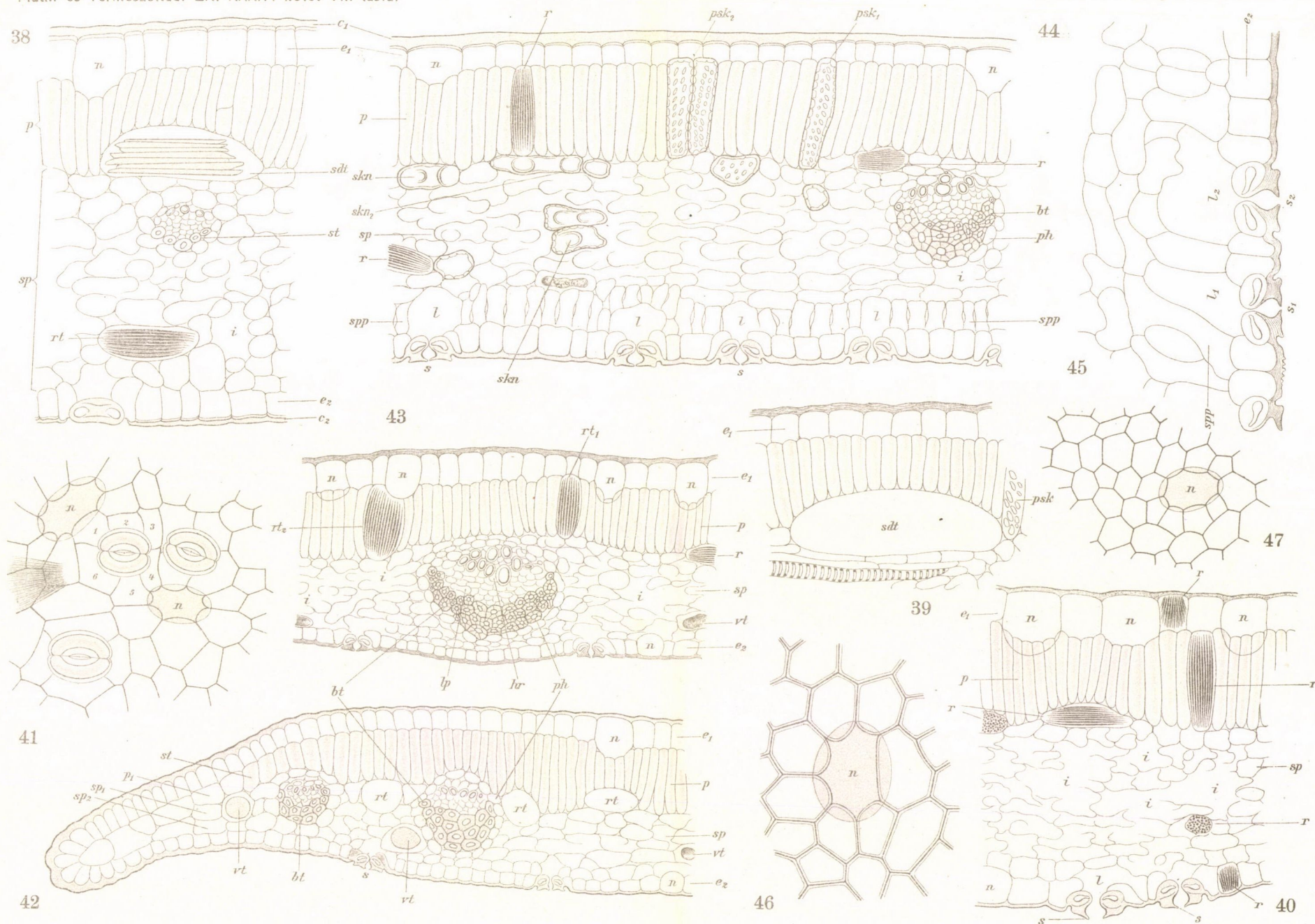
Fig. 86. A levél k. m.-e, a lemez x -irányában, styloid- s raphid-tömlőkkel, valamint feltűnő epidermis mucigera-val. — Z. Oc. 2. Ob. C.

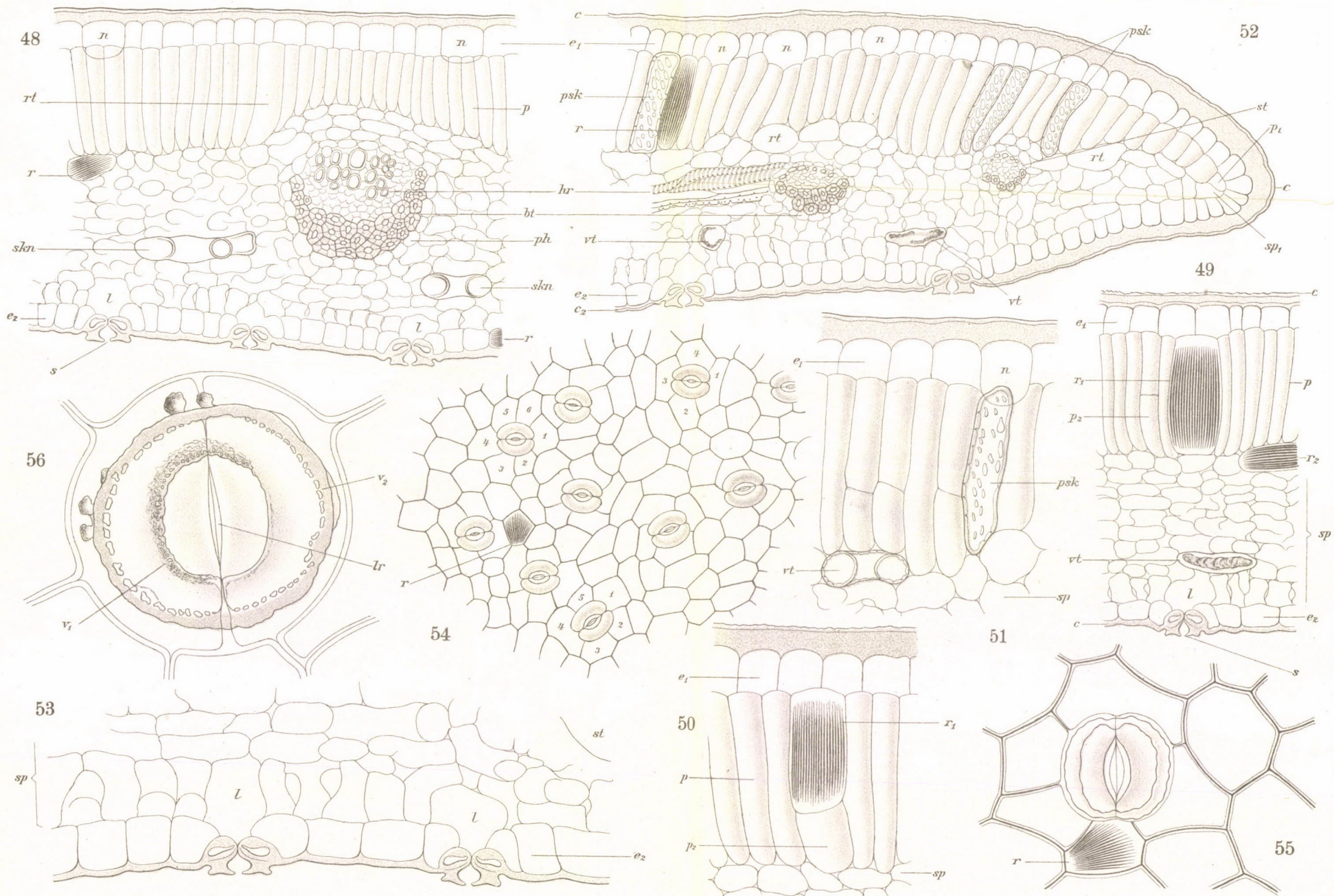
- 87. Ugyanaz egy másik levélből. — R. (= REICHERT-Mikrosk.) Oc. 2. Ob. 5.
- 88. Levélperem k. m.-e a perem felé hirtelen megvastagodó cuticulával. — Z. Oc. 2. Ob. C.
- 89. Fonák felőli bőrlevonat felülről nézve s a bőrrendszeren áttetsző érhálózattal. — Z. Oc. 2. Ob. C.
- 90. Fonák felőli bőrrendszer k. m.-e a lemez x -irányában, légzőnyílással és feltűnően beöblösödő nyálkasejtekkel. — Z. Oc. 3. Ob. DD.
- 91. A levél-fonák (x -irányú) k. m.-i részlete a stele alatt. — Z. Oc. 4. Ob. C.

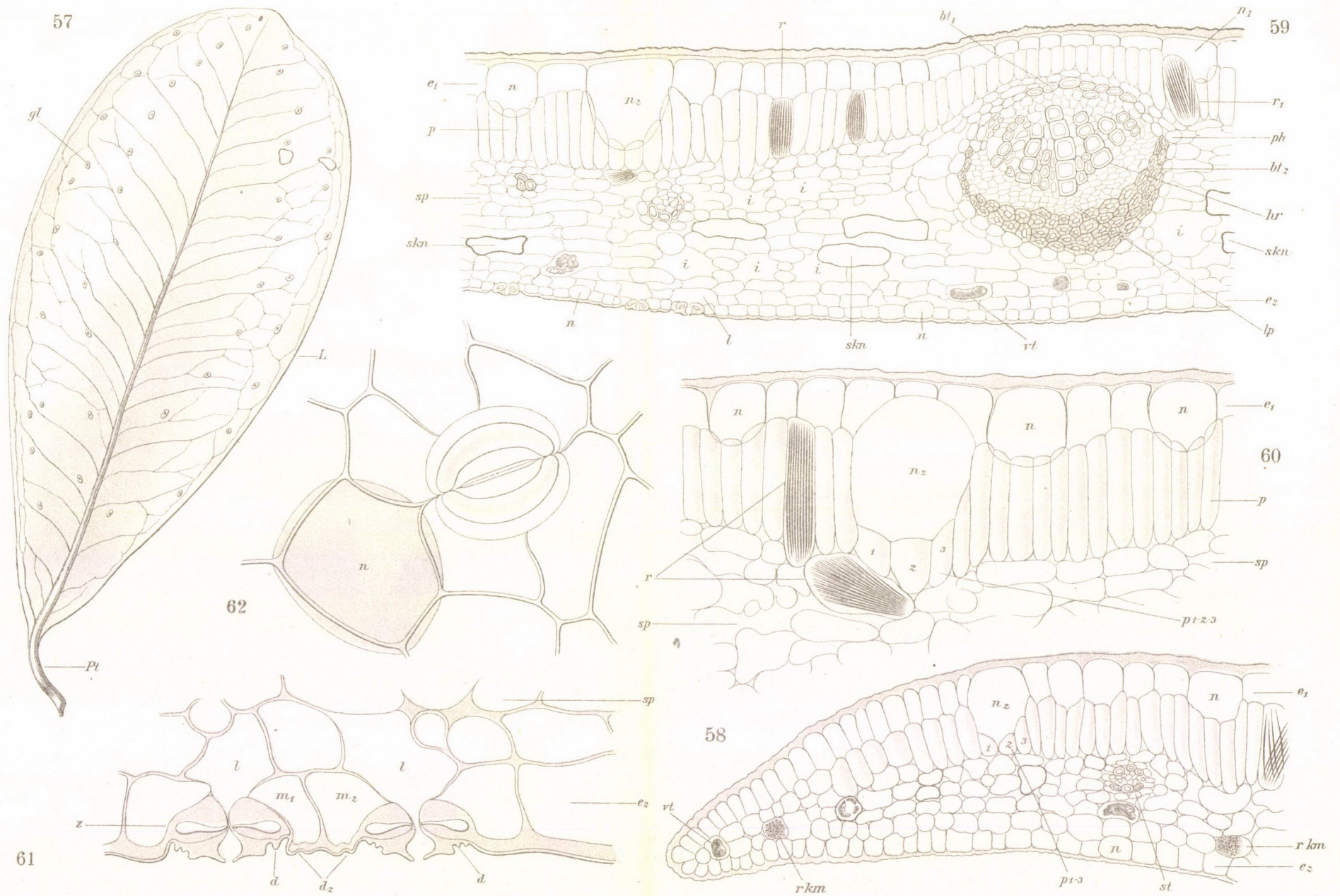
(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1915. okt. 18.-án tartott üléséből.)

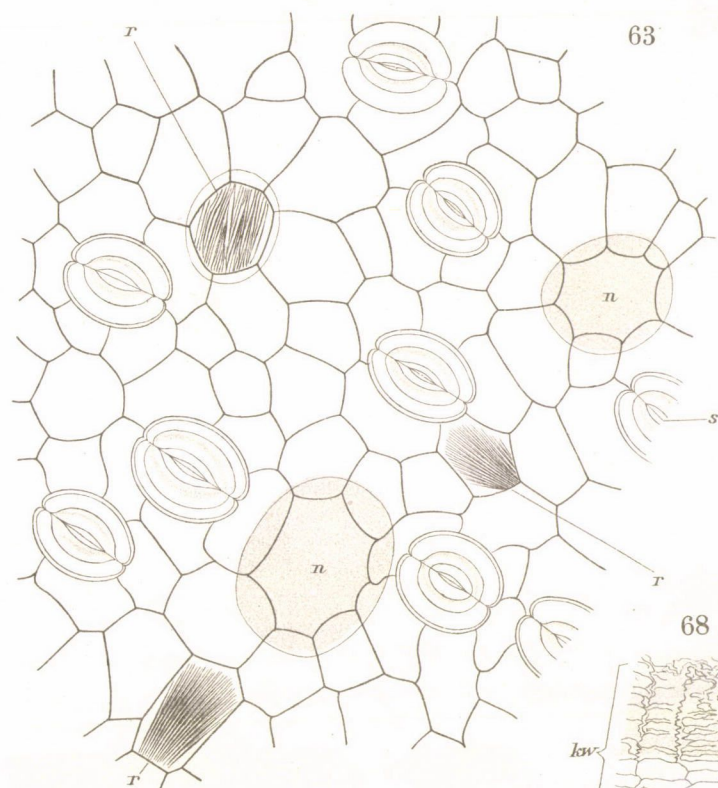




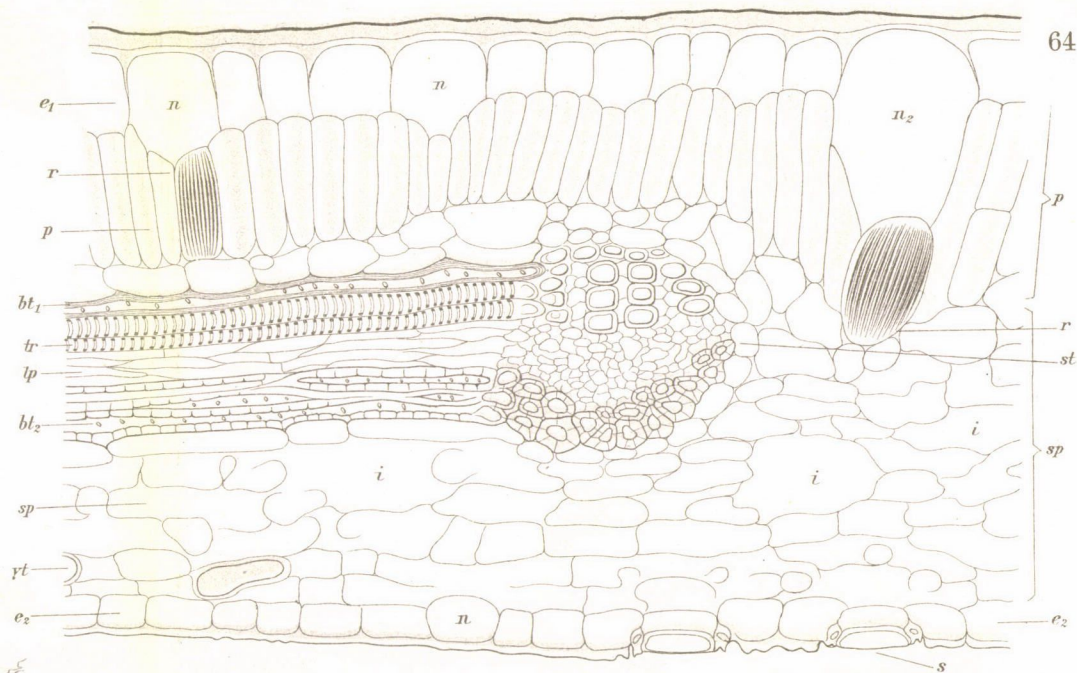




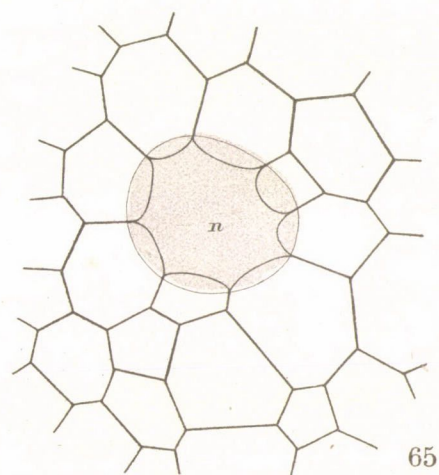




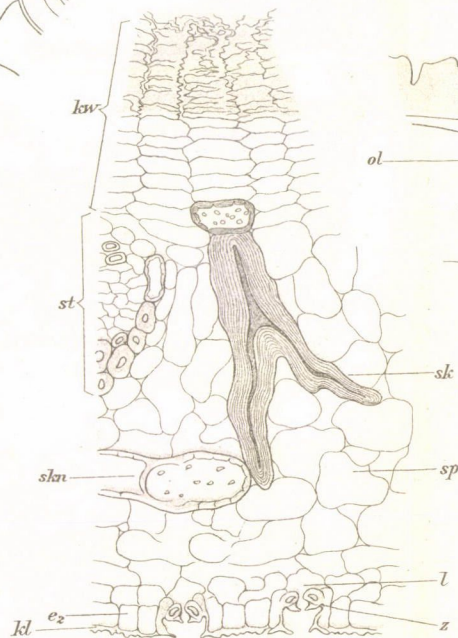
63



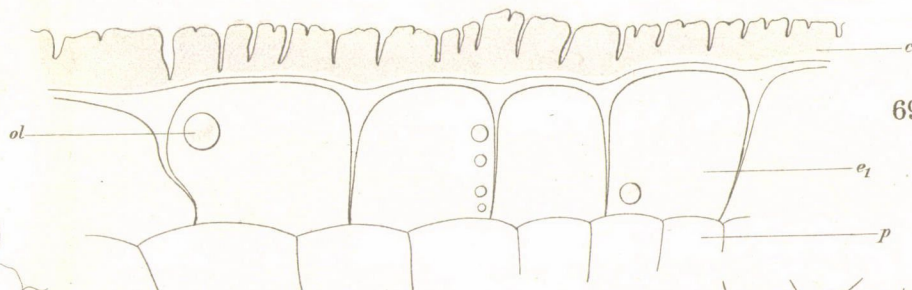
64



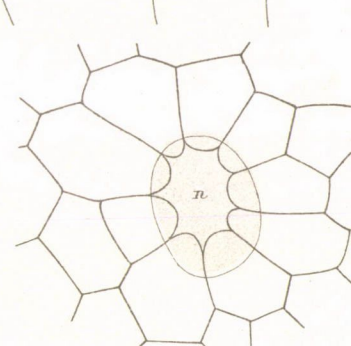
65



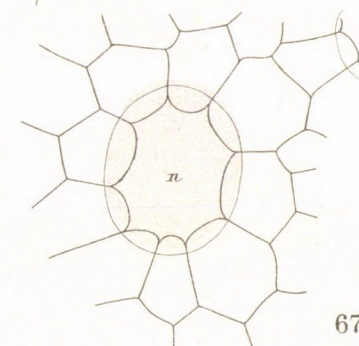
66



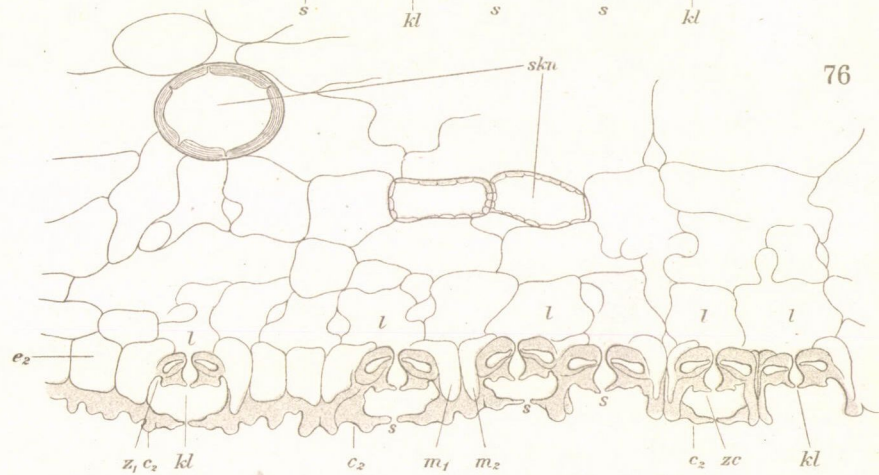
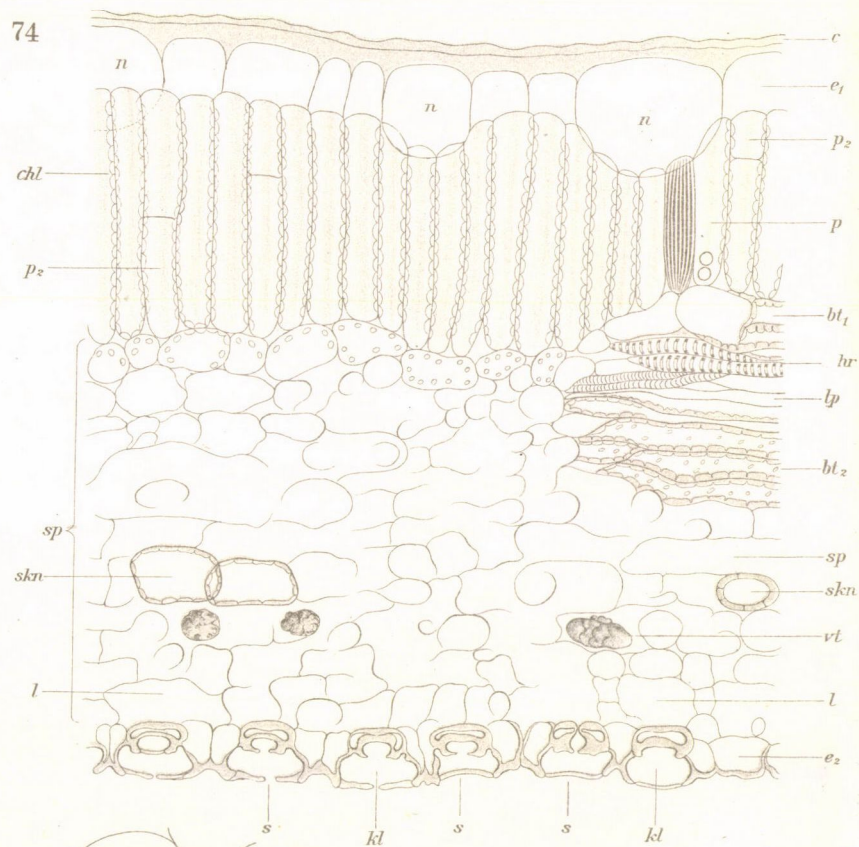
67



68

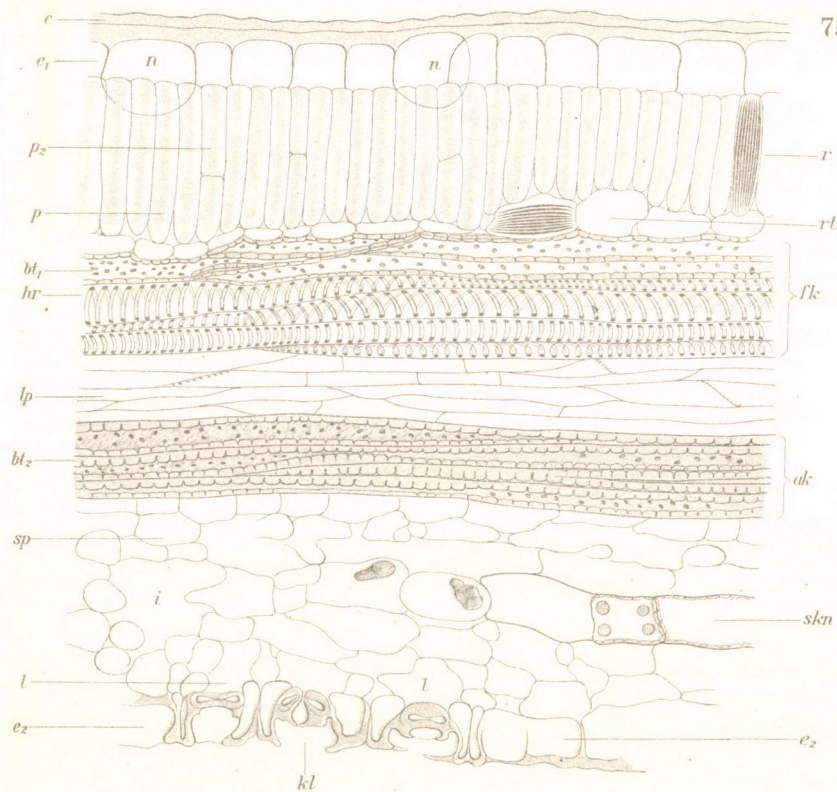


74



76

75



77

